GODFREY LOWELL CABOT SCIENCE LIBRARY
of the Harvard College Library

This book is
FRAGILE
and circulates only with permission.
Please handle with care
and consult a staff member
before photocopying.

Thanks for your help in preserving
Harvard's library collections.

Eng
5057
83

PRINCETON

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

EXAMEN
MARITIME.

Digitized by Google

NOMS DES LIBRAIRES

Chez lesquels se trouve cet Ouvrage.

Paris.	CLAUDE-ANTOINE JOMBERT, fils aîné, *rue Dauphine.* ALEXANDRE JOMBERT jeune, *rue Dauphine.* PISSOT, *quai des Augustins.* DURAND, neveu, *rue Galande.*
Versailles.	BLAIZOT.
Lyon.	LOUIS ROSSET. J. M. BRUYSET, pere & fils. BERNUZET. LE ROY. BARRET.
Bordeaux.	Les Freres LABOTTIERE. CHAPPUIS, freres. PALLANDRE, l'aîné.
Rouen.	Vᵉ DUMESNIL & L'ABBÉ. LE BOUCHER. BESOGNE. L. P. MACHUEL.
Breſt.	MALASSIS.
Marſeille.	MOSSY. SUBE & LA PORTE.
Nantes.	MALASSIS. DESPILLY. BRUN, fils aîné. BRUN & Compagnie.
Rochefort.	BONHOMME & Compag. FAYE.
La Rochelle	CHABOCEAU GRAND'-MAISON. PAVIE.
Caën.	LE ROY.
Le Havre.	FAURE. L'AIGUILLON.
L'Orient.	BAUDOUIN.
Vannes.	Veuve GALLES & Fils.
St. Malo.	HOVIUS, pere & fils. VALAIS.
Rennes.	ROBIQUET. REMELIN.
Bayonne.	FAUVEL. TREBOSC.
Dunkerque.	LAURENZ.
Toulon.	RAIMOND MALLARD.
Amſterdam.	Les Héritiers VAN HARREWET.
La Haye.	GOSSE.
Hambourg.	KONIG.
Londres.	EMSLEY. NOURSE. CADELL.
Madrid.	ORCEL, freres. FERNANDEZ. DE MENA.
Cadix.	CARIS & BERTRAND. KERMIL, freres.
Lisbonne.	Veuve BERTRAND & fils. BOREL & Compagnie. DUBEUX. REYCEND. MARTIN.

Digitized by Google

EXAMEN MARITIME,

THÉORIQUE ET PRATIQUE,

OU

TRAITÉ DE MÉCHANIQUE,

APPLIQUÉ

A LA CONSTRUCTION ET A LA MANŒUVRE

des Vaiſſeaux & autres Bâtiments.

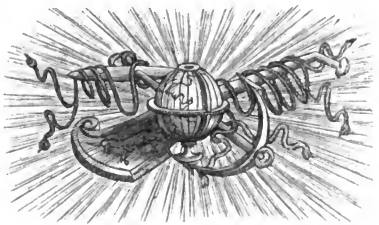
PAR Don GEORGES JUAN, Commandeur d'Aliaga, dans l'Ordre de Malthe, Chef d'Eſcadre des Armées Navales de Sa Majeſté Catholique, Commandant des Gardes de ſa Marine, de la Société Royale de Londres, de l'Académie Royale de Berlin, & Correſpondant de l'Académie Royale des Sciences de Paris.

TRADUIT DE L'ESPAGNOL, AVEC DES ADDITIONS,

Par M. LEVÊQUE, Ingénieur Hydrographe de la Marine, Correſpondant de l'Académie Royale de Marine, & du Muſée de Paris; Profeſſeur Royal en Hydrographie & Mathématiques, à Nantes.

TOME PREMIER.

Qui deſcendunt mare in Navibus, facientes operationem in aquis multis: ipſi viderunt opera Domini, & mirabilia ejus in profundo. *Pſ. 106.*



A NANTES,

Chez { L'AUTEUR, vis-à-vis la Bourſe.
AUGUSTIN-JEAN MALASSIS, Imprimeur-Libraire, place du Pilori.
DESPILLY, Libraire, haute grande-rue, près celle de Beau-Soleil.

M. DCC. LXXXIII.

Digitized by Google

Eng 5057.83

HARVARD COLLEGE LIBRARY
DEGRAND FUND
May 20, 1924
(2 vols)

Digitized by Google

A MONSEIGNEUR

CHARLES-EUGENE-GABRIEL

DE LA CROIX,

MARQUIS DE CASTRIES,

COMTE D'ALAIS,

Lieutenant-Général des Armées du Roi, Chevalier de ſes Ordres, Lieutenant-Général de la Ville de Lyon, Lyonnois & Forès, Gouverneur des Ville & Citadelle de Montpellier, Ville & Port de Cette, Meſtre-de-Camp Général de la Cavalerie Françaiſe & Étrangere, Commandant Général du Corps de la Gendarmerie, MINISTRE & SECRÉTAIRE D'ÉTAT, ayant le Département de la MARINE & des Colonies.

MONSEIGNEUR,

PERSONNE ne met en doute aujourd'hui l'importance de la Marine, ſon influence ſur le bonheur des hommes, &

Digitized by Google

combien elle contribue à la gloire des Nations qui, comme la NÓTRE, *la cultivent avec ſuccès. Pénétré comme vous l'êtes,* MONSEIGNEUR, *de ces grandes vérités, votre unique ſollicitude eſt de vivifier toutes les parties de la Science Navale ; aucune n'échappe à vos lumieres & à votre vigilance. Vous avez inſpiré à tous les Membres de ce Corps illuſtre, l'amour de l'étude & de la gloire, par les honneurs que vous avez attachés aux ſuccès. C'eſt ſous votre adminiſtration,* MONSEIGNEUR, *que le génie a déployé toute ſa puiſſance ; & la France voit avec admiration la Marine s'élever, dans ſon ſein, à un degré de ſplendeur inconnu aux ſiecles précédents.*

En même temps que vous avez été occupé à ſoutenir l'honneur du nom Français, & à faire rendre la paix à l'Europe, on vous a vu chérir & protéger les Arts de paix, allier la gloire des Armes avec la culture des Sciences & des Lettres. Et c'eſt d'après cela, MONSEIGNEUR, *que j'ai pris la liberté de vous préſenter la traduction de l'Ouvrage de* DON GORGES JUAN, *l'un des plus célebres Géometres & des plus grands hommes de mer de l'Europe.*

La protection dont vous m'avez honoré, en permettant que cet Ouvrage parût ſous vos auſpices, & les ſecours que vous m'avez accordés au nom du Roi, pour en faciliter la publication, m'ont pénétré de la plus vive reconnoiſſance. Si mon travail, joint à celui de DON GEORGES JUAN, *étoit digne de paſſer à la poſtérité, le ſentiment le plus glorieux pour moi, & le plus cher à mon cœur, ſeroit d'avoir fait parvenir juſqu'à elle le ſeul & unique témoignage que je puiſſe vous donner de mon zele, & du très-profond reſpect avec lequel je ſuis,*

MONSEIGNEUR,

Votre très-humble & très-obéiſſant ſerviteur,
LEVÉQUE.

Digitized by Google

EXTRAIT

Des Régiſtres de l'Académie Royale des Sciences.

Du 26 Février 1783.

MEſſieurs DE LA LANDE, BÉZOUT & DE BORY, ayant été nommés par l'Académie pour examiner la Traduction de l'*Examen Maritime* de D. GEORGES JUAN, faite par M. LEVÊQUE, & en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne d'être approuvé & imprimé ſous le Privilege de l'Académie. En foi de quoi j'ai ſigné le préſent Certificat. A Paris, le 26 Février 1783.

Signé, LE MARQUIS DE CONDORCET,
Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre: à nos Amés feaux Conſeillers, les Gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, grand Conſeil, Prévôts de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenants Civils, & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra, SALUT. Nos bien amés les Membres de l'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES de notre bonne Ville de Paris, nous ont fait expoſer qu'ils auroient beſoin de nos Lettres de Privilege pour l'impreſſion de leurs Ouvrages. A CES CAUSES, voulant traiter favorablement les Expoſants, Nous leur avons permis, & permettons par ces préſentes, de faire imprimer, par tel Imprimeur qu'ils voudront choiſir, toutes les recherches & obſervations journalieres, ou relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les aſſemblées de ladite Académie Royale des Sciences, les Ouvrages, Mémoires, ou Traités de chacun des Particuliers qui la compoſent, & généralement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître, après avoir fait examiner leſdits Ouvrages, & jugé qu'ils ſeront dignes de l'impreſſion, en tels volumes, formes, marges, caracteres, conjointement ou ſéparément; & autant de fois que bon leur ſemblera, & de les faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le temps de vingt années conſécutives, à compter du jour de la date des préſentes; ſans toutefois qu'à l'occaſion des Ouvrages ci-deſſus ſpécifiés, il en puiſſe être imprimé d'autres qui ne ſoient pas de ladite Académie: faiſons défenſes à toutes ſortes de perſonnes, de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucun lieu de notre obéiſſance; comme auſſi à tous Libraires & Imprimeurs, d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre & débiter leſdits Ouvrages, en tout ou en partie, & d'en faire aucunes traductions ou extraits, ſous quelque pré-

Digitized by Google

texte que ce puiſſe être, ſans la permiſſion expreſſe & par écrit deſdits Expoſants, ou de ceux qui auront droit d'eux, à peine de confiſcation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenants, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers auxdits Expoſants, ou à celui qui aura droit d'eux, & de tous dépens, dommages & intérêts; à la charge que ces préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le regiſtre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impreſſion deſdits Ouvrages ſera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément aux Réglements de la Librairie; qu'avant de les expoſer en vente, les manuſcrits ou imprimés qui auront ſervi de copie à l'impreſſion deſdits Ouvrages, ſeront remis ès mains de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France, le Sieur HUE DE MIROMÉNIL; qu'il en ſera enſuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier Chancelier de France, le Sieur DE MAUPEOU, & un dans celle dudit Sieur HUE DE MIROMÉNIL: le tout à peine de nullité deſdites préſentes, du contenu deſquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir leſdits Expoſants & leurs ayant-cauſes, pleinement & paiſiblement, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie des préſentes, qui ſera imprimée tout au long au commencement ou à la fin deſdits Ouvrages, ſoit tenue pour duement ſignifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conſeillers & Secrétaires, foi ſoit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huiſſier ou Sergent ſur ce requis, de faire, pour l'exécution d'icelles, tous actes requis & néceſſaires, ſans demander autre permiſſion, & nonobſtant Clameur de Haro, Chartre Normande, & Lettres à ce contraires. Car tel eſt notre plaiſir. DONNÉ à Paris, le premier jour de Juillet, l'an de grace mil ſept cent ſoixante-dix-huit, & de notre regne, le cinquieme. Par le Roi en ſon Conſeil.

Signé, LE BEGUE.

Regiſtré ſur le Regiſtre XX *de la Chambre Royale & Syndicale des Imprimeurs & Libraires de Paris, N°. 1477, folio 582, conformément au Réglement de 1723, qui fait défenſes, article 4, à toutes perſonnes, de quelques qualités qu'elles ſoient, autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter, faire afficher aucuns Livres pour les vendre en leurs noms, ſoit qu'ils s'en diſent les Auteurs ou autrement, & à la charge de fournir à la ſuſdite Chambre, huit Exemplaires preſcrits par l'article 108 du même Réglement. A Paris, ce 20 Août 1778.*

Signé, A. M. LOTTIN, *l'aîné, Syndic.*

Digitized by Google

PRÉFACE DU TRADUCTEUR.

L'Ouvrage de *D. Georges Juan*, que nous preſentons au Public, quoiqu'imprimé dès 1771, n'eſt cependant pas encore connu en France, qui eſt la partie de l'Europe, où l'on s'eſt le plus occupé de la théorie & de la pratique de la Conſtruction & de la Manœuvre des Vaiſſeaux. Il y a peu d'ouvrage auſſi intéreſſant pour la Marine que celui dont il s'agit ici. L'Auteur avoit le rare avantage d'être un des plus profonds Géometres, & un des plus grands Navigateurs. Il avoit accompagné M. Bouguer au Pérou en 1735, pour la meſure de la Terre, entrepriſe à jamais célebre dans l'hiſtoire des ſciences, & a publié pluſieurs ouvrages ſur la Marine, où l'on trouve le génie d'obſervation, & la ſagacité qui devoient produire l'EXAMEN MARITIME.

Vers la fin du dernier ſiecle l'Europe n'avoit aucun ouvrage théorique ſur la Navigation, ſi ce n'eſt ſur le Pilotage. La Conſtruction des Vaiſſeaux étoit abandonnée à de ſimples Charpentiers, & l'on ne penſoit pas que l'ARCHITECTURE NAVALE fût fondée ſur une application continuelle de la Méchanique & de la Géométrie, qui ſont les branches les plus difficiles des Mathématiques. Ceux qui exerçoient cette profeſſion étoient ſeulement guidés par leurs lumieres naturelles, & par leur propre expérience; ils varioient la forme des Vaiſſeaux ſelon qu'il leur paroiſſoit convenable; ils ſe fondoient ſur le récit des Navigateurs, & en adoptoient très-ſouvent les préjugés: flottant ainſi dans les eſpaces immenſes de l'erreur, ce n'étoit que par un haſard ſingulier qu'ils pouvoient parvenir à faire des Vaiſſeaux qui euſſent de bonnes qualités. Dans un très-grand nombre de Ports, tant en France qu'ailleurs, les choſes ſont encore dans le même état; peut-être même n'y en a-t-il pas un ſeul qui n'en fourniſſe quelque exemple.

Digitized by Google

Le concours de la théorie & de l'expérience eſt abſolument néceſſaire à la perfection de la Marine ; & on ne peut diſconvenir des difficultés que cette réunion préſente. *D. Georges Juan* jouiſſoit de ce rare avantage au plus haut dégré, auſſi a-t-il découvert des regles très-importantes, & a-t-il rejetté un grand nombre de celles qui étoient admiſes, preſque ſans la moindre répugnance, par les hommes les plus éclairés. C'eſt ſous ce regne qui ſera à jamais la gloire des ſiecles, & l'honneur du nom Français, qu'on peut légitimement eſpérer de faire les derniers pas vers la perfection. Nous touchons à cette époque : elle doit néceſſairement réſulter des Réglements du feu Roi Louis XV, pour les études des Officiers de la Marine, & de la protection que notre Monarque lui accorde ; protection d'autant plus grande, que ce Prince, dont toutes les actions ſont des leçons de ſageſſe pour les Rois, ſçait combien la Marine influe ſur le bonheur de ſes peuples. Il y a maintenant en France un grand nombre d'Officiers dans ce Corps illuſtre, qui, outre la pratique la plus conſommée de la Navigation, ont des connoiſſances dans les Mathématiques & la Phyſique, qui les mettent au rang des plus grands Géometres, & au deſſus des Marins de toutes les autres Nations.

L'Architecture Navale, ne peut manquer de gagner beaucoup à la publication de l'Examen Maritime, & les Marins en tireront le plus grand parti, pour connoître les cauſes des différentes actions & des mouvements du Navire, & par conſéquent pour éclairer leur pratique. Nous croyons cependant devoir recommander aux Conſtructeurs d'agir avec la plus grande prudence dans les changements que l'étude de cet ouvrage pourroit les porter à faire à leurs Navires. Il n'y a point d'art dont la pratique ſoit plus délicate, & où il ſoit ſi aiſé d'outrer même les défauts qu'on veut corriger, ou de tomber dans le vice oppoſé à celui qu'on veut éviter. Les nouvelles inventions pour ce qui concerne la Conſtruction des Vaiſ-

Digitized by Google

ſeaux doivent être ſoumiſes à l'examen le plus ſcrupuleux avant d'être miſes en pratique : & nous voyons tous les jours que les plus petites erreurs dans l'application de règles très-certaines & très-connues, produiſent des défauts de la plus grande conſéquence : c'eſt pourquoi la prudence & le calcul doivent toujours ici guider & même corriger les efforts du génie.

Cette remarque regarde ſur-tout les Conſtructeurs qui ne ſeroient pas ſuffiſamment verſés dans la théorie pour appliquer directement le calcul aux Vaiſſeaux qu'ils veulent conſtruire : ce qui eſt cependant d'une néceſſité abſolue pour connoître la ſituation de leurs centres, leur force pour porter la voile, les réſiſtances tant directes que latérales qu'ils doivent éprouver dans le fluide, en un mot pour avoir une idée juſte de leurs qualités. Nos connoiſſances phyſiques ne ſeront portées au degré de perfection dont elles ſont ſuſceptibles, que lorſque nous ſerons aſſez avancés, non-ſeulement, pour pénétrer les cauſes des phénomenes, mais encore pour calculer leurs effets. Dans l'Architecture Navale, nous croyons qu'on doit ſe défier beaucoup des changements qu'on peut être porté à faire à un Vaiſſeau d'après la ſeule inſpection de ſon plan, ſans les avoir préalablement ſoumis au calcul : il n'eſt donné qu'aux Artiſtes d'une expérience conſommée & éclairée par une bonne théorie préliminaire, de ſe diriger ainſi d'après le ſimple coup d'œil : & encore a-t-on vu fort ſouvent des Vaiſſeaux fort mauvais ſortir des mains d'Ingenieurs dont on devoit attendre des ouvrages de la plus grande perfection, & cela pour avoir exécuté leurs Vaiſſeaux d'après leur ſeule ſpéculation, ſans ſoumettre leur plan à un calcul rigoureux.

On trouvera dans cet Ouvrage tous les ſecours qu'on peut deſirer pour la connoiſſance parfaite des grands objets que préſentent la Conſtruction & la Manœuvre des Vaiſſeaux. Aucune des théories données juſqu'ici n'a fourni des réſultats auſſi conformes à l'expérience : & on peut même dire, que dans un

Digitized by Google

très-grand nombre de cas elles en ſont tout à fait éloignées.

Ceux des Géometres qui ne prennent pas un intérêt direct aux progrès de la Science Navale, trouveront cependant dans cet Ouvrage une foule d'objets qui aſſurément les intéreſſeront. La Science du mouvement des corps ſolides & des fluides y eſt préſentée d'une maniere abſolument nouvelle : la théorie du frottement & de la percuſſion des corps n'avoit point encore été enviſagée ſous ce point de vue, du moins cela n'eſt pas venu à notre connoiſſance. Ainſi l'EXAMEN MARITIME peut être regardé comme un Ouvrage qui contient une foule d'objets de Méchanique générale tout à fait nouveaux.

Quant aux Lecteurs qui par état ſont obligés d'avoir recours à ces ſortes d'ouvrages, ſans cependant avoir les connoiſſances de Géometrie & de Calcul que ces lectures exigent, nous leur conſeillons de ſe contenter de la lecture du Livre cinquieme du ſecond Volume : parce que ce Livre contient en abrégé, & ſans aucun calcul, tous les réſultats du reſte de l'Ouvrage, les maximes ou regles de pratique qui en découlent, & l'on a eu ſoin d'indiquer par des renvois les endroits où la théorie rigoureuſe a été traitée.

C'eſt dans la vue d'être de quelque utilité aux progrès d'une Science que nous cultivons encore plus par goût que par état, que nous avons entrepris l'Ouvrage que nous publions aujourd'hui, & pour payer à la Société le tribut que tout Citoyen lui doit dans l'état où il eſt placé. Afin de rendre cet Ouvrage plus utile, nous nous ſommes permis d'y faire quelques corrections & quelques additions : nous avons développé les idées qui ne nous ont pas paru préſentées avec aſſez de clarté : nous avons corrigé quelques calculs, & en avons ſouvent indiqué l'eſprit. Mais pour éviter tout reproche, nous avons preſque toujours indiqué nos changements dans les notes, afin de conſerver le Texte dans l'état où l'Auteur l'a jugé digne de l'impreſſion.

Digitized by Google

DISCOURS PRÉLIMINAIRE.

L'INSTRUCTION du Navigateur, si nous en exceptons le petit nombre de principes simples & élémentaires sur lesquels la Science du Pilotage est fondée, a toujours consisté, jusqu'à ces derniers temps, dans les seules connoissances que la pratique & l'expérience peuvent fournir. La Construction des Vaisseaux & des autres Bâtiments a toujours été confiée à des hommes qui n'étoient gueres que de simples Charpentiers; & la Manœuvre, qui est l'art de donner au Vaisseau tous les mouvements nécessaires, & de lui faire exécuter toutes les évolutions dont on peut avoir besoin, a été pareillement abandonnée à la routine la plus destituée de principes. On ne croyoit pas même que ces deux branches de la Science du Marin eussent quelque rapport avec les Mathématiques, bien loin de penser qu'elles dépendoient uniquement de la Méchanique, qui est peut-être la plus difficile & la plus compliquée de toutes les Sciences. Mais il n'y a rien dans tout ceci qui doive étonner; l'Homme de Mer, environné de dangers, occupé tout entier de la pratique, excédé des travaux & des fatigues que son état exige, ne trouve point le repos ni la disposition d'esprit nécessaires pour une étude aussi étendue & aussi pénible; le Sçavant, qui a besoin d'une grande tranquillité pour ses méditations, ne cherche point à s'exposer aux fatigues extrêmes, aux inquiétudes & aux risques dans lesquels l'autre passe sa vie. L'expérience est cependant un grand maître dont on apprend avec facilité des choses qu'il eût été presque impossible de découvrir par la seule théorie. La difficulté de réunir les lumieres de la théorie à celles de l'expérience, en quoi consiste cependant

Digitized by Google

la perfection d'une Science si importante, est cause qu'elle est restée pendant tant de siecles dans les ténebres : mais comme, dans le siecle présent, les Mathématiques ont fait des progrès étonnants, & ont été introduites, avec un avantage singulier, dans presque tous les Arts & dans toutes les Sciences, il eût été contre l'ordre que la Marine n'eût pas joui du même avantage, ou au moins qu'on n'eût pas donné naissance à la perfection dont elle est susceptible, & dont elle jouira sans doute par la suite.

Dès l'année 1673, le *Pere Pardies* avoit donné son Traité de Statique, ou de la Science des Forces Mouvantes, dans lequel on trouve, sous forme d'exemple, une détermination de la route que doit suivre un Vaisseau poussé par un vent latéral. Ce premier essai auroit pu servir de guide pour s'avancer davantage dans une matiere si abondante; néanmoins cette Science ne fit aucun progrès jusqu'à l'année 1689, où le *Chevalier Renau* donna un Ouvrage *in-8°.* intitulé, *de la Théorie de la Manœuvre des Vaisseaux.* Il suivit le sentier que lui avoit ouvert le *P. Pardies*; tous deux conviennent en ce que le chemin direct du Vaisseau est moindre que celui qu'il feroit, s'il divisoit le fluide avec la même facilité par toutes ses parties, dans la raison du rayon au sinus de l'angle que forme la voile avec la quille; & que le chemin latéral est aussi moindre que ce même chemin, dans la raison composée de celle du rayon au cosinus du même angle, & de celle de la résistance du côté à celle de la proue. Mais, par malheur, le *Chevalier Renau* admettoit que les résistances étoient comme les quarrés des vîtesses des fluides, & comme les quarrés des sinus de leur incidence sur les surfaces qu'ils choquent : principe qui alors étoit reçu, presque sans la moindre répugnance, par les Géometres les plus célebres, & qui n'a pas même cessé de l'être jusqu'à présent. Ceci donna lieu au célebre Hollandais *Chrétien Huygens* d'exposer dans la *Bibliotheque universelle & historique*, (année 1693.) les contradictions dans lesquelles étoit tombé le *Chevalier Renau.* Il lui fit voir que, selon ses principes, les vîtesses directes du

Digitized by Google

Vaiſſeau devoient être beaucoup plus grandes, & que l'angle qu'il aſſignoit aux voiles, comme le plus avantageux pour gagner au vent, n'étoit pas tel qu'on le déduiſoit légitimement. M. *Renau* défendit ſon opinion, (*Journal des Sçavants*, 1695) fondé ſur le principe inconteſtable de la décompoſition des forces; & comme *Huygens* ne répondit pas d'une maniere ſatisfaiſante à ſes arguments, il y eut, de part & d'autre, différentes répliques, ſans qu'il fût poſſible d'arriver à une concluſion, & de connoître de quel côté étoit la vérité. Cependant la diſpute ceſſa; & lorſque, par cette raiſon, M. *Renau* ſe croyoit plus aſſuré de ſon opinion, il parut un Mémoire dans les *Actes de Leipſic* du mois de Juillet 1696, par *Jacques Bernoulli*, Profeſſeur de Mathématiques à *Groningue*, dans lequel ce Sçavant admettoit l'opinion de *Huygens*, à quelques modifications près. Le point où il s'en écarta, fut en ne ſuppoſant pas la viteſſe du vent comme infinie à l'égard de celle du Vaiſſeau; erreur dans laquelle étoient tombés les deux autres; & c'eſt pour cela que ſes réſultats ſont en partie différents de ceux de *Huygens*. Le Chevalier, provoqué par cette nouvelle attaque, mit au jour un Ouvrage intitulé, *Mémoire où eſt démontré un principe de la Méchanique des liqueurs, dont on s'eſt ſervi dans la Théorie de la Manœuvre des Vaiſſeaux, & qui a été conteſté par M. Huygens*; mais il ſe réduit à ſoutenir ſa propoſition ſur la décompoſition du mouvement, ſans ſatisfaire à la tâche que lui avoit impoſée *Huygens*. *Jean Bernoulli*, frere de celui dont nous venons de parler, Profeſſeur de Mathématiques à *Baſle*, ſe déclara d'abord pour l'opinion du Chevalier; mais enſuite, ayant apporté plus d'attention à cet objet, il adopta le ſentiment de *Huygens*, & publia en 1714 un Livre intitulé, *Eſſai d'une nouvelle Théorie de la Manœuvre des Vaiſſeaux*, après l'avoir ſoumis à la cenſure de l'Académie Royale des Sciences de *Paris*. La ſublime Géométrie de l'Auteur, fit qu'il étendit ſes calculs beaucoup plus loin qu'on ne l'avoit fait juſqu'alors; & la diſpute, entre MM. *Renau* & *Huygens*, demeura décidée, ſuivant l'avis général des Sçavants;

Digitized by Google

parce que non-seulement il se déclara en faveur des vitesses trouvées par *Huygens*, mais encore, parce qu'ayant tracé la *courbe déterminatrice des vitesses*, il ajouta à ce sujet : *Elle décide par conséquent la controverse en sa faveur, contre la prétention de M. Renau.* *Jean Bernoulli* ne voulut cependant pas limiter les vitesses du vent, comme l'avoit fait son frere, d'après des réflexions très-fondées : c'est pour cela qu'il ne put déterminer celles des Vaisseaux avec la même exactitude. Il fit cependant attention à l'obliquité avec laquelle le vent frappe la voile, ce que son frere avoit omis; & en examinant l'équation donnée par *Huygens*, pour trouver l'angle que doit former la voile avec la direction du vent, pour gagner au vent le plus qu'il est possible, étant donné celui qu'elle forme avec la quille, il parvient non-seulement à la même formule que *Huygens*, mais il le blâme d'avoir, pour ainsi dire, fait mystere du calcul. Il cherche ensuite l'angle que doit former la voile avec la quille, pour se procurer le même avantage, celui qu'elle forme avec le vent, étant supposé connu; & l'ayant trouvé, il traite de la maniere de réunir les plus avantageux de ces deux angles, qui est un objet encore plus intéressant; car puisque pour chaque angle donné de la quille avec la voile, il y en a un de la voile avec le vent qui est le plus avantageux, on peut chercher le cas, dans lequel tous les deux feront en même-temps les plus avantageux, & donneront par conséquent la plus grande marche. Il résout cette question avec la même adresse; mais cette solution, ainsi que toutes les autres, est fondée sur la supposition, que la vitesse du vent est infinie & la dérive nulle : supposition bien éloignée de ce qui arrive réellement dans la pratique.

Les trois premiers Auteurs établirent leurs calculs sur l'hypothese, que le Navire est un rectangle dont les moindres côtés représentent la poupe & la proue; mais *Jean Bernoulli* s'avança jusqu'à le supposer formé d'un rhombe, d'un rhomboïde, & même de segments circulaires. En effet ayant remarqué que tout le calcul

Digitized by Google

dépendoit des suppositions rélatives aux résistances, & que les resistances dépendoient de la figure de la carêne du Navire, il ne put s'empêcher d'entrer dans ces détails, & il blâma *Huygens* d'être convenu que la dérive assignée par le *Chevalier Renau*, seroit effectivement la véritable, si les résistances des fluides étoient comme les simples viteſſes, & non comme leurs quarrés. Il s'occupa aussi de l'examen des différentes résistances, particuliérement de celles des segments circulaires; & il donna le nom d'axe des résistances à la ligne qui divise en deux parties égales les efforts des eaux dans toute la longueur du Navire, de la proue à la poupe. Ceci lui donna lieu de penser que le mât étant posé dans cette ligne, la force de la voile s'opposeroit directement à celle des eaux, & qu'on obtiendroit un manege parfait. Cette idée lui parut si importante, qu'il dit à son sujet: *Je m'étonne que ni M. Renau, ni M. Huygens, n'aient point songé à cette queſtion, qui paroît pourtant aſſez eſſentielle à la Théorie de la Manœuvre des Vaiſſeaux.* En effet, cette détermination & toutes les autres que produisit ce grand homme, auroient été, sans doute, de la plus grande utilité, si les profondes connoissances qu'il possédoit en Géométrie avoient été accompagnées de quelque pratique.

Un Ouvrage aussi étendu, & aussi rigoureusement calculé que celui dont nous venons de parler, dans lequel l'Auteur, outre ce que nous avons dit, se livra encore à l'examen de la courbure des Voiles, de leurs forces, & de l'axe où l'on peut supposer ces forces reunies, qu'il nomma *Ligne de la Force Mouvante*; un tel Ouvrage, dis-je, paroissoit devoir mettre fin à toute dispute: cependant le *Chevalier Renau* ne voulut pas se donner pour vaincu. Il répliqua de nouveau, s'appuyant toujours sur le principe de la décomposition des forces, & argumenta de maniere que *Bernoulli*, malgré sa sublime Géométrie, ne put le satisfaire qu'en lui disant, que les loix de la décomposition des mouvements, ne sont pas les mêmes, lorsqu'ils se font dans les fluides,

Digitized by Google

que lorſqu'ils ſe font dans le vuide. Ces abſurdités ſont la ſuite e néceſſaire des principes erronnés qu'on avoit aveuglément adoptés ; mais enfin, le *Chevalier* céda, plus par prudence, ou par le reſpect dû à l'autorité de *Bernoulli*, que par une conviction parfaite ſur ces objets.

Pendant tous ces débats, M. *Parent*, de l'Académie Royale des Sciences de Paris, donna au Public, (année 1713,) ſon Ouvrage intitulé, *Eſſais & Recherches de Mathématiques, & de Phyſique*, dans lequel, (*Tom.* 2, pag. 741,) on trouve cette propoſition : *De la ſituation, route & viteſſe d'une figure plane quelconque tirée dans un fluide.* Les principes ſur leſquels cet Auteur fonde ſon calcul ne different pas de ceux de *Jacques Bernoulli* : mais cependant, faute d'avoir fait l'attention convenable à d'autres principes de méchanique très-néceſſaires, il n'obtint pas les mêmes réſultats que ce célebre Auteur.

Avant tout ceci, (année 1697), avoit paru un Ouvrage *in-folio* beaucoup plus étendu, par le Pere *Paul Hoſte*, Jéſuite, Profeſſeur de Mathématiques dans le Séminaire Royal de *Toulon*, intitulé, *Théorie de la Conſtruction des Vaiſſeaux* ; cet Ouvrage eſt très-connu dans la Marine, parce qu'il accompagne, & ſert de ſuite à un autre Ouvrage du même Auteur, intitulé, *l'Art des Armées Navales*, qui a beaucoup de célebrité : c'eſt pour cela que nous ne pouvons nous diſpenſer d'en dire un mot. Le *P. Hoſte* s'efforce, dans ce livre, d'établir en principe, que les réſiſtances des fluides ſur les ſuperficies qu'ils choquent, ne ſont que comme les ſimples viteſſes, & comme les ſimples ſinus des angles d'incidence. Quoique ceci ſoit la premiere choſe que pluſieurs Géometres lui reprochent, on verra cependant dans la ſuite de cet Ouvrage, que les erreurs dans leſquelles cet Auteur eſt tombé, tant ſur les réſiſtances, que ſur la force du Navire pour porter la voile, les roulis, les tangages, & autres mouvements, viennent plutôt de ce qu'il ignoroit pluſieurs principes eſſentiels de Méchanique, que de ce qu'il admettoit ce principe prétendu faux. Nous pourrions citer ici pluſieurs paſſages de cet Ouvrage, pour

prouver ce que nous venons de dire : mais ce seroit nous arrêter sans utilité, ce que nous avons dit étant suffisant, pour que le Lecteur sçache le mérite qu'il doit lui assigner.

Après les Ouvrages dont nous venons de parler, on ne vit paroître, pendant un certain temps, que quelques productions de pure pratique. Aucun principe fondamental ne précede & dirige les regles que ces Auteurs exposent; un jugement sain & droit, mais sans culture, est leur seul guide, pour perfectionner, ou corriger; aussi il leur arrive très-souvent de tomber dans des erreurs plus préjudiciables que celles qu'ils veulent éviter. La sublime théorie des *Bernoulli*, peu, ou même point du tout, appliquable à la pratique, ne produisit que l'Ouvrage de M. *Pitot*, de l'Académie Royale des Sciences de Paris, publié l'année 1731, intitulé, *la Théorie de la Manœuvre des Vaisseaux, réduite en Pratique.* Cet Auteur rappelle les principes établis dans la théorie des *Bernoulli*, & d'après ces principes il donne des tables des angles que doivent former les voiles; mais outre les erreurs théoriques que contient cet Ouvrage, M. *Pitot* manquoit entiérement de pratique, ce qui lui fit porter des jugements purement arbitraires, sur les effets de la mer, & les opérations des marins, en leur attribuant des faits qui n'ont jamais eu lieu.

Quatre années auparavant, M. *Bouguer*, alors Professeur d'Hydrographie au *Havre de Grace*, avoit donné un Ouvrage intitulé, *de la Mâture des Vaisseaux*, qui mérita le prix de l'Académie Royale des Sciences de Paris, année 1727. Cet Ouvrage dans lequel brillent particuliérement la Géométrie & le calcul, se termine par des regles très-peu conformes aux vues de son Auteur, & qui sont absolument impraticables. Ses idées étoient de pouvoir appliquer aux Vaisseaux des voiles beaucoup plus grandes que celles qu'ils portent actuellement, afin d'augmenter leur marche, sans qu'ils risquent de subir de grandes inclinaisons; mais malheureusement cet avantage ne s'obtient que dans le cas unique, où l'on a vent en poupe : dans tous les autres cas, encore que

Digitized by Google

l'Auteur reconnoiſſe, lui-même, l'impoſſibilité de faire uſage de ce qu'il propoſe, il exige pourtant que les voiles s'abaiſſent & s'élargiſſent, de maniere qu'elles aient deux ou deux fois & demi la largeur quelles ont aujourd'hui. Par cette pratique, les voiles & les vergues ſeroient continuellement noyées ſous l'eau, puiſque cela arrive même, quelquefois, dans l'état actuel des choſes. Outre pluſieurs inconvénients qui tiennent à la maniere d'aſſujettir & d'orienter une voilure auſſi étendue, on verra dans la ſuite de cet Ouvrage, qu'il ſeroit preſque, pour ne pas dire abſolument, impoſſible, que le Vaiſſeau gouvernât avec un tel appareil. Cette conſidération eſt échappée à l'Auteur, malgré l'étendue de ſes connoiſſances, & la ſagacité qui lui étoit ſi naturelle, parce que ce ſont des choſes que la pratique ſeule peut apprendre, & qu'on trouveroit très-difficilement ſans elle.

Dans l'Ouvrage célebre intitulé, *A Treatiſe of Fluxions*, que publia en 1742 le ſçavant *Colin MacLaurin*, Profeſſeur de Mathématiques dans l'Univerſité d'Edimbourg, & Membre de la Société Royale de *Londres*, on trouve (*Tome II*, §. 922) la ſolution du problême concernant les angles que doivent former les voiles avec la quille & avec le vent. Cette ſolution eſt vraiment digne du grand homme qui l'a produite; elle eſt d'accord avec celle donnée par *Jean Bernoulli*; mais les principes ſur leſquels elle eſt fondée, ſont que la viteſſe du vent eſt infinie à l'égard de celle du vaiſſeau, & que la dérive eſt nulle, comme l'avoit ſuppoſé ce dernier. Sans cela, & ſans les faux principes qu'il admet ſur les réſiſtances, comme on le verra par la ſuite, nous aurions eu la ſolution rigoureuſe de ce problême, qui eſt tant deſirée.

Tous ces Ouvrages ſe réduiſent cependant à un nombre limité de propoſitions détachées; il nous en manquoit la récapitulation, la correction de celles qui étoient erronnées, & l'addition de beaucoup d'autres abſolument nouvelles. Cet Ouvrage reſta pour M. *Bouguer*, le même qui nous donna, dans l'année 1727, le Traité *de la Mâture des Vaiſſeaux*. Il publia donc, en 1746, ſon ſecond Ouvrage

Ouvrage sur la Marine, intitulé, *Traité du Navire, de sa Construction & de ses Mouvements.* L'étendue de cet Ouvrage, l'examen particulier & détaillé de tous les objets qui concernent le grand Art qu'il traite, &, la simplicité élégante des solutions géométriques qui y sont très-heureusement appliquées, & rendues, pour ainsi dire, à la portée des commençants, lui donnerent dans l'Europe toute la célébrité qu'il méritoit. Il est certain que cet Auteur, si justement célebre, ne nous auroit rien laissé à desirer, s'il avoit joint à ses connoissances la pratique nécessaire pour découvrir la fausseté des suppositions que fait la théorie. Son zele & sa constance infatigables dans une tâche aussi pénible, étoient précisément ce qui nous auroit produit un Ouvrage parfait. Nous ne nous arrêterons pas à rappeller ici ce qui sera toujours essentiel dans l'Ouvrage de M. *Bouguer*, ni ce qu'il contient d'évidemment défectueux, parce que nous citons, dans le cours de cet Ouvrage, les endroits les plus remarquables, omettant ceux qui paroissent d'une moindre importance, pour ne pas trop retarder notre marche.

Enfin, dans l'année 1749, *Léonard Euler*, Directeur de l'Académie Royale de *Berlin*, donna son grand Ouvrage intitulé, *Scientia Navalis; seu Tractatus de construendis ac dirigendis Navibus.* L'ordre singulier & la sublime géométrie avec lesquels ce grand homme traite toutes les matieres qu'il embrasse, sont vraiment dignes d'admiration. Cet Ouvrage eût été véritablement un trésor pour les Sciences en général, & pour la Marine en particulier, si des connoissances aussi profondes eussent été accompagnées de la pratique & de l'expérience que nous aurions également desirées dans M. *Bouguer.* Quoi qu'il en soit, ses solutions sont les meilleurs guides pour tout ce qu'on peut proposer & offrir de nouveau, ce qui n'est pas un foible avantage. Depuis ces grands Ouvrages, on a vu paroître de temps en temps quelques productions peu considérables, les unes sur la théorie, & les autres sur la pratique; mais nous pouvons assurer que ce qui ne se trouve pas dans ces deux célebres Auteurs, n'est pas des principaux objets que présente la théorie de la Marine.

Digitized by Google

Ce ſont ces Ouvrages qui nous ont ſervi de bouſſole dans la partie ſcientifique de la Marine : d'un autre côté la pratique ne nous a pas été un maître moins ſecourable, particuliérement lorſqu'après avoir bien obſervé les faits qu'elle préſente, & les avoir dégagés des accidents qui peuvent les modifier & les rendre variables, ils ne ſe trouvent pas conformes à ceux qu'exige la théorie. Dans ce cas, il n'y a perſonne qui ne penſe qu'il ne ſe ſoit gliſſé quelques ſuppoſitions erronnées dans les principes de la théorie, défaut qu'il eſt néceſſaire de chercher & de corriger ; car la pratique & la théorie ne doivent jamais différer dans leurs réſultats ; lorſqu'elles ne ſont pas d'accord, une des deux au moins eſt vicieuſe, c'eſt-à-dire, que la théorie porte ſur quelque principe faux ou mal entendu, ou bien que les faits de la pratique n'ont pas été examinés avec toute l'attention & le diſcernement néceſſaires. On rencontre pluſieurs exemples de cette eſpece parmi les principaux objets de la Science Nautique, malgré tous les travaux des Sçavants qui l'ont cultivée, non par le défaut de la Science en elle-même, mais pour n'en avoir pas comparé les réſultats avec ceux de l'expérience.

Un des premiers doutes qui ſe préſenterent à moi dans mes recherches & un des plus intéreſſants, fut ſur la marche du Vaiſſeau. Selon la théorie, (1) le Vaiſſeau, en le ſuppoſant même des meilleurs voiliers, ne peut prendre plus que les $\frac{100}{175}$ de la viteſſe du vent, & cela en naviguant toutes voiles dehors, vent arriere, ou vent largue, deux cas qui paroiſſent indifférents à l'Auteur. (2) La viteſſe du vent eſt tout au plus, ſelon M. *Mariotte*, (*Traité du Mouvement des Eaux*, part. 1, diſc. 3) de 24 pieds par ſecondes ; *c'eſt, dit-il, la viteſſe ordinaire des vents incommodes, & contre leſquels on a peine d'aller.* M. *Clare*, de

(1) M. *Bouguer*, *Traité du Navire*, liv. 3 ſect. 2, chap. 1.

(2) On verra que le Navire marche beaucoup plus vite vent largue, que vent arriere ; & cela en ſe ſervant des mêmes voiles dans les deux cas.

Digitized by Google

la Société Royale de *Londres*, dit la même chose, dans son Traité du *Mouvement des Fluides*, page 261 : & d'après les expériences que j'ai faites moi-même, je suis demeuré convaincu que ce vent est précisément celui qui ne permet qu'avec beaucoup de difficultés de porter toute la voilure. En effet lorsque le vent parvient à avoir seulement 18 ou 20 pieds de vîtesse par seconde, on voit déjà les Vaisseaux, orientés vent largue, obligés de prendre des ris, même de serrer les voiles, dans la crainte de rompre les vergues & les mâts. M. *Mariotte* répete la même chose dans ledit Ouvrage, (part. 2, disc. 3,) *supposant, dit-il, que le vent fasse 24 pieds en une seconde, comme il fait quand il est assez violent à l'ordinaire, mais pourtant bien moins que dans les grandes tempêtes & ouragans.* M. *Guillaume Derham*, de la Société Royale de *Londres*, rapporte, d'après des expériences réitérées, (*Transact. Philos.* N°. 313,) que dans les plus violentes tempêtes, le vent ne parcourt que 66 pieds anglais par seconde, & tout au plus de 70 à 90; il ajoute que quelques-uns ont une vîtesse de 22 pieds par seconde, d'autres en ont une de 44, & d'autres plus, & enfin qu'il y a des vents qui ne parcourent pas un mille par heure : ce qui fait 1 pied $\frac{1}{2}$ par seconde. J'ai trouvé par mes propres expériences que j'ai déjà citées, que les brises d'été qui regnent presque journellement à *Cadix*, parcourent en général 12 pieds par seconde, un peu plus ou un peu moins, ce qui s'accorde très-bien avec les Auteurs que nous venons de nommer : ainsi supposer qu'un Vaisseau puisse porter toute sa voilure, le vent parcourant 24 pieds par seconde, c'est assurément tout ce qu'on peut supposer de plus fort, encore doit-on beaucoup douter que cela soit possible. D'après cette supposition, le Vaisseau ne pouvant prendre, selon la théorie admise jusqu'ici, plus que les $\frac{100}{176}$ de la vîtesse du vent, cela correspondra, dans le cas présent, aux $\frac{100}{176}$ de 24 pieds, ou à 7 pieds $\frac{48}{176}$ par seconde, ce qui répond à 4 milles $\frac{1}{2}$ par heure : je laisse aux Marins à considérer combien ce résultat est éloigné de 9, 10, & 11 milles, qu'un Vaisseau a coutume de faire dans de pareilles circonstances.

Digitized by Google

Prenons le calcul en ſens contraire: ſuppoſons que le Vaiſſeau parcoure 11 milles par heure, comme il les parcourt effectivement, ce qui correſpond à une vîteſſe de 17 pieds $\frac{1}{2}$ par ſeconde, & nous trouverons que pour cela le Vaiſſeau doit parcourir les $\frac{115}{100}$ de 17 pieds $\frac{1}{2}$, ou à-peu-près 58 pieds français, qui équivalent à 62 pieds anglais: enſorte que pour que les Vaiſſeaux parcourent 11 milles par heure, comme ils les parcourent en effet avec tout leur appareil, il eſt preſque néceſſaire d'un ouragan tel que celui obſervé par *Derham*. M. *Bouguer* ſuppoſe dans le calcul dont toutes ces conſéquences ſont tirées, que la denſité de l'air eſt $\frac{1}{770}$ de celle de l'eau; en la prenant de $\frac{1}{1100}$, il ajoute que la vîteſſe du Navire ne ſeroit que les $\frac{100}{115}$ de celle du vent; enſorte que les 4 milles $\frac{1}{2}$ de ſa marche par heure ſe réduiroient alors à 3 milles $\frac{5}{7}$; & le Navire courant en effet 11 milles par heure, la viteſſe du vent devroit être de 77 pieds anglais, ce qui forme une tempête des plus violentes qu'il ſoit poſſible de voir.

Il me parut d'abord que ce défaut de correſpondance entre la théorie & la pratique, pouvoit venir de quelque erreur de calcul; mais ayant calculé de nouvelles formules, comme on le verra dans le Tom. II, Liv. IV, Chap. 1 de cet Ouvrage; elles me ſervirent ſeulement à le confirmer. On trouve de même qu'au plus près du vent, le Vaiſſeau, naviguant avec toutes ſes voiles, ne peut prendre que les $\frac{111}{1000}$ de la vîteſſe du vent; & par conſequent que celui-ci devroit parcourir 77 pieds $\frac{1}{2}$ anglais par ſeconde, pour que le Vaiſſeau parcourût ſeulement 6 milles par heure, comme le font beaucoup de Vaiſſeaux. On voit que ce réſultat eſt encore plus impoſſible que tout ce qu'on a vu ci-deſſus; puiſque, par beaucoup de raiſons, le vaiſſeau ne pourroit pas porter tout ſon appareil avec un vent auſſi violent.

Malgré tout ce qu'on vient de voir, il nous reſtoit encore un autre examen à faire; car toutes les déterminations ci-deſſus ſont fondées ſur la ſuppoſition que le Vaiſſeau, faiſant 11 milles par

Digitized by Google

heure, il les fait par la seule action d'un vent dont la vitesse n'excede pas 24 pieds par seconde ; quantité assignée seulement sur la foi que nous avons donnée aux observations de *Mariotte* & de *Derham*. Il étoit donc nécessaire de voir si cette vitesse ne seroit pas plus grande, ce qui nous approcheroit davantage des déterminations fournies par le calcul. Or l'expérience seule pouvoit éclaircir ce doute ; c'étoit donc elle qu'il falloit consulter.

Pour que le Navire parcoure 11 milles par heure, il faut qu'il ait 17 pieds $\frac{1}{2}$ de vitesse par seconde ; & si le vent qui produit cet effet, n'avoit que 24 pieds de vitesse par seconde, la vitesse du Vaisseau devroit être à-peu-près les $\frac{2}{3}$ de celle du vent, & non le $\frac{1}{2}$, comme on l'a déduit du calcul. C'est donc le rapport de ces deux vîtesses, celle du vent & celle du Vaisseau, qu'il est question de connoître avec exactitude. Pour cela je choisis un Canot, & tandis qu'en y naviguant vent largue, on mesuroit son sillage, on mesuroit à terre la vitesse du vent, en lui abandonnant de petites plumes très-légeres, & en observant, avec une montre à secondes, le chemin qu'elles parcouroient dans un temps donné. Après avoir répété plusieurs fois cette expérience, je reconnus, à mon grand étonnement, que non-seulement on ne peut augmenter les 24 pieds de la vitesse du vent, mais qu'au contraire il faut les diminuer beaucoup. Finalement je trouvai que le Canot alloit presque aussi vite que le vent ; de sorte que le vent parcourant 10 à 11 pieds par seconde, le Canot en parcouroit à-peu-près 10. Ce phénomene paroîtra, sans doute, bien étrange à ceux qui ont cru que la vitesse du vent étoit presque infinie à l'égard de celle du Vaisseau ; mais il n'en est pas moins vrai. On peut répéter journellement cette expérience dans tous les Ports où l'on a la commodité de passer à la voile d'un côté à l'autre, comme dans la Baye de *Cadix*. De cette Ville au *Port-Sainte-Marie*, il y a cinq milles, ou 30400 pieds anglais : le vent étant frais, ou ayant une vitesse de 12 pieds par seconde, les Barques font ce trajet, en courant

Digitized by Google

vent largue, en trois quarts d'heure, ou 2700 secondes ; ce qui, en divisant les 30400 pieds par les 2700 secondes, donne 11 pieds $\frac{7}{27}$ pour la vitesse de la Barque dans une seconde. Delà on voit clairement qu'il ne convient point de supposer plus de 24 pieds de vîtesse au vent, pour que le Vaisseau parcoure 17 pieds $\frac{1}{2}$, particuliérement si on le suppose bon voilier.

D'après tout ce que nous venons de dire, il n'y a plus moyen d'être arrêté dans les conséquences qui se présentent d'elles-mêmes ; il faut nécessairement que la théorie enseignée jusqu'ici soit fausse, ou, pour mieux dire, que les principes ou suppositions sur lesquels elle est fondée, soient erronnés. Ces principes sont que les forces que le vent exerce sur les voiles, de même que celles des eaux sur la carene du Navire, sont comme les surfaces choquées, comme les quarrés des vîtesses, comme les quarrés des sinus des angles d'incidence sous lesquels elles sont choquées, & comme les densités des fluides : à quoi on peut ajouter la supposition des voiles planes, tandis qu'elles ne le sont pas, particuliérement dans le cas d'un vent frais. Cette derniere supposition, bien loin d'être préjudiciable à la théorie, la favorise au contraire, puisque par elle on donne plus de force aux voiles qu'elles n'en ont effectivement, d'où il doit resulter plus de viteſſe pour le Vaisseau, comme on le desire.

Que la force soit comme les densités des fluides, c'est un principe si évident par lui-même, que je ne crois pas qu'il ait jamais été mis en doute par personne. Il paroît qu'il en doit être de même de cet autre principe, qui est que (toutes choses égales d'ailleurs) les forces des fluides doivent suivre la raison des surfaces qu'ils choquent, comme on l'a cru jusqu'ici. Toute l'erreur doit donc tomber sur la supposition que les forces, ou, ce qui est la même chose, que les réſistances des fluides sont dans le rapport des quarrés de leurs vîtesses, & des quarrés des sinus d'incidence. Ce principe, tout suspect qu'il est, est cependant reçu par les premiers Géometres, & par les premiers Physiciens de

Digitized by Google

l'Europe, & généralement adopté par toutes les Académies qui y ſont inſtituées, & qui ſont ſi juſtement célebres. Cette conſidération devoit imprimer le plus grand reſpect, & peut-être même porter à abandonner tout examen de ce principe, ſi nous ne nous voyions pas autoriſés à douter par l'exemple des mêmes Géometres. *Newton* eſt un de ceux qui firent le plus d'efforts pour s'aſſurer d'un principe ſi eſſentiel pour procéder avec certitude dans ſa Théorie des Projectiles. Après beaucoup d'examens théoriques, (*Philoſophia naturalis*, lib. 2.) qui ne ſont, à la vérité, que de pure ſpéculation, & qu'on ne peut regarder comme des demonſtrations géométriques, il crut pouvoir conclure que les réſiſtances des fluides ſuivent la raiſon du quarré des viteſſes. Mais cependant, avant de s'en tenir abſolument à ce principe, & de l'admettre dans ſes démonſtrations, il voulut le confirmer par l'expérience; & pour cela il fit oſciller, dans les fluides, des pendules de différentes matieres & de différentes grandeurs. (1) Le réſultat de ces expériences eſt ſi éloigné de ce qu'il avoit d'abord imaginé, qu'on en concluroit avec plus de préciſion, que les réſiſtances ſont comme les ſimples viteſſes: auſſi ajoute-t-il que ſes expériences méritent peu de confiance, & qu'il ſeroit à deſirer qu'on les répétât.

Léonard Euler, dans ſa *Science Navale*, que nous avons déjà citée, (Chap. 5, Propoſ. 49.) donne un raiſonnement géométrique ſur ce ſujet, dans lequel on trouve toute l'adreſſe & le ſçavoir éminent de ce grand Géometre: ſa concluſion eſt, (2) que la force ou la réſiſtance des fluides eſt égale au double du poids d'une colonne d'eau, dont la baſe eſt la ſurface choquée, & la hauteur, celle d'où il faudroit qu'un corps tombât librement pour acquérir la viteſſe avec laquelle le fluide ſe meut; hauteur qui, comme on le ſçait, eſt comme les quarrés des viteſſes. Mais quelle imperfection l'Auteur n'apperçut-il pas dans cette ſolution, & quel

(1) Voyez le Scolie de la Propoſ. 17, Livre 2, Tome I de cet Ouvrage.
(2) Voyez le même Scolie.

Digitized by Google

embarras ne lui cauſa-t-elle pas, puiſqu'il avoue lui-même que la force ne peut être égale qu'au ſimple poids de la colonne ci-deſſus, & non au double de ce poids? Toute ſa démonſtration eſt fondée ſur la ſuppoſition que lorſqu'un corps ſe meut dans un fluide, il frappe ſeulement la partie du fluide qu'il déplace, ſans faire attention que le fluide déplacé pouſſe celui qui eſt devant lui; que ce dernier pouſſe auſſi celui qui le précede, & ainſi de ſuite, ſans qu'il y ait de terme, ou ſans que nous ſçachions quelle eſt la quantité de fluide qui ſe meut réellement, comme le confeſſe *Newton* lui-même, (*Philoſophia Naturalis*, Liv. II, Scolie de la Propoſ. 35.)

Daniel Bernoulli, dont le nom eſt ſi connu dans la République des Lettres, étend encore davantage ſes calculs, (1) en manifeſtant la différence qui réſulte de ce que les corps ſont ou ne ſont pas élaſtiques. Mais, quoi qu'il en ſoit, la ſolution eſt la même, à cette différence près que la réſiſtance eſt double dans le premier cas de ce qu'elle eſt dans le ſecond: ainſi l'incertitude ſubſiſte toujours. Tout ceci, au reſte, paroîtra moins étrange, ſi on conſidere que dans les théories que nous venons de citer, on ſuppoſe le fluide deſtitué de toute gravité, & par conſéquent que les particules n'exercent aucune preſſion les unes ſur les autres; ce qui n'a lieu ni dans notre air, ni dans nos eaux. Lorſque la viteſſe des corps qui ſe meuvent dans ces fluides n'eſt pas trop grande, leur partie poſtérieure eſt frappée par les particules du fluide, avec la force qui leur demeure de leur gravité; ce que *Newton* avoit auſſi remarqué, & par conſéquent la réſiſtance doit être diminuée. Au contraire, ſi la viteſſe du corps en mouvement eſt très-grande, la gravitation du fluide n'a pas tant lieu, & les particules du fluide n'en peuvent acquérir aſſez de viteſſe pour atteindre & frapper la partie poſtérieure du corps, & la réſiſtance doit être par-là à proportion plus grande. Pluſieurs ont bien reconnu, depuis, cet effet, &

(1) Commentaires de l'Académie de Pétersbourg, mois de Juin & d'Octobre 1727.

ont

Digitized by Google

ont été forcés de convenir que les réſiſtances des fluides que nous connoiſſons, (1) ne peuvent ſuivre régulièrement les loix que nos théories leur aſſignent.

Nous ne devons donc pas être étonnés ſi la viteſſe calculée pour celle que devroient prendre les Vaiſſeaux, eſt ſi éloignée de celle qu'ils prennent effectivement : cela devoit arriver néceſſairement, puiſque les ſuppoſitions ſur leſquelles on s'eſt fondé, ſont fauſſes. Mais cette conſéquence n'eſt pas encore la plus fâcheuſe : ſi le réſultat du calcul pour déterminer la viteſſe du Navire, eſt ſi conſidérablement éloigné de la vérité, quelle confiance pouvons-nous avoir dans aucun des autres réſultats fournis par cette théorie, dans les angles que doivent faire les voiles avec le vent, dans ceux du gouvernail & de la dérive, dans les forces des voiles, & les autres actions du Vaiſſeau ? Tout doit être vicieux, ou du moins nous avons tout lieu de le croire. Le ſujet eſt, on ne peut pas plus, intéreſſant, & demande l'examen le plus ſérieux : c'eſt préciſément cet examen que nous nous ſommes propoſés de faire avec tout le ſoin & toute l'attention dont nous ſommes capables, ſans épargner ni travail ni fatigues.

Il étoit néceſſaire de commencer par des expériences certaines qui confirmaſſent nos doutes ſur les réſiſtances, & de chercher enſuite, par des voies différentes, ou en ſuivant celles par leſquelles la nature agit, une autre théorie des mêmes réſiſtances ; & il falloit enfin examiner ſi cette nouvelle théorie étoit d'accord, non-ſeulement avec ce que l'expérience nous apprend ſur la marche du Vaiſſeau, mais encore avec ce qu'elle nous fait voir de tous ſes autres mouvements ; & même avec tous les phénomenes qu'on obſerve dans la nature. L'entrepriſe, quoique difficile, a eu beaucoup plus de ſuccès que je ne l'avois moi-même eſpéré. J'ai trouvé que l'action exercée par l'eau courante contre une ſurface que

(1) Benjamin Robins, de la Société Royale de Londres, *New Principles of Gunnery*, Chap. 2, Prop. 1.

je lui ai exposée, est non-seulement, dans certains cas, quatre fois plus grande que ne l'assigne M. *Mariotte*, (*Traité du Mouvement des Eaux*, Part. 2, Disc. 3.) mais qu'elle est même, dans d'autres circonstances, jusqu'à huit fois plus grande. Ceci ne paroîtra point étonnant, si on considere que l'action du fluide dépend non-seulement de la grandeur de la surface choquée, comme on l'a cru jusqu'ici, mais aussi de la plus grande profondeur à laquelle elle est submergée dans le fluide : ensorte que la même table, ou surface, étant supposée avoir la forme d'un parallélogramme rectangle, éprouvera beaucoup moins de résistance, ayant son plus grand côté horisontal, que lorsque le même côté est vertical. C'est une observation très-importante pour la Marine, & qui jusqu'à présent ne s'est offerte à personne, quoiqu'elle soit une conséquence évidente de la gravitation. En effet, la gravitation agissant dans les résistances, ainsi que nous venons de le dire, comme elle est plus grande à de plus grandes profondeurs, attendu que les colonnes qui agissent sur les particules du fluide, sont plus longues, & par conséquent d'un plus grand poids, il s'ensuit que les résistances doivent aussi être plus grandes à de plus grandes profondeurs. Les différences qui résultent de ce seul fait sont si grandes, que tout ce qu'on a calculé jusqu'à présent, ne pouvoit pas manquer de différer considérablement de la vérité. J'ai observé que lorsque la table avoit une longueur quadruple de sa largeur, la résistance qu'elle éprouvoit, son plus grand côté étant vertical, étoit à-peu-près deux fois plus grande que lorsque le même côté étoit horisontal ; c'est-à-dire, que, dans ce cas, les résistances sont à-peu-près comme les racines quarrées des hauteurs ou profondeurs de la surface dans le fluide. Ainsi, supposant qu'un Navire ait ses dimensions linéaires doubles de celles d'un autre qui lui est semblable, les surfaces choquées du premier seront quadruples de celles du second ; & d'après ce qu'on a enseigné jusqu'à présent, les résistances du premier de ces Navires devroient être à celles du second, comme 4 est à 1 ; mais, selon les

observations dont nous venons de parler, ces réſiſtances ſont en effet à-peu-près comme $5\frac{1}{4}$ eſt à 1 ; différence qui, comme on le voit, mérite bien d'être conſidérée.

Nos expériences ont encore prouvé clairement que les réſiſtances ne ſuivent pas la loi des quarrés des viteſſes, & des quarrés des ſinus des angles d'incidence, mais à-peu-près celle des ſimples viteſſes & des ſimples ſinus d'incidence. C'eſt auſſi ce que les expériences de *Newton* ont manifeſté.

Nous étions donc déjà aſſurés, d'après tout ceci, des défauts de la loi des réſiſtances établie par la théorie ; quoique cette loi ait été généralement reçue, malgré les doutes qu'elle devoit ſuggérer, & qui devoient la rendre ſuſpecte, & malgré la fauſſeté des réſultats que nous avons vus en être la ſuite. Mais cela ne ſuffiſoit pas encore, il falloit trouver une nouvelle théorie, dont les conſéquences fuſſent conformes à l'expérience & à la vérité : ſans cela on ne pouvoit pas l'introduire dans le calcul ; & il paroiſſoit, à la premiere vue, que nous devions avoir des réſultats encore plus éloignés de l'obſervation des faits. Car puiſque les réſiſtances ſont effectivement plus grandes qu'on ne l'avoit penſé, comment peut-il en réſulter de plus grandes viteſſes dans les Vaiſſeaux, ſelon que l'exige la pratique ? Cependant cette objection ſi naturelle s'évanouit bientôt, en conſidérant que ſi les réſiſtances des eaux ſur la proue augmentent, les forces du vent ſur les voiles doivent auſſi augmenter, par la même raiſon : ainſi il n'y a plus lieu d'être arrêté. Ayant tenté de prendre pour fondement de la théorie le rapport entre la viteſſe avec laquelle un fluide jaillit hors d'un vaſe par un orifice, & le poids que ſupporteroit la ſuperficie qui boucheroit cet orifice, tant dans le cas où le fluide ſeroit en repos, que dans celui où il ſeroit en mouvement, comme on le verra très en détail dans le Livre II de ce Volume, on a trouvé la conformité la plus exacte entre les formules déduites de ce rapport, & les réſultats de l'expérience, au moins pour la relation qui regne entre les forces, ſinon dans leur meſure abſolue. Suivant

Digitized by Google

cette nouvelle théorie, les réſiſtances ſont comme les denſités des fluides, comme les ſurfaces choquées, comme les racines quarrées des profondeurs auxquelles elles ſont ſubmergées dans les mêmes fluides; comme les ſimples viteſſes, & comme les ſimples ſinus des angles d'incidence ſous leſquels elles ſont choquées. Cependant ce n'eſt pas encore tout; les réſiſtances ne ſuivent cette loi que dans le cas où la ſuperficie eſt entiérement ſubmergée dans le fluide, & où la partie antérieure du corps eſt ſemblable à ſa partie poſtérieure. Lorſqu'une partie de la ſurface eſt hors du fluide, il y a une nouvelle quantité à conſidérer dans les réſiſtances, qui ne dépend nullement de la ſurface choquée, mais qui provient ſeulement de la viteſſe; & cette quantité n'eſt ni comme les ſimples viteſſes, ni comme leurs quarrés, mais comme leurs quatriemes puiſſances. Dans certains cas il doit encore entrer une troiſieme quantité dans l'expreſſion de la réſiſtance, qui eſt comme les quarrés des viteſſes, & comme les ſurfaces choquées. Cette quantité répond préciſément au cas qu'on a conſidéré juſqu'à préſent. Enfin, il y a d'autres circonſtances où il faut avoir égard à une quatrieme quantité qui ne dépend aucunement des viteſſes, mais ſeulement des ſurfaces choquées. Suivant cette théorie, les réſiſtances dépendent donc de quatre quantités diſtinctes, dont quelques-unes s'évanouiſſent dans certains cas; & heureuſement, dans les recherches qui regardent la Marine, qui ſont celles que nous propoſons, elles ſe réduiſent ordinairement à une ſeule, qui eſt la premiere de celles que nous venons d'énoncer; cependant, dans le cas d'une très-grande viteſſe, on ne peut ſe diſpenſer d'avoir égard à la ſeconde: quant à la troiſieme, qui eſt la ſeule dont on ait tenu compte juſqu'ici, il eſt ordinairement inutile d'y avoir égard.

Ce parfait accord de l'expérience avec la théorie nous établiſſoit, comme on vient de le voir, les fondements de l'édifice; mais il nous reſtoit une inquiétude: la plupart des expériences faites en petit, ne donnent pas, à beaucoup près, les mêmes

Digitized by Google

réſultats que lorſqu'elles ſont faites en grand, parce que dans celles-ci les effets des différents accidents deviennent beaucoup plus ſenſibles ; & c'eſt préciſément ce qui arrivoit dans la comparaiſon des expériences faites juſqu'à préſent, avec les mouvements & les actions du Vaiſſeau. Mais il n'en a pas été de même dans notre théorie ; elle n'a fait que gagner à cette épreuve : car lorſque nous avions tout lieu de craindre de très-grandes différences, à cauſe de l'augmentation que nous avons trouvée dans les réſiſtances ; nous avons eu les réſultats les plus ſatisfaiſants. Cette théorie donne la viteſſe des Navires préciſément telle qu'on l'obſerve journellement, ſoit qu'ils naviguent vent arriere, ſoit qu'ils naviguent vent largue, ou à la bouline. Mais ce qui eſt beaucoup plus fort, c'eſt que cette théorie apprend que non-ſeulement quelques Navires doivent aller vent largue, preſque auſſi vîte que le vent, mais encore que quelques-uns ont une viteſſe qui ſurpaſſe celle du vent : paradoxe que beaucoup de gens trouveront étrange, mais dont cependant on verra la démonſtration, non dans le ſens que l'entendoit *Jean Bernoulli*, (1) c'eſt-à-dire, qu'on pourroit déployer une voilure d'une étendue preſque infinie ; ſuppoſition tout-à-fait chimérique, & qui ne peut s'appliquer à la pratique ; mais en n'employant que ce qui eſt conſacré par les faits, & ce qui arrive journellement dans pluſieurs Bâtiments, tels que les Galeres, les Chebecs, &c. *

(1) Œuvres de *Jean Bernoulli*, Tom. II, N. XCIII.

* Nous ferons obſerver, en paſſant, que cette idée, toute étrange qu'elle puiſſe paroître au premier aſpect, n'eſt pas particuliere à notre Auteur. Pluſieurs Marins ont ſaiſi la poſſibilité qu'un Vaiſſeau pût avoir une viteſſe auſſi grande, & même plus grande que celle du vent. Le celebre Amiral Anſon, dont l'autorité ſeroit ici d'un ſi grand poids, ſi ces matieres pouvoient en admettre, étoit de cette opinion. (Voyez ſon Voyage autour du Monde, *Liv. III Chap. 5.*) On peut même concevoir la vérité de cette propoſition par un raiſonnement fort ſimple. Lorſqu'un Vaiſſeau navigue vent arriere, il eſt clair qu'il ſe ſouſtrait continuellement à l'action du vent, ce qui fait que l'impulſion du vent ſur les voiles, eſt d'autant moindre que le Vaiſſeau a plus de viteſſe : mais ſi le Vaiſſeau eſt orienté vent largue, la route faiſant alors un angle avec la direction du vent, les voiles ne ſe dérobent pas autant à ſon impulſion, puiſque le Vaiſſeau ne la fuit pas directe-

Digitized by Google

Ayant ainſi trouvé les réſiſtances fournies par notre théorie, parfaitement d'accord avec la pratique, non ſeulement dans les petites ſurfaces, mais encore dans les plus grandes que puiſſent avoir les Vaiſſeaux, nous avons jugé à propos de la ſoumettre à une autre épreuve, en l'appliquant à deux autres cas très-différents. Le premier de ces cas conſiſte à déduire des mêmes principes une nouvelle théorie des *Cerf-volants*, autrement nommés *Cometes*, que les enfants prennent tant de plaiſir à élever dans l'air; car, quoique ces machines ſoient uniquement deſtinées à leur amuſement, elles ont été très-propres, dans ce cas, pour ſervir de vérification à un objet auſſi important. C'eſt pour cela qu'on trouvera dans un Appendice, à la fin de ce Volume, tout le calcul relatif à cette théorie. On le compare à celui qui réſulte de l'ancien ſyſtême, afin qu'on connoiſſe la vérité, avec cette évidence qui ne peut laiſſer de doutes.

Le ſecond cas auquel nous avons encore appliqué la théorie,

---

ment. Lorſque la route eſt perpendiculaire à la direction du vent, les voiles & les autres parties du Vaiſſeau qui éprouvent l'impulſion du vent, la reçoivent à-peu-près toute entiere, quelque viteſſe qu'ait le Vaiſſeau. Il eſt donc aiſé de ſentir que puiſque, dans ce cas, l'impulſion du vent ſur les voiles n'eſt preſque pas diminuée par la viteſſe du ſillage, ce choc répeté ſans ceſſe, avec la même énergie, doit imprimer au Vaiſſeau (toutes choſes égales d'ailleurs) une viteſſe beaucoup plus grande que lorſqu'on cingle vent arriere. On doit concevoir, en même temps, que dans certaines diſpoſitions, il eſt poſſible que le Vaiſſeau acquiere une viteſſe égale, ou même plus grande que celle du vent. Nous avons pris, pour exemple, le cas de la perpendicularité de la route avec la direction du vent, afin de rendre notre raiſonnement plus facile à ſaiſir: mais on doit concevoir que cet effet doit dépendre de pluſieurs cauſes dont l'influence doit être très-variable ſuivant l'eſpece des Navires; comme du rapport des réſiſtances du côté, & de la proue, de la quantité de voiles deferlées, de leur ſituation, de leur courbure &c. C'eſt au calcul à combiner tous ces éléments: les bornes étroites de l'eſprit humain ne peuvent permettre d'en apprécier l'influence, avec préciſion, par le ſeul raiſonnement. On verra cette queſtion traitée à fond dans le Tom. II, Liv. 4, Chap. 1 & 2 de cet Ouvrage: il nous ſuffit ici d'avoir fait concevoir d'avance la poſſibilité du cas avancé par *D. Georges Juan*. Nous obſerverons encore que notre raiſonnement explique ce qui eſt dit dans la note 2 de la page 10 de ce Diſcours, & doit faire ſentir en même temps, combien les moulins à vent ordinaires dont les ailes ſe meuvent dans un plan vertical, ſont ſupérieurs à ceux qu'on a imaginés, ou qu'on pourra imaginer par la ſuite, qui ſe mouveroient horiſontalement.

Digitized by Google

eſt aux expériences faites par M. *J. Smeaton*, avec une machine de ſon invention, pour déterminer la force avec laquelle l'eau agit ſur les roues qu'elle fait tourner, telles que les roues des Moulins. On compare les réſultats de vingt-ſept expériences avec les deux théories, ſçavoir, celle qu'on a ſuivie juſqu'ici, & la nouvelle que nous propoſons. On trouve que toutes les expériences correſpondent exactement avec notre théorie, tandis qu'elles s'écartent entiérement de l'ancienne. Ces réſultats nous ſont d'autant plus favorables, qu'on ne peut avoir aucun doute ſur des expériences qui ne nous appartiennent pas, & qui ont été faites, ſi long-temps auparavant, dans des vues très-différentes, comme on vient de le dire.

Ayant déterminé & corrigé l'erreur du principe, il nous falloit entrer dans l'examen d'une matiere extrêmement étendue, & qui étoit peut-être plus difficile que ſi elle n'avoit été enviſagée par perſonne auparavant; parce qu'ordinairement il faut plus de travail pour corriger un défaut, que pour édifier premiérement l'ouvrage. L'erreur que nous avons vue exiſter dans la détermination des viteſſes, ne ſe bornoit pas là; de toute néceſſité il devoit y en avoir dans la dérive, dans les angles que les voiles doivent former avec la quille & avec le vent, dans la force des voiles à l'égard de la ſtabilité; parce que tous ces éléments dépendent de la relation des réſiſtances, qui eſt ſuſceptible de beaucoup de variations, principalement dans le dernier point, où il eſt queſtion d'équilibrer de plus grands efforts du vent ſur les voiles, avec la réſiſtance qu'éprouve le côté du vaiſſeau, qui eſt la même. La maniere de calculer les réſiſtances devoit auſſi être très-différente, & les corps ſuſceptibles d'éprouver la moindre réſiſtance, très-différents; car une portion de la carene du vaiſſeau, placée proche de la ſurface de l'eau, n'éprouve pas la même réſiſtance qu'une autre portion égale & ſemblablement choquée, placée à une plus grande profondeur.

Mais les articles ſpécifiés ci-deſſus, ne ſont pas encore les ſeuls dans leſquels on ſe trompoit: on trouve également quel-

Digitized by Google

ques erreurs dans ce que l'ancienne théorie nous enſeigne ſur le manege du Vaiſſeau. D'après elle, l'axe des réſiſtances, & celui de la force motrice, doivent coïncider pour équilibrer le Vaiſſeau, & obtenir un manege parfait; cependant dans la pratique, lorſque le Vaiſſeau marche, toutes voiles dehors, l'axe des réſiſtances eſt à-peu-près d'un ſeptieme de toute la longueur du Vaiſſeau, plus à la poupe que celui de la force motrice; & par conſéquent, d'après ce qui a été enſeigné, le Vaiſſeau devroit arriver continuellement, & avec une grande force : mais on voit le contraire, les Vaiſſeaux ont plus de propenſion à venir au vent, ſur-tout lorſqu'il vente bon frais. Il eſt donc néceſſaire qu'il y ait encore, à cet égard, quelque vice dans la théorie, ou qu'on ait omis quelques conſidérations très-eſſentielles. En effet, on en rencontre deux de cette nature, qui ont été entiérement négligées; on n'a eu aucun égard à la courbure de la voile qui porte l'axe de la force motrice beaucoup plus vers la poupe, & on n'a point conſidéré l'inclinaiſon du Vaiſſeau qui porte encore cet axe beaucoup davantage du même côté. Si ces changements dans la ſituation de l'axe de la force motrice étoient conſtants, il n'y auroit cependant pas beaucoup à corriger dans ce qu'on a enſeigné, on pourroit même s'y arrêter ſans beaucoup d'inconvenients; mais ces changements ſont variables, ils dépendent de la force du vent, de la figure des voiles, & de la ſtabilité du Navire, ou de ſa force pour porter la voile. Si on avoit placé la mâture conformément à ce qui nous a été enſeigné; il eut été impoſſible que le Vaiſſeau gouvernât, & l'inconvénient eût été beaucoup plus grand encore, ſi on avoit employé les proportions que M. *Bouguer* à prétendu qu'on devoit donner à la mâture.

Les roulis & les tangages ne ſont pas les points où l'ancienne théorie eſt le moins fautive; dans cette théorie le Vaiſſeau eſt conſidéré comme un pendule qui n'a pas d'autre action que celle qui réſulte d'un mouvement d'oſcillation: & d'après cette idée,

on

Digitized by Google

on conclut que tous les roulis & les tangages doivent se faire dans le même temps. On ne voit pas dans cette hypothese, que les roulis aient aucune relation avec l'action de la lame, qui en est cependant la véritable cause : & quoiqu'on puisse croire que la théorie se rapporte seulement aux seconds ou troisiemes roulis, qu'on peut regarder comme n'étant plus soumis à l'action de la lame, peut-on douter que les premiers ne soient d'un plus grand effet, & qu'il ne soit, par cette raison, plus important d'en connoître la nature ? Il est évident que cette théorie n'est nullement d'accord avec les faits, pour ce qui concerne les premiers roulis, parce que tous ces balancements s'exécutent nécessairement dans le temps que la lame emploie à faire son passage sous le Vaisseau ; & la durée de ce passage est, on ne peut pas plus, inconstante, puisqu'elle dépend de la grandeur des lames. Il faut convenir qu'on ne peut être trop étonné qu'on ait pu admettre, aussi long-temps & aussi généralement, de semblables erreurs. On n'a nullement considéré, dans ces mouvements, les effets des lames, ou des coups de mer, & il paroît que ces calculs n'ont été proposés que pour des mers enchantées, & non pour celles qui passent par-dessus les Vaisseaux, qui les inondent, & qui les font périr. Un Bâtiment s'éleve avec plus de facilité sur la lame qu'un autre : qui est-ce qui doutera que celui-ci ne soit plus exposé à être inondé, & que le premier ne coure plus le risque de rompre sa mâture ? Il n'est donc pas seulement nécessaire de considérer le temps dans lequel le roulis s'exécute, mais il faut encore examiner sa grandeur, & l'élevation des eaux sur le côté du Vaisseau. Les proues aiguës, ou de moindre résistance, que les Géometres ont tant desirées, seroient exposées à ces accidents ; elles seroient continuellement submergées, & non-seulement elles feroient courir les risques d'un naufrage, mais encore elles ne produiroient aucun gain pour la marche qui est l'unique objet qu'on a eu ordinairement en vue ; car les résistances croîtroient à mesure que ces proues se submergeroient & s'inonderoient davantage, par le choc répété des lames.

Digitized by Google

Nous avons fait enſorte que notre théorie fût exempte de toutes les erreurs que nous avons rapportées ci-deſſus, & de quelques-autres que nous nous diſpenſerons d'indiquer, pour ne pas trop nous arrêter; mais pour l'expoſer avec clarté, nous avions beſoin de beaucoup de principes ſur la Méchanique, particuliérement ſur l'action & le mouvement des fluides. Nous avons donc penſé qu'il convenoit de les expoſer dès le commencement de notre Ouvrage, & d'y renfermer également ce qui conduit à la théorie des machines ſimples & compoſées, à celle de leurs frottements, & à la connoiſſance des loix du choc des corps, & de leurs autres actions. Tous ces objets conviennent à la Marine, & conduiſent directement à la réſolution de toutes les queſtions embarraſſantes que cette Science préſente, & qu'on verra traitées dans cet Ouvrage, que nous avons diſtribué dans l'ordre qui ſuit.

Le premier Volume eſt diviſé en deux Livres, dont le premier contient neuf Chapitres. Le Chapitre premier traite des définitions, axiomes, ou loix du mouvement, avec les principes déduits de l'expérience ſur l'action de la gravité. Le Chapitre II traite de la compoſition & décompoſition du mouvement & des forces agiſſantes. Le Chapitre III contient tout ce qui a rapport au centre de gravité, ou des maſſes, & à celui des puiſſances, ou des forces : on donne les formules de leurs viteſſes, des eſpaces qu'ils parcourent, & des temps qu'ils emploient à les parcourir. Le Chapitre IV traite de la rotation d'un ſyſtême quelconque de corps libres, ou liés entre eux; de l'angle giratoire ou de rotation qu'ils prennent en vertu de puiſſances quelconques qui agiroient ſur le ſyſtême. On y démontre que la rotation du ſyſtême ſe fera de la même maniere, ſoit qu'on ſuppoſe ſon centre de gravité fixe, ſoit qu'on le ſuppoſe libre; & on fait voir, en même temps, que ce centre doit ſe tenir le plus bas qu'il eſt poſſible, dans quelque corps, ou machine que ce ſoit. On ajoute comme une conſéquence de cette théorie, celle des pendules, & des leviers des trois genres, en ne les conſidérant pas ſeulement dans l'état de repos, comme on

Digitized by Google

l'a toujours fait, mais dans celui de mouvement ; & on examine leurs forces & les réſiſtances qu'ils doivent avoir dans leurs fibres & dans toutes leurs parties. On traite, dans le Chapitre V, de l'axe & du rayon de rotation, ou du point ſur lequel tourne un corps ou un ſyſtême de corps ; on y fait voir que ce point ne peut être fixe, à moins qu'il ne ſoit le centre de gravité. Le Chapitre VI renferme toute la théorie de la percuſſion des corps : nous nous ſommes un peu étendus ſur cette matiere, tant à cauſe qu'elle eſt le principe des Chapitres ſuivants, que parce qu'il étoit intéreſſant d'éclaircir un ſujet qui a fait naître tant de diſputes parmi les Auteurs les plus reſpectables ; & particuliérement la queſtion des forces vives & des forces mortes. On donne des formules pour trouver les temps, les viteſſes, les actions & les eſpaces parcourus par les corps dans l'acte du choc, & pour trouver de même les forces avec leſquelles ils agiſſent dans un inſtant quelconque. On applique les ſolutions à la pratique, & aux expériences faites par les Auteurs de Phyſique Expérimentale, afin de faire voir l'accord de la théorie avec l'expérience, & les effets ſurprenants du choc. On termine ce Chapitre en mettant dans le plus grand jour l'erreur où ſont tombés pluſieurs Auteurs célebres, en confondant les centres d'oſcillation & de percuſſion ; car quoique ces centres coïncident en certains cas, ils ne ſont cependant pas toujours les mêmes.

Le Chapitre VII contient le mouvement des corps ſur des plans inclinés, ou ſur des ſurfaces courbes : on détermine le temps de leur chûte par la cycloïde, & on en fait l'application aux pendules. On calcule la durée de leurs oſcillations, & l'eſpace que parcourent les corps, qui tombent librement, pendant la durée d'une oſcillation. On termine ce Chapitre par l'examen du mouvement des corps, dans les cas où ils tombent en roulant le long d'un plan incliné, ou d'une ſurface courbe.

On trouve, dans le Chapitre VIII, une nouvelle théorie ſur le frottement ; c'eſt un objet ſur lequel on n'a encore point vu

Digitized by Google

la théorie d'accord avec l'expérience, quoiqu'il ait été traité par les Géometres du premier ordre. On démontre que la force du frottement n'eſt pas ſeulement proportionelle au poids, ou à la preſſion qui le produit, comme l'ont cru MM. *Amontons* & *Bilfinger*. On manifeſte les erreurs qui réſultent de la théorie donnée par le célebre *Léonard Euler*; & on fait voir comment tous les faits ſe concilient avec la nôtre.

Enfin on termine le premier Livre par le Chapitre IX, qui traite des Machines ſimples, ſçavoir, du Plan incliné, du Coin, de la Hache, de la Vis, du Treuil ou Cabeſtan, de la Poulie, & des Mouffles. On donne en détail la théorie de toutes ces Machines, en ayant égard au frottement qu'elles éprouvent, attention qui eſt abſolument néceſſaire pour en déduire leurs véritables forces. On détermine les plus grandes & les petites forces qu'elles puiſſent produire, & on applique le tout à quelques faits de pratique.

Le Livre ſecond eſt un Traité des Fluides. Dans le Chapitre premier on détermine l'action & la force, avec laquelle ils agiſſent ſur les corps dans le cas du repos, & les conditions qui doivent concourir pour que cet état ſubſiſte. Le Chapitre II traite de la force avec laquelle les fluides en mouvement, agiſſent contre une différencielle de ſuperficie, ou contre une ſurface extrêmement petite. On détermine cette force dans tous les cas de mouvement, ſoit horiſontal, vertical, ou oblique, de même que pour toutes les différentes directions & angles d'incidence; & on finit ce Chapitre par l'expoſition des différentes théories que les Géometres les plus célebres ont données ſur cet objet, en faiſant voir les erreurs auxquelles elles ont conduit, étant appliquées aux fluides peſants. Le Chapitre III traite de l'action des mêmes forces ſur les ſuperficies planes: on fait voir les différentes variations qui ont lieu, ſelon que la ſurface ſur laquelle elles agiſſent, eſt entiérement ſubmergée dans le fluide, ou ne l'eſt qu'en partie, à cauſe de la dénivellation du fluide qui a lieu dans ce cas, & d'où réſultent

Digitized by Google

ces variations. On termine ce Chapitre en expliquant une différence qui se trouve entre notre théorie, & ce qui est exposé dans une proposition de la *Philosophie Naturelle* de *Newton*; & on détermine ensuite, dans le Chapitre IV, l'action des mêmes forces des fluides contre des superficies quelconques.

Le Chapitre V traite des résistances horisontales qu'éprouvent les corps mus dans les fluides, & de celles qu'ils éprouvent lorsqu'étant en répos, les fluides se meuvent contre eux; car ces deux cas ne sont point du tout le même, comme on l'a cru jusqu'ici. On combine des expériences pour faire voir combien elles s'accordent avec la relation que la théorie fournit. Il est question, dans le Chapitre VI, des résistances verticales qu'éprouvent également les corps, soit qu'ils se meuvent dans les fluides, soit que les fluides se meuvent contre eux: & l'on fait voir la grande différence qu'il y a entre ces deux cas. On démontre, dans le Chapitre VII, l'altération des résistances occasionnée par les dénivellations des fluides, produites par le mouvement des corps: & on fait voir en quoi les résistances dépendent de la longueur des corps. On traite, dans le Chapitre VIII, des lignes & des surfaces qui éprouvent la plus grande ou la moindre résistance, de même que de celles qui, jouissant de la même propriété, doivent terminer des bases données, ou qui doivent renfermer un corps déterminé; on donne, à la fin de ce Chapitre, une table des abscisses & des ordonnées de la courbe, qui éprouvera la moindre résistance, en comprenant le plus grand espace.

Le Chapitre IX donne les formules qui expriment le rapport entre les temps, les espaces parcourus, & les vitesses des corps qui se meuvent d'un mouvement progressif dans les fluides: on démontre qu'ils ne peuvent parvenir à leur plus grande vitesse, qu'après un temps infini, & après avoir parcouru un espace infini; mais que cependant, après un temps très-court, ils acquierent une vitesse qui ne differe que fort peu de la plus grande; & ce Cha-

Digitized by Google

pitre eſt terminé par la théorie des lames, dont on aſſigne les viteſſes, & les grandeurs. Le Chapitre X traite des moments dont les corps éprouvent l'action dans leur mouvement progreſſif horiſontal, & de la ſtabilité qui réſulte de ces moments, tant dans le cas du repos que dans celui du mouvement. Il eſt queſtion, dans le Chapitre XI, de l'inclinaiſon que prennent les corps, par l'impulſion de puiſſances quelconques : on rapporte les différentes ſolutions que ce même cas préſente, ſelon les figures des mêmes corps; & l'on indique les précautions qu'il eſt eſſentiel de prendre pour éviter les erreurs auxquelles peuvent conduire les formules données juſqu'ici, ſi on ne les conſidere pas dans les ſuppoſitions qu'elles exigent. On éclaircit le tout par des exemples.

Le Chapitre XII contient les formules qui expriment les moments que ſubiſſent les corps dans leur rotation dans les fluides, ſur un axe qui paſſe par leur centre de gravité. Le Chapitre XIII donne les formules des viteſſes angulaires des mêmes corps, & les longueurs des pendules dont les oſcillations ſont iſochrones avec les leurs, ainſi que celles des plus grandes & des plus petites viteſſes qu'ils puiſſent acquérir dans leurs oſcillations. Enfin on termine ce premier Volume par deux Appendices, le premier ſur la théorie des Cometes ou Cerf-volants que les enfants élevent dans l'air; & le ſecond ſur la réſiſtance des fluides dans les machines, afin de confirmer notre théorie des réſiſtances, ſelon que nous l'avons déjà dit.

Le ſecond Volume traite entiérement de la Marine, & eſt diſtribué en cinq Livres. Le premier Livre contient tout ce qui appartient à la connoiſſance & à la conſtruction du Navire. Ce Livre eſt diviſé en ſept Chapitres, dont le premier donne une idée générale des Bâtiments de mer, des propriétés qui leur conviennent, de leur figure, de la maniere de les gouverner, de la diſpoſition & du nombre de leurs mâts & voiles. Le Chapitre II traite de la variété infinie qu'il peut y avoir dans les Bâtiments, & de leur conſtruction, ſelon la pratique la plus ancienne. On expoſe, dans

Digitized by Google

le Chapitre III, la maniere de tracer les plans de ces anciennes conſtructions, ſuivant l'uſage des différentes nations. Le Chapitre IV enſeigne à tracer les plans, ſelon la pratique actuelle des Conſtructeurs Français & Anglais les plus inſtruits par la théorie & l'expérience. On donne, dans le Chapitre V, une méthode nouvelle & géométrique pour décrire ces plans, en formant tous les couples d'une extrémité du navire à l'autre, par des arcs de cercle; on évite, par ce moyen, le grand nombre de tâtonnements qui ſont inévitables par les autres méthodes. Le Chapitre VI donne la maniere de décrire le plan des œuvres mortes, ſuivant les différentes méthodes; & dans le Chapitre VII, qui termine ce Livre, on donne, dans le même détail, la deſcription des ponts.

On examine, dans le Livre II, le corps du Navire, & ſes différents centres, ſes forces, ſes réſiſtances, & ſes moments. Le Chapitre premier traite de la flotaiſon, & de la ligne d'eau du Vaiſſeau, de ſon poids total, & de celui de ſa coque; on donne un exemple de la pratique du calcul; on enſeigne la maniere de faire varier la ligne d'eau, en faiſant un changement dans la forme du Navire. On donne les volumes déplacés par les Vaiſſeaux de différents rangs, & la relation qu'ont ces volumes avec les dimenſions linéaires des capacités, & on fait voir l'erreur où tombent les Conſtructeurs en négligeant de régler l'échantillon des pieces de bois, d'après les proportions réquiſes. On donne auſſi des regles faciles pour déterminer la grandeur des Vaiſſeaux, relativement à l'artillerie & à la variété des autres poids dont ils doivent être chargés, en ayant égard que le tout, même les équipages & les vivres, ſuive, à-peu-près, la raiſon des cubes des dimenſions linéaires; & on finit ce Chapitre, en donnant le rapport que les capacités ont, & doivent avoir, avec le poids total des Vaiſſeaux, y compris leurs munitions, & les autres choſes néceſſaires qui compoſent le total de l'armement. Le Chapitre II traite de la maniere de trouver le centre du volume que le Navire occupe dans le fluide, & la regle qu'on

Digitized by Google

donne eſt éclaircie par un exemple. On explique comment il peut arriver que ce centre varie, non-ſeulement par la variation de la ligne d'eau ou de flotaiſon, mais encore en variant le volume de la carene, dans quelqu'une de ſes parties; & on termine ce Chapitre, en donnant la méthode pour trouver facilement le même centre, dans des Vaiſſeaux ſemblables par leur fond, ayant déterminé d'avance celui d'un ſeul; & cette méthode peut s'appliquer aux cas où il y auroit quelques légeres différences entre ces Vaiſſeaux.

Le Chapitre III enſeigne à trouver la hauteur du Métacentre au-deſſus du centre de volume, & contient un exemple pour faciliter l'intelligence de la méthode. On donne de plus une regle facile pour trouver ce point dans les Vaiſſeaux ſemblables, ou dont la différence eſt petite; & on termine ce Chapitre, en faiſant, pour les inclinaiſons de poupe à proue, le même examen & les mêmes recherches que celles qu'on a faites d'abord pour les inclinaiſons latérales.

Dans le Chapitre IV on enſeigne la maniere de trouver le centre de gravité de la coque, & même du vaiſſeau entier, par le moyen du poids de toutes ſes parties, & de la place qu'elles occupent; & on éclaircit la regle par un exemple. On donne également la maniere de trouver le même centre, par le moyen d'une expérience facile, faite ſur un autre Vaiſſeau, ayant égard enſuite à la différence qu'il pourroit y avoir entre eux; ce qui fournit une petite formule, de laquelle on déduit différents Corollaires, non-ſeulement ſur la variation en hauteur du centre de gravité, mais encore ſur la ſtabilité du Vaiſſeau, ou ſur les inclinaiſons différentes qu'il prend toutes les fois qu'on fait varier ſon volume & ſon poids dans quelques-unes de ſes parties. On applique tout ceci à differents exemples pris ſur d'autres Vaiſſeaux; & l'on démontre finalement l'erreur dans laquelle eſt tombé M. *Bouguer*, en aſſurant que dans les Vaiſſeaux à trois ponts, le Métacentre ne s'éleve que d'un ou deux pieds au-deſſus du centre de gravité.

Le

Digitized by Google

Le Chapitre V enſeigne la maniere de calculer les réſiſtances horiſontales qu'éprouve un Vaiſſeau, tant celles qui ſont directes, ou par la proue, que celles qui ſont latérales, ou par le côté; & on fait voir l'ordre qu'il faut ſuivre dans le calcul pour éviter l'embarras & la confuſion. Ce calcul fournit ſeulement deux quantités pour l'expreſſion des réſiſtances, dont l'une ſuit le rapport des ſimples vîteſſes, & dont l'autre, qui provient de la dénivellation du fluide à la poupe & à la proue, ſuit le rapport de leurs quatriemes puiſſances. Les deux autres quantités qui ſe trouvent dans la formule des réſiſtances, ſont négligeables dans le calcul des actions du Vaiſſeau. On donne enſuite la maniere de calculer le changement qui arrive dans ces réſiſtances, ſelon que le Vaiſſeau eſt un peu plus ou un peu moins calé. Enfin on termine ce Chapitre, en donnant des formules faciles pour trouver les mêmes réſiſtances pour d'autres Navires dont les fonds ſeroient ſemblables à ceux du premier, par le moyen de celles déjà calculées pour celui-ci; & on fait obſerver que la quantité qui eſt comme les quatriemes puiſſances des vîteſſes, eſt ſuſceptible d'être négligée dans les Vaiſſeaux d'une grande capacité, tandis qu'au contraire, on ne peut ſe diſpenſer d'y avoir égard dans ceux dont la capacité eſt petite.

Le Chapitre VI enſeigne la maniere de calculer les moments qu'éprouve le vaiſſeau dans ſes inclinaiſons qui proviennent de l'action du vent ſur les voiles, * tant dans le cas où le vaiſſeau ſeroit en repos que dans celui où il ſeroit en mouvement; parce que ces moments peuvent être fort différents dans ces deux cas. On enſeigne également à calculer la variation qui arrive dans ces moments, quand le Vaiſſeau eſt plus ou moins calé dans le fluide; & l'on donne des formules pour trouver facilement, par le moyen des moments déjà trouvés pour un Navire, ceux qui correſpondent à tout autre Navire ſemblable au premier par ſes fonds. On

* Ce ſont ces moments que les Marins Eſpagnols appellent *Aguante de Vela*; c'eſt comme ſi on diſoit en Français, la force, ou l'énergie, de la voile.

ſinit ce Chapitre, en faiſant voir combien il importe, pour que le Navire porte bien la voile, que le centre des réſiſtances horiſontales ſoit le plus élevé qu'il eſt poſſible, & que les côtés du Navire, à partir de l'horiſontale qui paſſe par le centre de gravité, & en allant vers le haut, ſoient verticaux autant qu'il ſe peut; car cette qualité de porter la voile ne dépend pas ſeulement de la ſection horiſontale du Navire faite à fleur d'eau, comme on l'a cru & enſeigné juſqu'ici.

Dans le Chapitre VII on traite des moments qui agiſſent ſur le Navire dans ſon mouvement de rotation horiſontal, lorſqu'il *vire*, comme diſent les Marins, ou lorſqu'il vient au lof, ou qu'il arrive. On voit, par ces moments, la propenſion que le Navire auroit pour arriver, s'il n'en étoit pas empêché par d'autres forces. On explique la variation qui arrive dans les mêmes moments, lorſque le vaiſſeau eſt plus ou moins calé; & on donne des formules pour trouver ceux qui correſpondent à un Navire quelconque, ſemblable au premier par ſes fonds.

Le Chapitre VIII traite des moments que ſubit le Vaiſſeau dans ſon mouvement de rotation, que les Marins appellent *Tangage*, avec la même étendue & les mêmes circonſtances qu'on a conſidéré ceux qui ont lieu dans les roulis. On termine le Livre II par le Chapitre IX, où l'on traite des moments qui, par leur action ſur le Vaiſſeau, occaſionnent ce que les Marins appellent *Arquer*: on fait voir la cauſe d'où provient cet effet, & l'on démontre que la force d'un ſeul côté du Navire ſeroit capable de le prévenir preſque entiérement, ſi ce n'étoit la déſunion ou le jeu qu'il y a ordinairement dans la charpente & les ferrures du Vaiſſeau; ce qui fait voir la néceſſité de veiller davantage à la liaiſon des pieces, quoique la principale attention à avoir pour éviter cet accident, conſiſte dans la figure des fonds du Navire, & dans l'attention de raſſembler le plus qu'il eſt poſſible les différents poids vers ſon centre de gravité. On conſidere encore les mêmes moments dans le cas où le Navire eſt vuide; & on fait voir évidemment que

Digitized by Google

dans cet état, il eſt encore plus expoſé à s'arquer. Après cela on examine l'arc produit par les efforts qui tendent à déſunir le Navire dans le ſens de ſa largeur, lequel n'a point encore été conſidéré, quoiqu'il ſoit très-conſidérable, & en même temps très-préjudiciable, ſur-tout dans les Vaiſſeaux de guerre, lorſque leurs batteries ſont fort élevées au-deſſus du centre de gravité. On fait voir le mauvais ordre avec lequel on diſtribue l'artillerie dans les Navires, & l'on donne les regles qu'on devroit ſuivre pour éviter les inconvénients qui réſultent très-ſouvent de ce qui ſe pratique aujourd'hui.

Le Livre III traite des machines qui ſervent à mouvoir & à gouverner le Vaiſſeau. Le Chapitre premier a pour objet les voiles; on y conſidere la figure qu'elles prennent, la force avec laquelle le vent agit ſur elles, & la direction de cette force. On trouve que la courbe qu'elles forment eſt très-différente de la *Chaînette*, qu'on a cru juſqu'à préſent qu'elles formoient; & l'on donne les abſciſſes & les ordonnées qui doivent ſervir à la décrire. On détermine la force abſolue avec laquelle les voiles agiſſent, & l'on fait voir qu'elle ne dépend pas ſeulement de l'angle que le vent forme avec les vergues, mais auſſi de la courbure plus ou moins grande que la voile prend vers ſes extrémités; courbure qui varie ſelon la viteſſe du vent, la qualité de la voile & ſa grandeur. On détermine encore la direction de l'action des voiles, & le centre de leurs forces, lequel tombe toujours plus vers la poupe que le centre même des voiles, ſelon la courbure qu'elles prennent, & ſelon leur largeur; ce qui eſt une des cauſes qui obligent le Navire à venir au vent. On applique enſuite cette théorie à différents exemples de pratique, & on en conclut la grande dérive que doivent éprouver les vaiſſeaux, par la ſeule augmentation du vent, indépendamment des lames & des coups de mer, que les Marins regardent, en ce cas, comme la ſeule cauſe de cette dérive. Enfin on donne des tables, où l'on trouve la ſurface de chaque voile

Digitized by Google

exprimée en pieds quarrés, l'élevation du centre de gravité de chacune d'elles, & la valeur de leurs moments tant verticaux qu'horiſontaux, avec une application à tous les cas qui ſe préſentent le plus généralement dans la pratique.

Le Chapitre II traite du gouvernail, de ſes forces relativement aux différents angles qu'il forme avec la quille, tant du côté du vent que du côté de ſous le vent, & relativement à ſa figure qui contribue beaucoup à ſes effets; quoique juſqu'ici on n'ait pas fait attention à cette circonſtance intéreſſante. On trouve l'angle ſous lequel le gouvernail doit faire le plus grand effet; mais en comparant l'effet qui réſulte de cette diſpoſition, avec ce qu'on obtient dans la pratique ordinaire, on fait voir que l'avantage ſe réduit à bien peu de choſe; & l'on donne les raiſons qui doivent porter à donner la préférence aux angles que les Marins emploient communément, ſur ceux que la Géométrie détermine.

On donne, dans le Chapitre III, la théorie de la rame, machine bien ſimple dans la pratique; mais ſi compliquée pour ſa théorie, qu'il n'y a que le célebre *Léonard Euler*, qui nous en ait pu donner l'analyſe d'une maniere ſatisfaiſante. Ce Géometre nous auroit donné également le calcul légitime des véritables forces, & des vrais effets de cette machine, s'il ne ſe fût pas fondé ſur la loi des réſiſtances qui eſt communément reçue, & dont nous avons fait connoître la fauſſeté. On donne fort en détail tout le calcul, en y faiſant entrer le moment le plus petit, & on en conclut la viteſſe que doit prendre l'embarcation. L'accord des réſultats du calcul avec les faits que préſente la pratique, eſt une nouvelle confirmation de notre théorie des réſiſtances. On fait obſerver combien il eſt eſſentiel de rendre la partie extérieure de la rame auſſi légere qu'il ſe peut; & l'on trouve la force & la viteſſe les plus avantageuſes, avec leſquelles le rameur doit agir, pour que l'embarcation prenne la plus grande viteſſe poſſible. Enfin on cherche quel eſt le rapport le plus avantageux qu'il

Digitized by Google

doit y avoir entre les longueurs des parties extérieures & intérieures de la rame. On fait voir que ce rapport n'eſt pas conſtant, quoique dans la même embarcation & avec les mêmes rameurs, parce qu'il dépend de la force qu'ils emploient, & du rapport entre le temps qui s'écoule entre un coup de rame & l'autre, & le temps que la rame eſt maintenue dans l'eau: de ſorte que plus ces quantités ſont grandes, plus auſſi la partie extérieure de la rame doit être grande à l'égard de l'intérieure. La même choſe auroit lieu, quand le nombre des rameurs ſeroit plus grand; & c'eſt tout le contraire, lorſque la réſiſtance de la proue devient plus conſidérable : de façon que les grandes embarcations exigent une moindre longueur dans la partie extérieure de la rame. On conſidere auſſi dans tout ce calcul la force des rameurs; & d'après différentes remarques qu'on expoſe enſuite, on conclut que la meilleure diſpoſition de la rame eſt à fort-peu-près celle dont les Marins ſont uſage, en prenant cependant quelques précautions qui ſont indiquées par la différence des embarcations. On termine ce Livre par l'application de la théorie à un exemple tiré d'une Galere, & on fait voir le peu d'effet que produiſent quelques moments.

Le Livre IV traite des actions & des mouvements du Navire. Le Chapitre premier eſt employé à l'examen de la marche, ou du mouvement progreſſif imprimé au Vaiſſeau par l'impulſion du vent ſur les voiles, & du rhumb de vent qu'elle l'oblige de ſuivre. On donne quatre formules qui expriment les quatre viteſſes que nous diſtinguons dans le Vaiſſeau, qui ſont, la viteſſe directe, ou dans la direction de la quille de poupe à proue; la viteſſe-latérale, ou perpendiculaire au côté; la viteſſe oblique, ou celle dans le ſens de la route que le Vaiſſeau ſuit effectivement, & qui réſulte des deux premieres; enfin la viteſſe avec laquelle le Vaiſſeau s'éleve dans le vent, ou celle avec laquelle il gagne, directement en oppoſition au vent, ſelon la ligne même de ſa direction. A quoi on ajoute l'expreſſion ou la valeur de l'angle de la dérive.

Digitized by Google

On analyſe enſuite ces formules, & on en déduit les conſéquences qu'elles préſentent. On voit, au premier coup d'œil, que les quatre viteſſes ſeroient exactement proportionnelles à celles du vent, ſans la courbure des voiles qui altére un peu cette proportion. On voit également, que plus le rapport entre la réſiſtance du côté & celle de la proue ſera grand, plus la viteſſe directe ou par la proue ſera grande, & plus la viteſſe latérale ſera petite; & pour que le Vaiſſeau gagne au vent, on voit qu'il eſt néceſſaire que ce rapport ſoit plus grand que celui de la tangente de l'angle que le vent forme avec la quille, à la tangente de l'angle que la perpendiculaire à la quille forme avec la direction ſuivant laquelle ſe fait la force des voiles. Ces formules manifeſtent également, que les quatre viteſſes augmentent à meſure qu'on augmente la voilure, & que les viteſſes directes & obliques augmentent à un tel point, quand on navigue vent largue avec tout ſon appareil, qu'elles arrivent enfin à être plus grandes que celles du vent. On indique les cas où cela arrive; & quoiqu'ils n'aient pas lieu dans les Navires, ils ſe rencontrent dans les Galeres & les Chebecs. On applique enſuite ces formules à différents exemples de pratique, c'eſt-à-dire à des exemples relatifs à la diſpoſition ordinaire des appareils qu'emploient les Marins, tant vent en poupe, que vent largue, & à la bouline; & on trouve la pratique entiérement d'accord avec les ſolutions qui réſultent des formules. Il n'en eſt pas la même choſe des ſolutions que donne l'ancien ſyſtême des réſiſtances; les viteſſes qu'on en déduit pour les Navires ſont bien éloignées de celles que la pratique manifeſte. On fait voir encore que l'augmentation de la viteſſe directe provenant de la plus grande raiſon, dans laquelle peuvent être les réſiſtances latérales & par la proue, ne s'étend pas aux cas où cette raiſon augmenteroit, en allégeant ou en faiſant caler d'avantage le Vaiſſeau; car quoique effectivement on trouve, dans ce cas, quelque différence, elle eſt ſi petite qu'elle ne mérite pas la moindre atten-

Digitized by Google

tion. L'expreſſion totale de la même viteſſe réduite en ſérie, facilite la maniere de combiner les dimenſions principales qu'on doit donner aux Vaiſſeaux pour qu'ils prennent la plus grande marche poſſible. En augmentant leur longueur, & en diminuant à proportion leur profondeur, on augmente la viteſſe ; mais on verra que cela n'eſt pas ſans inconvénient. La viteſſe augmente pareillement lorſqu'on augmente la longueur, & qu'on diminue à proportion la largeur. Mais dans le cas où l'on ſe donneroit une longueur conſtante, & qu'on feroit varier ſeulement la largeur & la profondeur, on trouve qu'il eſt avantageux, pour naviguer vent arriere, ou avec un vent très-largue, d'augmenter la largeur, & de diminuer la profondeur : c'eſt tout le contraire en naviguant à la bouline, ou avec des vents près. C'eſt auſſi ce qu'on obſerve journellement dans la pratique, & ce qu'on ne peut déduire de l'ancien ſyſtême des réſiſtances. On termine ce Chapitre en démontrant par les mêmes formules, qu'avec des vents modérés, les petits bâtiments doivent mieux marcher que les grands qui leur ſeroient ſemblables ; & qu'au contraire, les grands bâtiments ont l'avantage avec un vent violent.

Le Chapitre II traite des angles que les voiles & le vent doivent former avec la quille, pour que le Navire puiſſe prendre la plus grande marche qu'il eſt poſſible. On a jugé à propos de ſéparer cet objet du Chapitre précédent, auquel il appartenoit naturellement, à cauſe de ſon étendue, des attentions qu'il exige, & des circonſtances particulieres auxquelles il faut avoir égard. On donne premiérement une formule qui exprime la valeur de l'angle que doit former la voile avec la quille, pour que le Vaiſſeau marche avec le plus de viteſſe qu'il eſt poſſible, en ſuppoſant conſtant l'angle que forme le vent avec la même quille. Cette formule fait voir que cet angle de la voile n'eſt pas conſtant, quoique dans un même Vaiſſeau, comme les Géometres l'ont cru généralement juſqu'ici ; parce que non-ſeulement il dépend de la relation entre les réſiſtances du côté & de la proue, mais encore de la quantité de

voiles que porte le vaiſſeau, & de la courbure des mêmes voiles : enſorte que cet angle doit être d'autant plus petit, que le rapport des réſiſtances ſera plus grand, que la quantité de voiles déferlées ſera plus grande, & que leur courbure ſera plus petite. On en apporte pluſieurs exemples ; en ſuppoſant un vaiſſeau de 60 canons, allant à la bouline, avec tout ſon appareil, on a trouvé cet angle de 28° 47′, & ſi on ſuppoſe qu'il navigue ſeulement avec les deux voiles majeures, on le trouve de 40° 42′ ; angle qui eſt à-très-peu-près le même que celui qu'emploient les Marins dans tous les cas. On cherche enſuite quel eſt le vent qui fait marcher un Vaiſſeau avec le plus de viteſſe qu'il eſt poſſible, & on démontre que ce n'eſt pas toujours le même vent qui produit cet effet, ni même le vent arriere ; quoiqu'on ait cru généralement juſqu'ici que le vent arriere étoit, ſans contredit, le plus avantageux, toutes les fois que la quantité de voiles déferlées demeuroit la même. Perſonne ne s'eſt perſuadé que le vent largue pouvoit être plus avantageux ; & lorſque l'expérience a forcé de reconnoître cet effet, on l'a ſeulement attribué à ce qu'en naviguant vent arriere, les voiles ſe couvrent mutuellement, & ſe dérobent le vent les unes aux autres. On trouve la formule qui exprime la valeur de cet angle le plus avantageux que doit former le vent, & par cette formule on fait voir que cet angle eſt variable, parce qu'il dépend du rapport dans lequel ſeront les réſiſtances du côté & de la proue, de la quantité de voiles que le Vaiſſeau porte, & de la courbure des mêmes voiles : enſorte que, plus cette raiſon des réſiſtances ſera grande, qu'il y aura une plus grande quantité de voiles déferlées, & que la courbure des voiles ſera moindre, ou que le vent ſera moins violent, plus l'angle du vent qui eſt néceſſaire pour faire marcher le vaiſſeau le plus vite qu'il eſt poſſible, ſera ouvert. On trouve que pour un Vaiſſeau de 60 canons, lorſqu'il ne porte pas plus de 8934 pieds quarrés de voilure, c'eſt le vent arriere qui de tous les vents le fera marcher avec le plus de viteſſe ; qu'auſſi-tôt qu'on augmente la quantité

Digitized by Google

quantité des voiles, ce n'eſt plus le vent arriere qui a cet avantage, mais un autre vent plus ouvert; & enfin ce Vaiſſeau portant une voilure de 17680 pieds quarrés, c'eſt le vent qui formera avec la quille un angle ouvert de 41° 56′, qui lui donnera le plus de viteſſe. On ſubſtitue enſuite les angles les plus avantageux dans la formule qui donne la viteſſe, & on trouve le *maximum maximorum* de la viteſſe, ou la plus grande viteſſe qui puiſſe réſulter dans les cas innombrables qui peuvent avoir lieu. Dans le Vaiſſeau de 60 canons on trouve cette plus grande viteſſe de $\frac{74}{100}$ de celle du vent; & dans un Chébec elle eſt de $\frac{161}{100}$ de la même viteſſe: enſorte que la viteſſe de ce dernier eſt de $\frac{61}{100}$ plus grande que celle du vent. Pour trouver la plus grande viteſſe avec laquelle un Vaiſſeau puiſſe gagner dans le vent, & la relation entre les angles qui doivent la produire, on parvient à une formule très-compliquée. Cette formule fait voir que les angles qui donnent cette plus grande viteſſe, ne peuvent pas être les mêmes que ceux qui procurent au Vaiſſeau le plus grand ſillage qu'il eſt poſſible; mais qu'ils en different beaucoup, & qu'ils dépendent, comme dans les autres cas, non-ſeulement de la relation qui regne entre la réſiſtance du côté & celle de la proue, mais encore de la quantité de voiles que le Vaiſſeau porte, & de la courbure des voiles, ou de l'impétuoſité du vent: de façon que plus le Vaiſſeau porte de voiles, & moins le vent a de force, plus les angles que doivent former le vent & les voiles avec la quille, pour gagner au vent le plus qu'il eſt poſſible, doivent être aigus. Finalement, ayant trouvé les valeurs de ces angles, & les ayant ſubſtituées dans la formule qui donne la viteſſe avec laquelle le Vaiſſeau s'éleve dans le vent, on trouve l'expreſſion de la plus grande de ces viteſſes. Dans le Vaiſſeau de 60 canons, on la trouve des $\frac{164}{1000}$ de la viteſſe du vent, tandis qu'en ſuivant la méthode qu'emploient les Marins, elle eſt ſeulement de $\frac{111}{1000}$; d'où l'on voit qu'il eſt poſſible de gagner au vent un tiers de plus qu'on ne l'a fait juſqu'ici.

Digitized by Google

Le Chapitre III s'étend sur l'inclinaison que doivent prendre les Vaisseaux en vertu de l'impulsion du vent sur les voiles : car ayant déjà examiné, dans le Chapitre VI du Livre II, les moments avec lesquels les côtés résistent à l'inclinaison ; & dans le Chapitre premier du Livre III, ceux que le vent produit dans les voiles, il n'est question que d'égaler ces moments pour avoir l'inclinaison qui doit en résulter. On obtient, par ce moyen, la formule qui en exprime la valeur ; & quoiqu'on remarque dans cette formule différentes quantités relatives à différentes especes de Bâtiments, on peut les réduire à une seule, les autres pouvant être négligées, sans crainte d'erreur sensible. On applique ensuite cette formule à différents exemples, & on en conclut les inclinaisons mêmes qu'on observe journellement dans la pratique. Il n'en est pas de même dans l'ancien système des résistances : les inclinaisons qu'on en conclut sont fort éloignées de la réalité, & font voir à découvert les absurdités qui résultent des fausses suppositions de cette théorie, & même des expériences reçues. On explique encore ce qu'on a entendu par *Point vélique*, point dont on a cherché la position, afin d'obtenir que le navire n'éprouvât aucune inclinaison ; & l'on fait voir l'impossibilité de ce projet. On donne aussi le calcul & un exemple du cas que les Marins appellent *coëffer*, * & qui, par le défaut d'une connoissance parfaite, n'est pas encore suffisamment redouté : on démontre le grand risque qu'il y a de périr en pareil cas. Les formules qui expriment l'inclinaison qu'un Vaisseau doit prendre, s'appliquent ensuite aux cas

* Ce cas, que les Espagnols appellent *Tomar por alúa*, arrive, lorsque naviguant avec un vent violent, le vent vient à prendre les voiles en face, c'est-à-dire, par la proue, ou sous le vent, soit par le défaut de soin du Timonier, soit par un changement subit dans la direction du vent ; alors le Vaisseau vire, ou fait *chapelle*, comme disent les Marins, malgré le manœuvrier, à moins qu'il ne soit très-prompt à faire contrebrasser devant ; l'inclinaison se fait subitement du côté opposé, & devient très-considérable. Ce qui peut arriver de plus heureux dans ce terrible accident, qui a fait perir un grand nombre de Bâtiments, c'est que les voiles soient mises en pieces par la violence du vent, ou que la mâture vienne à se rompre.

Digitized by Google

où l'on feroit quelques changements à la coque, soit dans son poids, soit dans son volume submergé; & l'on en conclut que le Vaisseau portera mieux la voile, si le poids additionnel est placé plus bas que la superficie de l'eau; & ce sera le contraire, si ce poids est placé plus haut : l'augmentation ou la diminution de de la force du Vaisseau pour porter la voile, étant proportionnelle à la distance du poids ajouté à la surface de l'eau. Pareillement, le Vaisseau portera mieux la voile, si le volume qu'on lui ajoute est plus élevé que celui qu'on supprime, & réciproquement; & si on ajoute en même temps un poids & un volume, la force du Vaisseau, pour porter la voile, augmentera, si le volume ajouté est plus haut que le poids. Enfin on démontre que dans les Vaisseaux entiérement semblables, les forces pour porter la voile sont en raison inverse de leurs dimensions linéaires, & que dans les inclinaisons de poupe à proue, les Vaisseaux étant construits comme ils le sont aujourd'hui, bien loin que les proues soient submergées par l'action ou la force du vent sur les voiles, elles s'élevent davantage sur le fluide.

Le manege du Vaisseau, c'est-à-dire, la combinaison des forces qui agissent continuellement pour le faire tourner, fait le sujet du Chapitre IV. Le gouvernail est seulement une de ces forces, & en bien des cas elle n'est pas la plus efficace. On démontre que l'axe de la force motrice, en supposant les voiles planes, & le Vaisseau sans inclinaison, ne concourt pas avec l'axe des résistances, & que ces deux axes ne coïncident qu'en conséquence de la courbure que prennent les voiles, & de l'inclinaison que prend le Vaisseau. Comme ces deux choses dépendent de la force plus ou moins grande du vent, de la plus ou moins grande quantité de voiles, & de leur hauteur; il s'ensuit que l'une quelconque de ces quantités venant à varier, l'axe de la force motrice doit aussi varier, & que l'équilibre dans le manege sera détruit; le manege sera par conséquent très-inconstant, quelque chose qu'on nous ait enseigné de contraire jusqu'ici. On met en évidence tous les cas

Digitized by Google

où le Vaiſſeau doit venir au vent, ou arriver, ſoit parce que le vent éprouve quelque altération, ſoit parce qu'on augmente ou qu'on diminue la hauteur ou l'amplitude des voiles, ſoit enfin par une variation quelconque dans l'état de la charge, ou dans les dimenſions mêmes du corps du Vaiſſeau, particuliérement dans ſes élancements & quêtes, qui ſont une des principales cauſes d'où dépend la perfection du manege, quoique quelques Conſtructeurs très-célebres ne l'aient pas cru juſqu'ici. Enfin, on traite de l'emplacement des mâts, dont dépend encore la qualité de bien gouverner, dans tous les cas qu'on peut ſuppoſer pour les variations des voiles, & des efforts du vent, leſquels ſont tous vérifiés par des exemples de pratique. On finit ce Chapitre, en donnant une formule générale qui renferme tous les cas.

Le Chapitre V traite du roulis & du tangage, objets dans leſquels, encore plus que dans tous les autres, on a commis juſqu'à préſent de grandes erreurs; car on les a conſidérés ſeulement comme dépendants de l'état & de la diſpoſition du corps du Vaiſſeau, & en aucune maniere du volume & de la viteſſe des lames, ce qui en eſt cependant la principale cauſe. On donne d'abord les formules, ou les valeurs, non-ſeulement du temps dans lequel le Vaiſſeau acheve ſon roulis, conſidéré comme un pendule ſimple, ainſi que l'ont fait juſqu'ici tous les Auteurs, mais encore de la viteſſe avec laquelle il le fait, & de l'action que les mâts & le corps du Navire éprouvent dans ce balancement. On fait voir que cette action, qui eſt l'unique à laquelle on doive faire attention, n'eſt pas préciſément en raiſon inverſe des temps; car elle dépend auſſi de la grandeur du roulis, & celle-ci, le Vaiſſeau toujours conſidéré comme un pendule, ne dépend en aucune maniere du temps. Mais ce qui eſt plus, on fait voir évidemment que l'action qui agit ſur les mâts & ſur le Vaiſſeau, eſt ſi éloignée de dépendre du temps dans lequel le Vaiſſeau acheve le roulis, qu'au contraire, la plus grande action qu'ils éprouvent eſt préciſément dans l'inſtant où

Digitized by Google

le Vaiſſeau ceſſant de ſe mouvoir, eſt ſur le point de ſe remettre en mouvement pour ſe redreſſer.

On examine enſuite le roulis qu'occaſionne la lame, & le temps qu'elle doit employer à paſſer par-deſſous le Navire. On fait voir combien la viteſſe de la lame influe ſur ce balancement, & le peu dont les voiles alterent ſes effets. On démontre que ce temps eſt grand dans les petites lames, qu'il diminue juſqu'à être parvenu au *minimum*, & qu'enſuite il augmente de nouveau dans les plus grandes lames: de ſorte que, dans le Vaiſſeau de 60 canons, la lame qui paſſe le plus promptement par-deſſous ſa carene eſt celle qui a un peu plus de trois pieds de hauteur; toutes les autres, ſoit qu'elles ſoient d'une plus grande, ou d'une moindre hauteur, emploient plus de temps. On fait voir auſſi la différence qu'il y a entre les lames agitées par un vent conſtant, & celles qui ſubſiſtent après que le vent qui les a produites s'eſt calmé; * & on met en évidence l'erreur à laquelle ces dernieres ont conduit, en faiſant croire à M. *Bouguer* que les roulis de la Frégate *le Triton*, duroient toujours 4 ſecondes $\frac{1}{2}$. On démontre enſuite tous les inconvénients qu'il y auroit à éloigner beaucoup du centre de gravité les différents poids qui compoſent la charge du Navire, dans la vue d'augmenter la durée du roulis, parce qu'en rendant cette durée plus longue, on augmente la viteſſe & la grandeur du balancement. Pareillement, quoiqu'il paroiſſe convenable pour le même objet, de diminuer la diſtance du centre de gravité au métacentre, on fait voir qu'en prenant ce parti il en réſulteroit de très-grand inconvénients, parce qu'alors les lames paſſeroient par-deſſus le Vaiſſeau & l'inonderoient: c'eſt un point qu'on n'a pas eu en vue juſqu'à préſent, quoiqu'il ſoit cependant un des plus importants, & qu'il mérite d'être conſidéré avec le plus grand ſoin. On donne enſuite la vraie théorie du roulis; on en déduit la véritable durée, en combinant celle dans laquelle le Vaiſſeau

* Ce ſont ces lames que les Eſpagnols appellent *Oſas de Leba*.

Digitized by Google

acheveroit un roulis, étant conſidéré comme un pendule, & celle dans laquelle il l'acheveroit, ſi la lame agiſſoit ſeule. On trouve par ce moyen que la véritable durée d'un roulis tient un milieu entre les durées des deux autres. Le Vaiſſeau de 60 canons, par exemple, conſidéré comme un pendule, acheveroit ſon roulis en 2 ſecondes $\frac{1}{4}$; & par l'action ſeule d'une lame de 9 pieds de hauteur, il l'acheveroit en 3 ſecondes; d'où on déduit que la vraie durée du roulis de ce Vaiſſeau avec la même lame eſt de 2 ſecondes $\frac{8}{9}$. Suppoſant que dans le même Vaiſſeau on écarte les poids du centre, ou de l'axe ſur lequel il tourne des $\frac{1}{7}$ de plus qu'on ne le ſuppoſoit, la durée du roulis augmentera ſeulement d'une demi-ſeconde; & en diminuant la diſtance du métacentre au centre de gravité, de maniere à la réduire aux $\frac{1}{7}$, de ce qu'elle étoit, la même durée n'augmentera par-là que d'un tiers de ſeconde.

On détermine enſuite la grandeur du roulis, & l'on trouve que dans le ſecond cas, où l'on éloignoit les poids de l'axe de rotation, la grandeur du roulis augmentera des $\frac{2}{7}$ de ce qu'elle étoit dans le premier cas; & dans le troiſieme cas, où l'on ſuppoſe diminuée la diſtance du métacentre au centre de gravité, la grandeur du roulis augmentera auſſi de $\frac{1}{7}$ de ce qu'elle étoit auparavant. Or il eſt clair que ces deux augmentations dans la grandeur du roulis produiroient beaucoup plus d'inconvénients qu'on ne retireroit d'avantages, en augmentant la durée du roulis d'une auſſi petite quantité. En effet, ayant trouvé la formule qui exprime les moments dont la mâture éprouve l'action dans les roulis, & en ayant conclu la moindre action qu'elle puiſſe éprouver en faiſant varier le temps dans lequel le Vaiſſeau acheve ſon roulis, étant conſidéré comme un pendule; on trouve que ce temps doit être égal à celui qu'emploie la lame à paſſer par-deſſous le Vaiſſeau, ou à celui qu'il emploiroit à faire un roulis par la ſeule action de la lame : de-là on infere que pour gagner cet avantage, il ſeroit

Digitized by Google

néceſſaire de changer l'arrimage pour chaque eſpece de lame; ce qui ſeroit très-embarraſſant, pour ne pas dire tout-à-fait impoſſible, dans la pratique. On voit par-là qu'il faut s'en tenir à conclure qu'il convient de diſpoſer l'arrimage du Navire pour un cas moyen des lames, qui, par leur grandeur, peuvent faire craindre pour la mâture.

De même qu'on a cherché la moindre action que puiſſe éprouver la mâture en faiſant varier le temps dans lequel le Vaiſſeau acheve un roulis, étant conſidéré comme un pendule; on cherche également cette moindre action en faiſant varier la diſtance du métacentre au centre de gravité: mais on trouve que dans ce cas il n'y a point de limite, & que plus cette diſtance ſera grande, plus la mâture ſera expoſée. Ceci paroîtroit devoir nous induire à diminuer cette diſtance autant qu'il eſt poſſible; mais, outre que cela préjudicieroit à la qualité de porter la voile, il y a encore un autre inconvenient non moins eſſentiel à conſidérer, qui eſt que la mer paſſeroit par-deſſus le corps du Navire avec plus de facilité. En effet, cherchant enſuite la hauteur à laquelle les eaux s'éleveroient ſur les côtés du Navire, on trouve par la formule qui exprime cette hauteur, qu'elle ſera d'autant plus grande que la diſtance du métacentre au centre de gravité ſera plus petite. En un mot, on trouve que ces hauteurs ſont entre elles comme les quarrés des temps que les Vaiſſeaux emploient à achever leurs roulis: nouveau motif pour ne pas augmenter démeſurément ce temps.

En ſuppoſant le Vaiſſeau de 60 canons, arrimé réguliérement, on trouve qu'une lame de 36 pieds de hauteur s'élevera ſur ſon côté de 15 pieds $\frac{1}{2}$; qu'en éloignant les poids de l'axe de rotations de $\frac{1}{7}$ de plus, elle s'élevera de 21 pieds $\frac{1}{2}$; & qu'en diminuant la diſtance du centre de gravité au métacentre, de maniere à la reduire aux $\frac{2}{3}$ de ce qu'elle étoit, elle s'éleveroit de 19 pieds: par conſéquent le côté du Navire n'ayant ſeulement que 16 à

Digitized by Google

17 pieds de hauteur au-dessus du niveau de l'eau, on voit clairement que, dans ces deux derniers cas, les eaux passeroient pardessus le corps du Navire, & que chaque lame l'inonderoit; inconvénient très-fâcheux, & qu'on est forcé de prévenir, en renonçant un peu à la plus grande sûreté des mâts. Si la plus grande sûreté de la mâture exige que les roulis durent 4 ou 5 secondes, l'élévation des eaux sur le côté ne permet pas cette durée; elle en permet tout au plus une de 3 secondes.

On fait voir encore que les frégates sont beaucoup plus exposées à ces inondations, & que, par cette raison, elles exigent qu'on tienne à proportion la distance du centre de gravité au métacentre, un peu plus grande. On apporte des exemples du peu d'attention qu'on donne à ce point important; & l'on finit l'article du roulis, en donnant des regles pour se conduire avec sûreté dans une matiere aussi essentielle, & en spécifiant les cas où les roulis peuvent devenir encore plus extraordinaires, & par conséquent plus redoutables.

La suite de ce Chapitre traite du Tangage. On trouve, par les mêmes principes, le temps que le vaisseau, considéré comme un pendule, emploie à produire ce balancement; & on trouve qu'il est presque le même que celui dans lequel il acheve le roulis. Il paroît, par ce résultat, qu'on devroit tirer ici les mêmes conséquences que pour les roulis; mais, dans ceux-ci, il n'étoit pas nécessaire de faire attention à la viteſſe du Vaisseau, comme il est maintenant nécessaire de le faire. C'est donc en considérant cet élément de plus, qu'on cherche la vraie durée du tangage, & on trouve qu'elle est d'autant plus petite, que la viteſſe du Navire sera plus grande : en sorte que le Vaisseau de 60 canons, naviguant à la bouline avec 10 pieds de viteſſe par seconde, la lame ayant 9 pieds de hauteur, achevera son tangage dans un tiers moins de temps qu'il ne l'acheveroit étant considéré comme un pendule, lequel seroit en 2 secondes $\frac{1}{4}$. On examine ensuite la grandeur du tangage, sa plus grande viteſſe, & enfin l'action qui en résulte

sur

Digitized by Google

ſur la mâture. Cette action eſt la plus petite qu'elle puiſſe être, dans le cas où la durée du tangage, le navire étant conſidéré comme un pendule, eſt égale à celle du même tangage ſuppoſé produit par l'action ſeule de la lame : ce qui eſt la même choſe que ce que nous avons trouvé pour les roulis. Mais dans les roulis, la durée de l'oſcillation du Vaiſſeau, conſidéré comme un pendule, eſt moindre que celle de l'oſcillation qui feroit ſeulement produite par l'action de la lame; c'eſt tout le contraire dans les tangages. Par cette raiſon, ſi dans les roulis il eſt néceſſaire d'éloigner les poids de l'axe de rotation pour ſoulager la mâture, dans les tangages, au contraire, on a beſoin qu'ils ſoient rapprochés, en allégeant ainſi, le plus qu'il eſt poſſible, le poids des extrémités du Vaiſſeau. On démontre également que l'action qu'éprouve la mâture dans les tangages, eſt comme les quarrés des longueurs des Navires; d'où l'on voit évidemment qu'il eſt néceſſaire de ne pas les allonger beaucoup, dans la vue ſeule de leur procurer une marche un peu plus avantageuſe. La diminution de la diſtance du métacentre au centre de gravité conduit encore ici à diminuer le travail de la mâture; mais, de même que dans les roulis, les élevations des eaux à la proue ſeroient, dans ce cas, plus conſidérables; & d'autant plus que dans les tangages la viteſſe du Vaiſſeau contribue beaucoup à produire un plus grand effet. On trouve, pour le Vaiſſeau de 60 canons, naviguant à la bouline avec 10 pieds de viteſſe par ſeconde, qu'une lame de 9 pieds de hauteur s'éleve de plus de 9 pieds à la proue, tandis qu'elle ne s'éleveroit pas même à 6 pieds, ſi le Vaiſſeau ne marchoit pas. Dans le même Vaiſſeau, avec une lame de 36 pieds de hauteur, l'eau s'éleveroit à 16 pieds $\frac{1}{4}$, en ſuppoſant le Navire arrêté; & en lui ſuppoſant une viteſſe de 15 pieds par ſeconde, elle s'éleveroit juſqu'à 20 pieds $\frac{4}{11}$; c'eſt-à-dire, qu'elle ſurpaſſeroit de plus de 3 pieds toute la hauteur du corps du Vaiſſeau. Ceci fait voir la néceſſité de diminuer la voilure dans les vents forcés, comme le pratiquent les Marins, & démontre l'impoſſibilité de porter toute

Digitized by Google

la voilure, comme l'a prétendu M. *Bouguer*. Lorsque les lames choquent par la poupe, la viteſſe du Vaiſſeau produit un effet tout contraire; elle diminue l'élevation des eaux. Dans le cas ci-deſſus du Navire de 60 canons, cinglant avec une viteſſe de 15 pieds par ſeconde, les lames ayant 36 pieds de hauteur, on trouve que les eaux doivent ſeulement s'élever à la poupe de 10 pieds $\frac{2}{11}$, tandis qu'on vient de voir qu'elles s'élevoient à la proue de 20 pieds $\frac{4}{11}$. Cinq pieds de plus de viteſſe dans le même Vaiſſeau ne diminueroient l'élevation des eaux que d'un demi-pied ſeulement; ce qui fait voir le peu de néceſſité qu'il y a, naviguant vent arriere, de forcer de voiles, dans la vue ſeule de fuir les lames : il ſuffit d'en porter une quantité ſuffiſante, pour donner au Vaiſſeau une viteſſe de 15 pieds par ſeconde, ou un peu plus.

De la plus grande élevation des eaux qui, par ces motifs, doit avoir lieu à la proue, on déduit clairement que la hauteur du métacentre au-deſſus du centre de gravité qui correſpond à la partie de l'avant du Navire, doit être plus grande que celle qui correſpond à la partie de l'arriere; ou, comme ces hauteurs dépendent des largeurs du Navire à ſes extrémités, on voit conſéquemment la néceſſité abſolue que l'avant ſoit plus renflé, ou plus volumineux que l'arriere. Les Marins ont toujours pratiqué ceci, contre le vœu général des Géometres, qui n'ont ceſſé de demander des proues aiguës pour faire marcher le Vaiſſeau avec plus de viteſſe; ſans réfléchir que ces proues pouvoient occaſionner la ruine des Bâtiments, ſans peut-être leur donner la ſupériorité de marche qu'ils cherchoient à leur procurer. Enfin on termine ce Livre, en traitant de l'endroit où il convient de mettre le fort, ou la plus grande largeur du Vaiſſeau, & de la figure que doivent avoir ſes couples, pour obtenir également la plus grande perfection poſſible dans les mouvements de tangage.

Le cinquieme & dernier Livre de l'Ouvrage, contient une récapitulation de tout ce qui a été dit dans les Livres précédents, mais ſans y employer aucun calcul analytique, afin de rendre notre

Digitized by Google

Ouvrage d'une utilité plus générale, en le mettant, autant qu'il eſt poſſible, à la portée des Marins. Le Chapitre premier traite de la force des Vaiſſeaux, de l'échantillon des bois qui entrent dans leur conſtruction, & des dimenſions principales avec leſquelles ils doivent être conſtruits. On y fait voir la foibleſſe avec laquelle les Vaiſſeaux ſont conſtruits, & la force démeſurée qu'on donne aux Frégates, ſans faire attention que les Vaiſſeaux ſont à proportion beaucoup plus ſurchargés d'artillerie. On donne des regles pour une conſtruction bien proportionnée; & on finit en donnant la méthode pour régler les épaiſſeurs, le poids & les forces des bois, lors même qu'ils ſeroient de différentes qualités ou eſpeces.

Le Chapitre II traite de la grandeur des Vaiſſeaux : on fait voir qu'on les a augmentés, depuis quelque temps, ſans une grande néceſſité; & on expoſe les avantages qui peuvent réſulter de l'une & l'autre proportion. On enſeigne la maniere de leur donner les dimenſions convenables à l'artillerie qu'ils doivent porter. Delà on infere combien il ſeroit à ſouhaiter que les pieces d'artillerie fuſſent courtes & légeres, non-ſeulement pour que le ſervice en fût plus prompt & plus commode, mais encore pour ſoulager les Navires, pour leur plus grande ſolidité & leur plus grande durée.

Le Chapitre III s'étend ſur la qualité de porter la voile, & l'on y rappelle ce qu'on a dit précédemment. On met en évidence l'erreur dans laquelle on tomberoit, en augmentant les appareils des grands Vaiſſeaux, comme l'ont prétendu quelques Marins ſpéculatifs, par la ſeule raiſon que leur ſtabilité eſt plus grande pour porter la voile. On recherche auſſi la variation qui doit arriver dans cette même qualité, lorſqu'on fait varier quelqu'une des dimenſions, le poids ou la coque du Vaiſſeau; & on éclaircit le tout par les exemples néceſſaires.

Le Chapitre IV traite de la marche & du rhumb de vent que ſuivent les Vaiſſeaux; mais, comme les formules dont on a déduit les démonſtrations ſont très compliquées, on tâche d'expliquer le

Digitized by Google

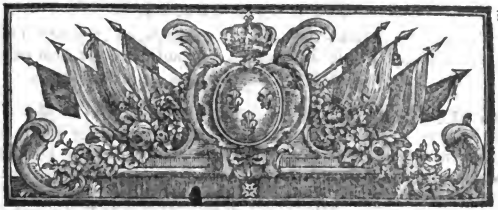
tout par des conſtructions géométriques, qui ſont d'une intelligence très-facile. Le Chapitre V s'étend ſur le manege du Vaiſſeau; on explique toutes les forces dont l'action contribue à cet effet, & les avantages qui réſultent de placer les mâts convenablement. Enfin le Chapitre VI traite du roulis & du tangage : on apporte différents exemples, & l'on indique de nouveau les attentions néceſſaires pour adoucir ces balancements.

Si ſur le tout on a ſoin de conſulter la pratique, on verra clairement, dans tous les cas, ſa correſpondance parfaite avec notre théorie. C'eſt l'unique moyen d'en juger ſainement, & de s'aſſurer de la vérité des principes ſur leſquels elle eſt fondée.

AVERTISSEMENT.

Les nombres que l'on trouve entre deux parentheſes, dans pluſieurs endroits de cet Ouvrage, ſont deſtinés à indiquer à quel numéro du Livre il faut aller chercher la propoſition dont le Lecteur doit ſe rappeller la démonſtration dans cet endroit. On indique auſſi le Volume, lorſque le renvoi n'appartient pas à celui où ſe fait la citation. A l'égard des numéros, ils ſont au commencement des propoſitions dans le premier Volume, & au commencement des à-linéa dans le ſecond.

P.



EXAMEN MARITIME,

THÉORIQUE ET PRATIQUE,

OU

TRAITÉ DE MÉCHANIQUE,

Appliqué à la Conſtruction & à la Manœuvre des Vaiſſeaux & autres Bâtiments.

LIVRE PREMIER.

DE LA MÉCHANIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

Définitions, Axiomes, & Principes du Mouvement.

DÉFINITION I.

(1.) LE *Lieu d'un corps* eſt ſa ſituation dans l'univers, ou la partie de l'eſpace immobile qu'il occupe. Nous en avons tous une idée claire, diſtincte & ſimple; quelles que ſoient les expreſſions qu'on emploie pour en donner une définition, on ne peut en rendre

Digitized by Google

l'intelligence plus facile ; il semble, au contraire, qu'on en rend l'idée moins distincte. * On le distingue en *Lieu absolu*, & en *Lieu relatif.*

DÉFINITION II.

(2.) Le *Lieu absolu* est celui qu'occupe un corps par rapport à tout l'univers, sans aucune relation aux lieux des autres corps. Le *Lieu relatif* est celui qu'occupe un corps, eu égard aux lieux des autres corps. Dans un Navire en mouvement, les chambres & les mâts occupent le même lieu par rapport au Navire, mais non par rapport au rivage, ou à la terre : ainsi on dit que le lieu relatif des chambres & des mâts est toujours le même, mais non leur lieu absolu, parce qu'en effet il change par rapport à l'univers.

DÉFINITION III.

(3.) Le *Mouvement* est le transport d'un corps d'un lieu à un autre, ou son changement continuel de lieu. Ainsi on dit qu'un corps se meut ou est en mouvement, lorsqu'il passe d'un lieu à un autre, ou qu'il change continuellement de lieu. On dit, au contraire, qu'un corps est en repos, lorsqu'il reste constamment dans le même lieu.

DÉFINITION IV.

(4.) De même que le lieu peut être absolu ou relatif, le mouvement peut aussi être absolu ou relatif. Lorsque le lieu, par rapport auquel le mouvement s'exécute, est absolu, le mouvement est aussi absolu, & si le lieu étoit relatif, le mouvement le seroit aussi. Ainsi, un mouvement absolu peut être un repos relatif. Les chambres & les mâts d'un Navire ont un mouvement absolu, lorsqu'il se meut ; mais ils sont en repos à l'égard du Navire.

DÉFINITION V.

(5.) Si le corps se meut en se conservant toujours dans une même ligne droite, on appelle cette ligne *la Direction du Mouvement.*

---

* Cette définition du *Lieu* est très-philosophique, elle est entièrement conforme à notre maniere de concevoir ; mais il n'a pas tenu aux Métaphysiciens d'embrouiller cette idée à force de distinctions. Nous ne suivrons point leur exemple, & par conséquent nous nous dispenserons d'exposer toutes les réveries qu'ils ont débitées à ce sujet. Nous ferons seulement observer, en passant, que toutes les idées dont le sujet s'apperçoit par une simple opération de l'esprit, comme l'idée de l'espace, de la Matiere, du Mouvement, &c ne peuvent que s'obscurcir, lorsqu'on y applique le raisonnement ; ou du moins il semble que la perception en devient moins distincte.

Digitized by Google

DÉFINITION VI.

(6.) On appelle *Viteſſe* la promptitude ou célérité avec laquelle s'exécute le mouvement d'un corps ; & on dit qu'un corps a plus ou moins de viteſſe, ſelon qu'il ſe meut avec plus ou moins de promptitude ou célérité.

DÉFINITION VII.

(7.) Comme la viteſſe dépend du mouvement, qui peut être abſolu, ou relatif, il s'enſuit que la viteſſe peut auſſi être abſolue, ou relative. Si le mouvement eſt abſolu, ou s'il ſe fait par rapport à un lieu abſolu, la viteſſe eſt dans ce cas abſolue ; & ſi le mouvement ſe faiſoit à l'égard d'un lieu relatif, la viteſſe ſeroit relative. Ainſi, une viteſſe abſolue peut être un repos relatif, ou peut n'exprimer aucune viteſſe relative. Si V repréſente la viteſſe abſolue du corps A, & u celle du corps B dans la même direction ; la viteſſe relative de ces deux corps ſera $V \mp u$. Le ſigne négatif eſt pour le cas où les deux corps ſe meuvent vers la même partie ; & le poſitif pour celui où ils ſe meuvent en ſens contraire, ou vers des parties oppoſées.

DÉFINITION VIII.

(8.) Le mouvement eſt dit *uniforme*, lorſque la viteſſe avec laquelle le corps ſe meut, eſt toujours la même. On l'appelle *accéléré*, lorſque la viteſſe va toujours en augmentant ; & *retardé*, quand elle va en diminuant.

DÉFINITION IX.

(9.) On appelle *Eſpace parcouru* le chemin que le corps fait pendant ſon mouvement. Cet eſpace peut être en ligne droite, ou en ligne courbe, ſelon la nature des forces qui agiſſant ſur le corps, l'obligent à ſe mettre en mouvement, & le modifient, comme on le dira ci-après.

DÉFINITION X.

(10.) Si le mouvement eſt abſolu, l'eſpace parcouru le ſera auſſi, & il ſera relatif, ſi le mouvement eſt relatif. Soit E l'eſpace parcouru par le corps A, & e celui parcouru par le corps B dans une même ligne ou direction ; on aura $E \mp e$ pour l'eſpace relatif. Le ſigne — eſt pour le cas où les corps ſe meuvent vers la même partie ; & le ſigne + pour celui où ils ſe meuvent en ſens contraire, ou vers des parties oppoſées.

Digitized by Google

DÉFINITION XI.

(11.) On appelle *Maſſe* la quantité de matiere dont un corps eſt compoſé. On dit qu'un corps a plus ou moins de maſſe, ſelon qu'il entre plus ou moins de matiere dans ſa compoſition.

DÉFINITION XII.

(12.) Un corps qui, dans toutes ſes parties, renferme des quantités égales de matiere, ſous des volumes égaux, eſt dit également ou uniformément denſe; & ſi deux ou pluſieurs corps renferment la même maſſe ſous des volumes égaux, on dit qu'ils ſont de même denſité. Un corps eſt dit plus denſe qu'un autre, lorſqu'il renferme plus de maſſe ſous le même volume, ou lorſque, ſous un moindre volume, il renferme la même quantité de maſſe. Ainſi, les denſités de deux corps ſont comme leurs maſſes ſous des volumes égaux; ou en raiſon inverſe des volumes, ſous des quantités égales de maſſe.

DÉFINITION XIII.

(13.) La force qu'on imprime à un corps quelconque, eſt l'action qu'on exerce ſur lui pour le faire ſortir de l'état dans lequel il ſe trouve, ſoit pour le faire paſſer de l'état de repos dans celui de mouvement, ſelon une direction quelconque, ſoit pour le faire paſſer d'un mouvement à un autre plus ou moins grand, dans la direction ſuivant laquelle il ſe meut. Quelle que ſoit cette force, on l'appelle *Puiſſance*; elle peut être conſtante ou variable, poſitive ou négative.

DÉFINITION XIV.

(14.) La *Force innée* de la matiere, eſt la propriété qu'ont les corps de réſiſter au changement d'état de repos, ou de mouvement, dans lequel ils ſe trouvent.

Un corps qui eſt en repos, ne peut être mis en mouvement par une force, quelle qu'elle puiſſe être, ſans qu'on n'éprouve l'action d'une autre force oppoſée, qui provient du corps, de quelque maniere que ce ſoit. La force motrice ne pourroit exercer ſon action ſans cette réſiſtance; car ſur quoi auroit-elle à s'exercer? Dans cette ſuppoſition, le corps ſe mettroit en mouvement par lui-même, ſans le ſecours d'aucune force; ce qui eſt impoſſible. Pareillement, on ne peut augmenter ou diminuer le mouvement d'un corps, ſans que la force qui opere ce changement n'éprouve l'effet d'une réſiſtance qui

Digitized by Google

qui s'oppoſe à ſon action, & cela par les mêmes raiſons. L'expérience manifeſte encore plus clairement l'exiſtence de cette force: il ne faut que pouſſer ou tirer un corps, pour ſentir une action ſemblable à celle qu'exerceroit une force oppoſée quelconque : quelle que ſoit la cauſe dont cette force provienne, & quelle que ſoit la maniere dont elle agit, il eſt certain qu'elle exiſte, & cela nous ſuffit pour l'admettre comme principe. *Newton* a donné à cette force le nom de *Force d'inertie*, ou *d'inaction*; * mais on avertit que ce nom ne lui convient proprement que dans le cas où le corps paſſe du repos au mouvement, parce qu'il réſiſte à prendre celui-ci, ou bien lorſqu'il s'agit d'augmenter le mouvement que le corps auroit déjà; mais non dans le cas où le corps étant en mouvement, une force quelconque agiroit pour le retenir: la matiere réſiſte alors à diminuer ſon mouvement, & par conſéquent, le nom de *Force d'inaction* ne convient nullement à cette réſiſtance. En général, la propriété de cette force innée eſt de réſiſter au changement de l'état dans lequel ſe trouve le corps : c'eſt une réſiſtance effective dans le cas où une force agit ſur le corps, pour augmenter ſon mouvement; mais au contraire c'eſt une impulſion, quand quelque force agit pour diminuer le même mouvement.

DÉFINITION XV.

(15.) La *Quantité de mouvement* eſt le produit de la maſſe en mouvement par ſa viteſſe.

Le mouvement d'un corps conſiſtant dans le tranſport de ſa maſſe, il eſt évident que plus la maſſe ſera grande, plus le mouvement ſera grand. Il eſt encore évident que le mouvement ſera d'autant plus grand, que la viteſſe avec laquelle le corps ſe meut ſera plus grande. La Quantité de mouvement eſt donc en raiſon compoſée de la maſſe du corps & de ſa viteſſe; c'eſt-à-dire, comme le produit Au; A déſignant la maſſe, & u la viteſſe.

AXIOME I.

(16) Tous les corps perſéverent dans leur état de repos ou de

* Les Géometres & les Phyſiciens attachent à l'expreſſion *Force d'inertie*, dont ils ſe ſervent, la même idée que notre Auteur à celle de *Force innée*. Cette derniere expreſſion nous paroît cependant plus exacte, &, par cela, préférable. Nous avertiſſons les Commençants de ne pas confondre la Force innée avec la Peſanteur; celle-ci n'agit que dans une direction, au lieu que la Force innée agit dans toutes les directions.

Digitized by Google

mouvement uniforme, dans la direction, ou ligne, ſuivant laquelle ils ſont dirigés lorſqu'ils commencent à ſe mouvoir, à moins que quelque force, ou puiſſance, ne les oblige à changer d'état. Un corps ne peut par lui-même ſe déterminer au mouvement, ou produire une force quelconque pour ſe mouvoir, s'il eſt en repos : au contraire, (14.) il réſiſte au mouvement qu'on voudroit lui imprimer, en vertu de ſa Force Innée, ou d'inertie. Il ne peut de même, quoiqu'il ſoit en mouvement, produire aucune force dans quelque direction que ce ſoit; ſon inertie le conſerve dans le même état, ſans augmenter ni diminuer ſa viteſſe, & par la même raiſon, ſans le détourner de la direction ſuivant laquelle il a commencé à ſe mouvoir : il doit donc perſévérer dans ſon état de repos, ou de mouvement uniforme, dans la direction, ou ligne, ſuivant laquelle il a été dirigé dès le commencement.

COROLLAIRE.

(17.) Il ſuit de là qu'un corps ne ſe mouvera d'un mouvement accéléré, ou retardé, que parce qu'une puiſſance quelconque agira ſur lui : cette force agira poſitivement, ou ſuivant la direction du mouvement du corps, dans le cas du mouvement accéléré; & elle agira, au contraire, négativement, ou dans une direction oppoſée à celle que ſuit le corps, dans le cas du mouvement retardé. Ainſi, il n'y a de différence entre le mouvement accéléré & le retardé, qu'en ce que l'action de la puiſſance agit poſitivement dans le mouvement accéléré, & qu'elle agit négativement dans le mouvement retardé; ou qu'en ce que la même puiſſance eſt poſitive ou négative.

AXIOME II.

(18.) La variation, ou la différencielle, du mouvement, eſt toujours proportionnelle au produit de la puiſſance dont elle eſt l'effet, par le temps qu'a duré ſon action; & cette variation ſe fait dans la direction ſuivant laquelle la puiſſance agit. Si la puiſſance α, agiſſant pendant la différencielle de temps dt, altere la viteſſe qu'auroit le corps A de la différencielle du, de ſorte que la variation, ou la différencielle, du mouvement ſoit $A\,du$, une autre puiſſance 2α, produira la variation, ou différencielle, du mouvement $2A\,du$. Car, par la ſuppoſition, la ſeule puiſſance α produit la différencielle du, l'autre puiſſance α produira donc auſſi une nouvelle différencielle du égale à la premiere; par conſéquent, la ſomme des deux différencielles eſt $2\,du$, & la variation, ou la différencielle, du mouvement

Digitized by Google

sera $2 A du$. On prouvera de même qu'une puissance 3α produira dans le mouvement la différencielle $3 A du$; & ainsi de suite. Pareillement les puissances $\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{3}\alpha$, &c. produiront, dans le mouvement du corps, les différencielles $\frac{1}{2} A du$, $\frac{1}{3} A du$, &c. Donc les variations, ou différencielles, du mouvement sont toujours proportionnelles à la puissance qui les produit.

D'un autre côté, puisque la différencielle du de la vîtesse est plus ou moins grande, selon que le temps dt, pendant lequel la puissance agit, est plus ou moins grand, il en sera de même de la différencielle $A du$ du mouvement. Donc cette variation, ou différencielle, sera en raison composée de la puissance α, & du temps dt, ou comme le produit αdt. Quant à la direction de cette différencielle du mouvement, il est évident, par le premier Axiome, qu'elle est la même que celle de la puissance.

Corollaire.

(19.) Puisque $A du$ est proportionnelle à αdt, il s'ensuit qu'on aura $A du = \alpha dt$.

Scolie I.

(20.) Quoique jusqu'ici nous n'ayons encore établi que la proportionnalité entre $A du$ & αdt, on peut cependant former une égalité parfaite entre ces deux quantités; car, quoique la puissance puisse être plus ou moins grande, on peut diminuer ou augmenter proportionnellement la différencielle dt; de maniere qu'elle soit en raison inverse de la puissance α. On trouve ensuite, par l'expérience, la vraie relation entre ces quantités.

Scolie II.

(21.) Il y a des Auteurs qui mettent en doute la proportionnalité entre la force, ou la puissance, agissante & la différencielle de la vîtesse. Il paroît cependant que, pour se convaincre de l'évidence de ce principe, il suffit de considérer, comme nous l'avons dit, que, par puissance double, on n'entend autre chose qu'une puissance qui agit précisément comme le feroient deux puissances simples, la seconde égale à la premiere. Le fondement du doute de ces Auteurs est que nous ignorons la nature de la cause, & la maniere dont elle agit. Nous nous dispenserons d'entrer dans l'examen de cette discussion, qui nous paroît d'autant moins nécessaire, que

Digitized by Google

ces mêmes Auteurs arrivent, quoique par une voie différente, aux équations mêmes que nous avons données, qui sont la base de toute la Méchanique. Ils prétendent que la connoissance de la puissance doit résulter de ses effets; mais que les effets ne peuvent se conclure par la puissance impulsive déterminée. Ce raisonnement n'est que spécieux, nous en ferons voir les défauts.*

AXIOME III.

(22.) L'action est égale à la réaction, ou les actions mutuelles de deux corps l'un sur l'autre sont égales, & dans des directions opposées. Un corps ne peut pousser ou choquer un autre corps, sans être, en même temps, choqué ou poussé par celui-ci, avec la même force dans le sens opposé. Si un agent quelconque pousse un obstacle avec une certaine force, celui-ci repousse l'agent en sens contraire avec la même action. La même chose arrive si l'agent attire un obstacle, il en est également attiré avec une force égale dans une direction contraire. La vérité de cet Axiome est confirmée journellement par l'expérience.

PROPOSITION I.

(23.) *Si un corps se meut uniformément, ou avec une vîtesse uniforme, les espaces parcourus sont entre eux comme les temps employés à les parcourir*

La vîtesse du corps n'augmentant ni ne diminuant, il parcourra toujours le même espace dans le même temps; il parcourra donc un espace double dans un temps double, un espace triple dans un temps triple, & ainsi de suite. Donc les espaces parcourus sont toujours dans la raison des temps employés à les parcourir.

PROPOSITION II.

(24.) *Si un corps se meut uniformément, avec des vîtesses différentes, les espaces qu'il parcourt en temps égaux, sont entre eux comme les vîtesses.*

Puisque la plus grande vîtesse consiste dans le plus grand espace parcouru dans le même temps, il s'ensuit que si un corps parcourt un certain espace avec une certaine vîtesse, il parcourra un espace double avec une vîtesse double, un espace triple avec une vîtesse triple, & ainsi de suite. Donc les espaces parcourus sont entre eux comme les vîtesses.

* Voyez *l'Encyclopédie*, Articles *Accélération*, *Cause*, & *Force*; & le *Traité de Dynamique* de M. *d'Alembert*, *Art.* 22 & 138.

Proposition III.

(25.) *Les espaces parcourus par des corps qui se meuvent uniformément, sont en raison composée des vîtesses avec lesquelles ils sont parcourus, & des temps employés à les parcourir.*

Soient deux corps A & B, qui se meuvent uniformément, le premier, avec la vîtesse u, parcourant l'espace a pendant le temps t; & le second, avec la vîtesse v, parcourant l'espace b pendant le temps T. Puisque les espaces parcourus, en temps égaux, sont entre eux comme les vîtesses, nous aurons l'espace parcouru par le corps B dans le temps t de la marche du corps A par cette proportion, $u : v :: a : \frac{av}{u}$. Mais nous venons de voir aussi que les espaces parcourus avec des vîtesses égales, sont en raison des temps, on aura donc $t : T :: \frac{av}{u} : b$, d'où l'on tire $aTv = btu$, & par conséquent $a : b :: tu : Tv$: c'est-à-dire que les espaces parcourus sont en raison composée des temps & des vîtesses.

Corollaire I.

(26.) Si l'on divise l'équation $aTv = btu$ par le produit $Tv . tu$, on aura $\frac{a}{tu} = \frac{b}{Tv}$, dans laquelle si nous faisons $\frac{b}{Tv} = 1$, en supposant que les quantités b, T, v soient constantes, nous aurons l'équation $1 = \frac{a}{tu}$, qui donne $u = \frac{a}{t}$. Donc la vîtesse d'un corps est en raison directe de l'espace parcouru, & en raison inverse du temps employé à le parcourir.

Corollaire II.

(27.) De la même équation on tire pareillement $t = \frac{a}{u}$; c'est-à-dire, que le temps dans lequel un corps parcourt l'espace a, est en raison directe de cet espace, & en raison inverse de la vîtesse avec laquelle il le parcourt.

Corollaire III.

(28.) Si l'on exprime le temps t en secondes, & si l'on en prend une pour l'unité de temps, dans le cas où $t = 1$, on aura $u = a$; c'est-à-dire que la vîtesse est égale à l'espace parcouru pendant une seconde de temps. Il suit de là que si l'on exprime le temps en secondes, l'espace parcouru pendant une seconde de temps sera la mesure de la vîtesse.

Digitized by Google

COROLLAIRE IV.

(29.) Le mouvement accéléré, ou retardé, peut être regardé comme uniforme pendant un instant, ou pendant une différencielle de temps dt; car, pendant cet instant, la variation de la vîtesse, étant une quantité différencielle, peut être regardée comme nulle, ou égale à zéro par rapport à la vîtesse acquise & finie u. Si donc da représente la différencielle de l'espace parcouru pendant cet instant dt, nous aurons (26.) $u = \frac{da}{dt}$, & par conséquent $da = u\,dt$.

PROPOSITION IV.

(30.) *Lorsqu'un corps se meut d'un mouvement accéléré, ou retardé, la quantité dont sa vîtesse à chaque instant de sa course, surpasse sa vîtesse initiale, ou en est surpassée, est toujours* $= \frac{1}{A}\int \alpha\, dt$.

Soit V la vîtesse initiale du corps, c'est-à-dire, celle avec laquelle il se meut au premier instant de l'action, ou du temps t; en intégrant l'équation $\frac{\alpha\, dt}{A} = du$ (18.) nous aurons $\frac{1}{A}\int \alpha\, dt = u - V$, * c'est-à-dire que la quantité dont la vîtesse actuelle du corps surpasse sa vîtesse initiale, ou en est surpassée, est toujours $= \frac{1}{A}\int \alpha\, dt$.

COROLLAIRE I.

(31.) Si la puissance α étoit constante, on auroit $\frac{\alpha t}{A} = u - V$; c'est-à-dire, que la quantité dont la vîtesse actuelle du corps surpasse sa vîtesse initiale, ou en est surpassée, est en raison composée des raisons directes de la puissance & du temps, & de la raison inverse de la masse.

COROLLAIRE II.

(32.) Si $V = 0$, c'est-à-dire, si le corps étoit en repos lorsque

* u représente la vîtesse que prend le corps en vertu de la puissance α qui est accélératrice ou rétardatrice; du en est la différencielle : donc $\int du = u + C$, C marquant une constante qui complette l'intégrale; par conséquent, $\frac{1}{A}\int \alpha\, dt = u + C$. Mais lorsque la puissance α n'agit point, c'est-à-dire lorsqu'elle est égale à zéro, on a $u = V$, & l'intégrale $\frac{1}{A}\int \alpha\, dt = 0$: donc on a, dans ce cas, $u + C$, ou $V + C = 0$, ce qui donne $C = -V$. Substituant cette valeur de C dans l'équation $\frac{1}{A}\int \alpha\, dt = u + C$, on a $\frac{1}{A}\int \alpha\, dt = u - V$, comme l'Auteur l'a trouvé.

Digitized by Google

la puiſſance α a commencé ſon action, ou s'il commençoit ſa courſe du repos, on auroit $\frac{1}{A}\int \alpha\, dt = u$: & ſi α étoit conſtante, on auroit $\frac{\alpha t}{A} = u$.

COROLLAIRE III.

(33.) Si, au contraire, le corps, après avoir été mis en mouvement, parvient à l'état de repos, comme il peut arriver dans le mouvement retardé, on aura $u = 0$: donc $\frac{\alpha t}{A} = -V$: ou, dans ce cas, en changeant le ſigne de la puiſſance, à cauſe que le mouvement eſt retardé, $\frac{\alpha t}{A} = V$.

COROLLAIRE IV.

(34.) La viteſſe acquiſe dans le mouvement accéléré qui commence du repos eſt $u = \frac{\alpha t}{A}$, & la viteſſe entiérement perdue dans le mouvement retardé eſt $V = \frac{\alpha t}{A}$: donc ces viteſſes ſeront égales, ſi des puiſſances égales α agiſſent pendant le même temps t ſur des maſſes égales A.

PROPOSITION V.

(35.) *L'eſpace parcouru par un corps, à compter du premier inſtant de ſon mouvement, eſt* $= Vt + \frac{1}{A}\int (dt \int \alpha\, dt)$.

Puiſque $u = \frac{da}{dt}$ (29.) on aura donc (30.) $\frac{1}{A}\int \alpha\, dt = \frac{da}{dt} - V$; d'où l'on tire $\frac{da}{dt} = V + \frac{1}{A}\int \alpha\, dt$, ou $da = V dt + \frac{dt}{A}\int \alpha\, dt$: & en intégrant, $a = Vt + \frac{1}{A}\int (dt \int \alpha\, dt)$; c'eſt-à-dire que l'eſpace parcouru par le corps, à compter du premier inſtant du mouvement, eſt $= Vt + \frac{1}{A}\int (dt \int \alpha\, dt)$.

COROLLAIRE I.

(36.) Si la puiſſance α eſt conſtante, on aura $a = Vt + \frac{\alpha t^2}{2A}$.

COROLLAIRE II.

(37.) Si le corps commençoit ſa courſe du repos, alors on auroit $V = 0$, & par conſéquent $a = \frac{1}{A}\int (dt \int \alpha\, dt)$; ou, ſi la force, ou

Digitized by Google

puiſſance α étoit conſtante, $a = \frac{\alpha t^2}{2A}$: c'eſt-à-dire que les eſpaces parcourus ſont alors comme les quarrés des temps employés à les parcourir; & réciproquement, ſi les eſpaces parcourus ſont comme les quarrés des temps, la force, ou puiſſance accélératrice, ſera conſtante.

COROLLAIRE III.

(38.) De l'équation $u = \frac{\alpha t}{A}$ trouvée, *Art.* 32. on tire $\alpha = \frac{Au}{t}$; ſubſtituant cette valeur dans la derniere équation, on aura $a = \frac{1}{2} tu$; c'eſt-à-dire que les eſpaces parcourus depuis le commencement du mouvement, ſont en raiſon compoſée des temps & des viteſſes acquiſes.

COROLLAIRE IV.

(39.) L'eſpace parcouru par un corps qui ſe meut avec une viteſſe uniforme u, pendant le temps t, eſt (26.) $a = tu$: donc l'eſpace parcouru par un corps avec une viteſſe uniforme, eſt double de l'eſpace parcouru dans le même temps par un mouvement accéléré, qui commence du repos, lorſque la viteſſe acquiſe, dans celui-ci, eſt devenue la même que la viteſſe uniforme.

COROLLAIRE V.

(40.) Dans le mouvement accéléré qui commence du repos, la puiſſance α étant ſuppoſée conſtante, on a $a = \frac{\alpha t^2}{2A}$; & dans le retardé, $a = Vt - \frac{\alpha t^2}{2A}$; mais ſi le corps qui ſe meut d'un mouvement retardé, parvient au repos, comme dans ce cas $V = \frac{\alpha t}{A}$ (34.), on aura auſſi $a = \frac{\alpha t^2}{A} - \frac{\alpha t^2}{2A} = \frac{\alpha t^2}{2A}$. Donc l'eſpace parcouru avec un mouvement accéléré qui commence du repos, & celui qui eſt parcouru dans le mouvement retardé qui arrive au repos, ſeront égaux, ſi les puiſſances α qui agiſſent dans les deux cas, ſont égales & conſtantes, & ſi elles agiſſent dans le même temps t ſur des corps égaux A.

PROPOSITION VI.

(41.) *L'eſpace parcouru par un corps depuis le commencement de ſa courſe eſt* $= A \int \frac{d\,d\,u}{\alpha}$.

Puiſque (29.) $\frac{da}{dt} = u$, & que (19.) $\frac{\alpha\, dt}{A} = d\,u$, en multipliant

pliant ces deux équations l'une par l'autre, on aura $\frac{\alpha\, da}{A} = u\, du$, ce qui donne $da = \frac{A}{\alpha} u\, du$, & en intégrant $a = A \int \frac{u\, du}{\alpha}$.

COROLLAIRE I.

(42.) Si la puissance α est constante, on aura $a = \frac{A}{2\alpha}(u^2 - V^2)$ *.

COROLLAIRE II.

(43.) Si le mouvement a commencé du repos, ou si $V = 0$ alors on aura $a = \frac{Au^2}{2\alpha}$; c'est-à-dire que lorsque la puissance α est constante, les espaces parcourus depuis le repos, sont entre eux comme les quarrés des vitesses.

PREMIER PRINCIPE D'EXPÉRIENCE.

(44.) *L'expérience a appris que les corps pesants à de petites distances de la surface de la terre, parcourent, en tombant librement, depuis le premier instant de leur chûte, des espaces qui sont entre eux comme les quarrés des temps employés à les parcourir.*

COROLLAIRE I.

(45.) Il suit delà que la puissance, ou force, qui anime les corps pesants, dans le voisinage de la surface de la terre, & que nous nommons Gravité, est une force constante. (37.)

COROLLAIRE II.

(46.) Nous aurons donc, dans le cas des corps graves, dont la chûte commence du repos, $u = \frac{\alpha t}{A}$, $a = \frac{\alpha t^2}{2A} = \frac{Au^2}{2\alpha}$.

SECOND PRINCIPE D'EXPÉRIENCE.

(47.) *On sçait encore par l'expérience que tous les corps pesants, grands ou petits, parcourent, en tombant dans le voisinage de la surface de la terre, des espaces égaux en temps égaux.*

* Voyez la Note, page 62.

Digitized by Google

COROLLAIRE I.

(48.) Si donc α & β sont les puissances constantes qui animent les corps A & B, on aura, d'après l'expérience, $\frac{\alpha t^2}{2A} = \frac{\beta t^2}{2B}$, ou, parce qu'on suppose les temps égaux, $\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B}$. Donc $\alpha : \beta :: A : B$; c'est-à-dire que dans les corps pesants, les puissances, ou gravités sont entre elles comme les masses.

COROLLAIRE II.

(49.) On a vu ci-dessus que les densités sous des volumes égaux sont entre elles comme les masses (12.); il s'ensuit que les densités sont aussi comme les gravités. Ainsi on pourra exprimer la densité des corps pesants par le poids d'un pied cube de la matiere qui les compose.

COROLLAIRE III.

(50.) La quantité $\frac{\alpha}{A}$ étant toujours constante, nous pourrons mettre à sa place la constante ξ; d'où l'on tirera, pour les corps pesants, $u = \xi t$, $a = \frac{1}{2}\xi t^2 = \frac{u^2}{2\xi}$ (46.).

TROISIEME PRINCIPE D'EXPÉRIENCE.

(51.) *L'expérience nous a aussi enseigné que l'espace que les corps graves parcourent dans le voisinage de la surface de la terre, en tombant verticalement depuis le repos, est à très-peu-près de 16 pieds anglais, dans la premiere seconde de leur chûte.* *

COROLLAIRE I.

(52.) Mésurant en secondes le temps de la chûte des corps pesants, & en pieds les espaces parcourus, nous aurons, pour le cas où $t = 1$, $a = 16$; ce qui produit $16 = \frac{1}{2}\xi$, ou $\xi = 32 = \frac{\alpha}{A}$. Cette valeur étant substituée dans les équations de *l'Art.* 50, les change en celles-ci, $u = 32t$, $a = 16t^2 = \frac{u^2}{64}$: d'où l'on tire $\sqrt{a} = 4t = \frac{1}{8}u$, & $8\sqrt{a} = u = 32t$.

* Ce nombre répond à 15 pieds 0 pouc. 2 lig. 8 p. français. Nous emploîrons, avec l'Auteur, ce nombre quarré, parce qu'il est très-commode dans le calcul. Le pied anglais est au pied français :: 811 : 864. Partant 864 pieds anglais font 811 pieds français; ou le pied anglais contient 11 pouces, 3 lignes, 2 points du pied français.

Digitized by Google

Corollaire II.

Planc. I.

(53.) Si, pour plus d'exactitude & de généralité, on représente par K l'espace que parcourt, pendant la premiere seconde de sa chûte, un corps grave qui tombe verticalement depuis le repos, on aura $K = \frac{1}{2}\xi$, ou $\xi = 2K$. Cette valeur substituée dans les équations de l'*Art.* 50, les change en celles-ci, $u = 2Kt$, $a = Kt^2 = \frac{u^2}{4K}$; d'où l'on tire $\sqrt{a} = \frac{u}{2\sqrt{K}} = t\sqrt{K}$, & $2\sqrt{aK} = u = Kt$.

Scolie.

(54.) On déterminera dans son temps le véritable espace que parcourent, pendant la premiere seconde de leur chûte, les corps graves en tombant librement, & on verra que cet espace est d'un peu plus des 16 pieds anglais que nous avons indiqués. Cependant, comme la différence est petite, & qu'en la négligeant il n'en peut résulter une erreur considérable dans les calculs dont nous avons besoin, on peut faire constamment usage de ce nombre 16, qui facilite beaucoup les opérations, attendu qu'il est quarré.

CHAPITRE II.

Du Mouvement composé.

Définition XVI.

(55.) On appelle *Mouvement composé*, celui qui résulte de l'action de deux, ou d'un plus grand nombre de puissances qui agissent sur un corps, chacune dans des directions particulieres.

Proposition VII.

(56.) *Le mouvement d'un corps suivant une direction quelconque, n'est point altéré par l'action des puissances qui agiroient sur lui suivant d'autres directions quelconques; & à chaque instant le corps parcourt de petits espaces paralleles à chacune des directions.*

Fig. 1.

Si l'on suppose le corps A sur un plan EF, il est clair qu'il peut se mouvoir sur ce plan dans la direction AG, & qu'en même temps le plan peut se mouvoir suivant EH, GI, sans qu'un de ces mouvements trouble l'autre; parce qu'en ne supposant aucune puissance

Digitized by Google

FRANC. I. qui trouble le mouvement du corps suivant AG, ce mouvement doit se continuer sans altération, en vertu de la force d'inertie. Ce qu'on dit ici de deux actions, ou mouvements, se peut dire d'un plus grand nombre; le raisonnement seroit toujours le même. Donc le mouvement d'un corps suivant une direction, ne peut s'altérer par l'action de puissances qui agiroient sur lui suivant d'autres directions quelconques; & à chaque instant le corps parcourt des espaces AG, EH, paralleles à chacune de ces directions.

PROPOSITION VIII.

FIG. 2. (57.) *Si deux puissances agissent en même temps sur un corps* A, *l'une suivant la direction* AE, *& l'autre suivant la direction* AF; *le corps marchera selon une direction moyenne, & décrira une ligne* AGH, *dont on déterminera l'équation en égalant les valeurs du même temps dans lequel le corps marcheroit librement suivant chacune des deux directions, ces valeurs étant fournies par la nature du mouvement suivant chaque direction.*

Le corps, en quelque instant de son mouvement que ce soit, doit se mouvoir parallélement à AE, en vertu de l'action de la premiere puissance, & parallélement à EF, en vertu de l'action de la seconde; & il doit parcourir de petits espaces GI, IH, égaux à ceux KE, LF, qui sont les différencielles des espaces que chacune des puissances lui feroit parcourir dans le même temps, si elle agissoit seule. Mais la somme des espaces KE est l'abscisse AE, & la somme des espaces $LF = IH$, est l'ordonnée EH: donc si l'on tire de la nature du mouvement qui auroit lieu suivant chacune des directions, si chaque puissance agissoit séparément, la valeur du temps dans lequel le corps parcourroit librement chaque espace AE, EH, & si l'on égale ces deux valeurs, attendu que le temps est le même, l'équation qui en résultera, sera celle de la ligne AGH, que le corps parcourt.

EXEMPLE I.

(58.) Supposons que le mouvement du corps A soit composé de deux autres qui, pris séparément, eussent été uniformes, le premier se faisant dans la direction AE, & le second dans la direction AF. Exprimons par a les espaces parcourus suivant la premiere direction, & la viteſſe par u; exprimons aussi par b les espaces parcourus suivant la seconde direction, & la viteſſe par v. Cela posé, nous aurons (27.) $t = \frac{a}{u} = \frac{b}{v}$, ce qui donne $av = bu$; mais les mouvements étant uni-

Digitized by Google

formes, les vitesses sont constantes : cette équation appartient donc à la ligne droite *. Ainsi, dans ce cas, le corps décrira une ligne droite, en vertu du mouvement composé qu'on lui aura imprimé.

Exemple II.

(59.) Supposons maintenant que le mouvement suivant AE ne soit pas uniforme, mais qu'il soit produit par une puissance accélératrice constante ; dans ce cas, nous aurons (36.) $a = Vt + \frac{\alpha t^2}{2A}$, dans laquelle substituant $t = \frac{b}{v}$, & ordonnant, on a $\frac{2Av^2}{\alpha}; (a - \frac{Vb}{v})$, équation à la Parabole dont le parametre est $\frac{2Av^2}{\alpha}$, le corps décrira donc cette courbe en vertu du mouvement composé qu'il aura reçu. **

Corollaire I.

(60.) De là il suit qu'en vertu du mouvement composé, le corps parcourra la ligne AG dans le même temps qu'il eût employé à parcourir la droite AK, ou AL, s'il n'eût éprouvé que l'action d'une seule puissance.

Corollaire II.

(61.) La direction AGH du mouvement composé est toujours dans le même plan que les directions AK, AL des mouvements simples composants. Car si, par chaque point de la direction AL, on mene une parallele à la direction AK, toutes ces paralleles composeront le plan dans lequel se trouvent les deux directions AK, AL des mouvements composants ; & comme le corps doit toujours se trouver sur ces paralleles, sans pouvoir jamais s'en écarter, (16.) il s'en-

---

* Les deux variables a & b n'étant qu'au premier degré, l'équation est à la ligne droite, car toute équation du premier degré appartient toujours à cette ligne.

** Cette équation appartient à la Parabole, parce qu'elle ne renferme que le quarré d'une des variables, sçavoir, celui de l'espace b que parcourroit le corps suivant AF dans le temps t ; l'autre variable, qui est l'espace a qu'il parcourroit suivant AE dans le même temps, étant au premier degré. (Voyez, pour la démonstration, l'excellent Cours de Mathématiques de M. *Bezout*, part. III, §. 387.) La quantité $a - \frac{Vb}{v}$, qui représente en général l'abscisse de cette Parabole, $= a - Vt = \frac{\alpha t^2}{2A}$ (36.) l'espace parcouru par le corps A, en vertu de la force accélératrice constante α (37.). Cela est d'ailleurs évident, en considérant que a est l'espace total que parcourt le corps dans le temps t, en vertu de sa vitesse initiale V, & de la force accélératrice constante α ; & que Vt est l'espace qu'il parcourt dans le même temps t, en vertu seulement de sa vitesse initiale. Donc, &c. Si le corps étoit en repos, lorsqu'il reçoit l'action de la force accélératrice, alors $V = 0$, & l'équation devient $\frac{2Av^2}{\alpha} a = b^2$..

Digitized by Google

ſuit qu'il ne peut jamais ſortir du plan qui paſſe par ces deux directions.

COROLLAIRE III.

(62.) Si trois puiſſances agiſſent dans le même temps ſur un corps, chacune ſuivant des directions particulieres, la direction compoſée que prendra le corps, ſera une ligne moyenne entre les trois directions; & l'équation de cette ligne ſe trouvera en égalant les valeurs du même temps, tirées de la nature du mouvement qu'auroit le corps, s'il marchoit librement ſuivant chacune de ces directions.

On voit clairement, ſans qu'il ſoit néceſſaire d'y inſiſter, qu'on trouvera facilement la direction compoſée, dans le cas de trois puiſſances; car (61.) on trouvera d'abord la direction réſultante de deux directions ſimples; & avec cette réſultante & la troiſieme direction, on trouvera celle que ſuivra réellement le corps en vertu de ces trois puiſſances.

COROLLAIRE IV.

(63.) Si les trois directions ſont dans un même plan, la direction réſultante ſe trouvera auſſi dans ce plan. C'eſt une conſéquence néceſſaire de ce qui a été dit.

COROLLAIRE V.

(64.) Ce qui a été dit au ſujet de trois puiſſances, doit s'entendre également de quatre, de cinq, ou d'un plus grand nombre de puiſſances qui agiroient enſemble ſur un même corps ſuivant des directions différentes.

PROPOSITION IX.

(65.) *La différencielle* G H *de l'eſpace que le corps* A *parcourt en vertu des deux puiſſances* α *&* β *qui l'animent ſuivant les directions* A E, A F, *eſt* $= \frac{dt}{A}\left((\int \alpha\, dt)^2 + (\beta\, dt)^2 \pm 2(\int \alpha\, dt)(\int \beta\, dt)\cos\Sigma\right)^{\frac{1}{2}} : \Sigma$ *exprimant l'angle* E A F *que forment les deux directions, & le rayon étant égal à l'unité.*

Si du point *G* on abaiſſe ſur *E H*, la perpendiculaire *G N*, on aura, par les Elements de Géométrie, $NI = GI\cos\Sigma$, & $GH^2 = GI^2 + IH^2 \pm 2NI \times IH = GI^2 + IH^2 \pm 2IH.GI\cos\Sigma$. Le ſigne + étant pour le cas où l'Angle *E A F* ſera aigu, & le ſigne — pour le cas où il ſera obtus. *

* Parce que l'angle *E A F* étant obtus, la perpendiculaire *G N* tombe en dedans du triangle *G I H*: au contraire, elle tombe en dehors, lorſque ce même angle eſt aigu. C'eſt le cas de la Figure.

Digitized by Google

Substituant maintenant dans cette équation les valeurs de $GI = da = (35.)\frac{dt}{A}\int\alpha\,dt$, & de $IH = db = \frac{dt}{A}\int\beta\,dt$, on aura $GH^2 = \frac{dt^2}{A^2}(\int\alpha\,dt)^2 + \frac{dt^2}{A^2}(\int\beta dt)^2 \pm \frac{2dt^2}{A^2}(\int\alpha\,dt)(\int\beta\,dt)\,cos\Sigma$, & par conséquent $GH = \frac{dt}{A}\left((\int\alpha\,dt)^2 + (\int\beta dt)^2 \pm 2(\int\alpha dt)(\int\beta dt)cos\Sigma\right)^{\frac{1}{2}}$.

SCOLIE I.

(66.) Dans tout le cours de cet Ouvrage nous exprimerons le rayon, ou sinus total, par l'unité, afin de simplifier le calcul.

COROLLAIRE I.

(67.) Si l'angle $EAF = \Sigma$ étoit $= o$; c'est-à-dire, si les deux directions AE, AF, concouroient ensemble de maniere à ne former qu'une seule & même direction, alors $cos\Sigma = 1$, & la valeur de GH devient $= \frac{dt}{A}\left((\int\alpha dt)^2 + (\int\beta dt)^2 \pm 2(\int\alpha dt)(\int\beta dt)\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{dt}{A}\int dt(\alpha \pm \beta)$.

COROLLAIRE II.

(68.) Si, outre cette condition, on avoit $\alpha = \beta$, on auroit $GH = \frac{2dt}{A}\int\alpha\,dt$, pour le cas où l'angle GIH seroit obtus; c'est-à-dire, lorsque les deux puissances seroient dirigées dans le même sens; & $GH = \frac{dt}{A}\int dt.o = o$, pour le cas où l'angle GIH seroit aigu, ou que les deux puissances seroient dirigées en sens contraires.

COROLLAIRE III.

(69.) Dans ce dernier cas, le corps restera donc sans mouvement.

COROLLAIRE IV.

(70.) Si le corps reste sans mouvement, ce sera parce que des puissances égales agissent dans des directions opposées.

SCOLIE II.

(71.) De même qu'on a trouvé la valeur de GH, lorsque le corps n'est soumis qu'à l'action de deux puissances, on la trouvera également lorsqu'il y en aura trois, ou un plus grand nombre.

DÉFINITION XVII.

(72.) La *décomposition du mouvement* est la division qu'on en fait,

Digitized by Google

PLANC. I. en supposant qu'il procede de différentes actions, quoique dans la réalité il ne procede que d'une seule, ou d'un moindre nombre que celui qu'on suppose.

PROPOSITION X.

(73.) *Si l'on suppose que l'action d'une puissance* α *sur un corps* A, FIG. 3. *suivant la direction* AH, *procede de l'action de deux autres puissances* $m\alpha$, $n\alpha$, *suivant les directions* AE, AF, *de façon que l'effet de ces deux puissances soit égal à celui qui résulte de la seule puissance* α; *ces puissances* α, $m\alpha$ & $n\alpha$, *seront entre elles comme les droites* AH, AE & AF, *qui sont déterminées par les droites* HE, HF *paralleles aux directions* AE, AF; m & n *exprimant deux quantités constantes.*

Car si deux puissances $m\alpha$ & $n\alpha$ agissant séparément sur le corps A suivant les directions AE, AF, sont telles que, par leurs actions séparées, l'une conduise le corps de A en E, & l'autre de A en F, dans le même temps; il est évident que, par leurs actions réunies, elles le conduiroient, dans le même temps, de A en H: (57.) or c'est précisément l'effet que produit la seule puissance α, agissant dans la direction AH. Mais on a (35.) $AH=\int(\frac{dt}{A}\int\alpha dt)$, $AE=\int(\frac{dt}{A}\int m\alpha dt)$ & $AF=\int(\frac{dt}{A}\int n\alpha dt)$: donc les droites AH, AE & AF seront entre elles comme $\frac{dt}{A}\int\alpha dt$, $\frac{dt}{A}\int m\alpha dt$ & $\frac{dt}{A}\int n\alpha dt$; ou comme 1 m & n; c'est-à-dire, comme α, $m\alpha$ & $n\alpha$.

COROLLAIRE I.

(74.) La puissance qui agit suivant AE sera donc $=\frac{\alpha AE}{AH}$, & celle qui agit suivant AF, sera $=\frac{\alpha AF}{AH}$.

COROLLAIRE II.

(75.) Puisque dans le triangle AEH, les côtés AH, AE & $EH=AF$ sont entre eux comme les sinus des angles qui leur sont opposés; il s'ensuit que les puissances α, $m\alpha$ & $n\alpha$ seront aussi entre elles comme ces mêmes sinus.

COROLLAIRE III.

(76.) La décomposition du mouvement étant arbitraire, on peut prendre

Digitized by Google

prendre comme on voudra les directions *AE*, *AF*; & tirant ensuite d'un point quelconque *H*, les paralleles *HF*, *HE*, à ces directions; si alors on exprime par *AH* la puissance qui agit effectivement dans cette direction, les lignes *AE*, *AF* exprimeront les deux puissances dans lesquelles elle se décompose, & qui agissant dans ces directions, produiroient le même effet. PLANC. I.

PROPOSITION XI.

(77.) *Si l'on suppose que l'action d'une puissance qui agit sur un corps* A *dans la direction* AH, *provienne de trois autres puissances, qui, agissant dans les directions* AF, AG, AE, *produiroient le même effet; ces quatre puissances seront entre elles comme les lignes* AH, AF, AG & AE. FIG. 41

Car si la puissance qui agit suivant *AH*, est représentée par la ligne même *AH*, on peut la concevoir décomposée en deux autres *AF*, *AI*, qui produiroient le même effet (76.). La puissance qui agit suivant *AI*, peut l'être de même en deux autres *AG*, *AE*, qui produiroient le même effet qu'elle. Ainsi la puissance *AH* sera décomposée en trois autres *AF*, *AG*, *AE*, qui, par leurs actions réunies, produiront le même effet que cette puissance seule. Donc ces quatre puissances seront entre elles comme les lignes *AH*, *AF*, *AG* & *AE*.

COROLLAIRE I.

(78.) Les trois directions *AF*, *AG*, *AE*, étant arbitraires (76.), elles peuvent se prendre comme on voudra; & tirant d'un point quelconque *H*, & par le point *A* les paralleles arbitraires *HF*, *AI*, & ensuite les paralleles *HI*, *IG*, *IE* aux directions arbitraires *AF*, *AE*, *AG*, ces paralleles détermineront les lignes *AF*, *AG*, *AE*, qui exprimeront les puissances dans lesquelles se décompose la premiere puissance *AH*, & qui, par leur réunion, produiront le même effet qu'elle.

COROLLAIRE II.

(79.) On peut, par ce même procédé, décomposer une puissance quelconque en quatre, cinq, enfin en tel nombre de puissances qu'on voudra, & qui, par la réunion de leurs actions, produiront le même effet que cette puissance seule.

Digitized by Google

PLANC. I.

CHAPITRE III.

Du Centre de Gravité d'un Syſtême de corps ; & de ſon Mouvement.

DÉFINITION XVIII.

(80.) ON appelle *Syſtême de corps* un aſſemblage de pluſieurs corps, comme *A*, *B*, *C*, *&c.* de même qu'on a nommé *Syſtême du Monde*, l'aſſemblage du Soleil & des Planetes, &c. dont *Newton* a ſi parfaitement expliqué les mouvements par les ſeuls principes de la Méchanique, & par la loi de l'attraction univerſelle, que l'expérience confirme chaque jour de plus en plus.

PROPOSITION XII.

FIG. 4.

(81.) *Si deux corps, ou maſſes* A & B ; *ſuppoſés en repos, ſont mis en mouvement par l'action de deux puiſſances* α & β, *dont les directions* AE, BF, *ſoient paralleles ; la differencielle de l'eſpace parcouru par le point* G *pris dans la ligne* Gg *parallele aux directions* AE, BF *des puiſſances, ſera* $= \frac{AA'dt\int\beta dt + BB'dt\int\alpha dt}{AB(A'+B')}$: A' & B' *exprimant les diſtances* AG, GB, & t *le temps.*

Tirez la ligne *FH*, parallele à *BA*, nommant *a* & *b* les eſpaces parcourus par les corps *A* & *B*, & prenant *AE* & *BF* pour les différencielles de ces eſpaces, on aura $HE = da - db$. Or, à cauſe des paralleles, on a *FH*, ou $(A'+B') : HE$, ou $(da-db)$ :: *FH*, ou $(B') : hg = \frac{B'}{A'+B'}(da-db)$: donc *Gg*, différencielle de l'eſpace parcouru par le point $G = db + \frac{B'}{A'+B'}(da-db) = \frac{A'db+B'da}{A'+B'}$. Si l'on ſubſtitue maintenant dans cette expreſſion (35) à la place de *db* ſa valeur $\frac{dt}{B}\int\beta dt$, & à la place de *da* ſa valeur $\frac{dt}{A}\int\alpha dt$, on aura $GH = \frac{\frac{A'dt}{B}\int\beta dt + \frac{B'dt}{A}\int\alpha dt}{A'+B'} = \frac{AA'dt\int\beta dt + BB'dt\int\alpha dt}{AB(A'+B')}$.

SCOLIE.

(82.) On ſuppoſe, pour le préſent, que la maſſe de chaque corps eſt infiniment petite, ou qu'elle eſt toute réunie en un point, & que c'eſt ſur ce point que la puiſſance agit.

Digitized by Google

Corollaire I.

Planc. I.

(83.) Si $AA'=BB'$, la différencielle de l'espace parcouru par le point G, c'est-à-dire Gg, sera $=\frac{dt\int(\alpha+\beta)dt}{A+B}$; car en substituant AA' à la place de BB', dans l'expression $Gg=\frac{AA'dt\int\beta dt+BB'dt\int\alpha dt}{AB\,(A'+B')}$ elle deviendra $Gg=\frac{AA'dt\int\beta dt+AA'dt\int\alpha dt}{AA'(A+B)}=\frac{dt\int(\alpha+\beta)dt}{A+B}$.

Corollaire II.

(84.) Comme les distances A' & B' n'entrent pas dans l'expression qu'on vient de trouver, il s'ensuit que ces distances n'en alterent point la valeur. Cette expression sera donc toujours la même, à quelque distance du point G que soient les corps, pourvu que les distances A' & B' soient toujours en raison inverse des masses A & B; condition exprimée par l'équation $AA'=BB'$.

Corollaire III.

(85.) On voit encore qu'on peut supposer les distances GA, GB diminuées à l'infini; c'est-à-dire, les supposer égales à zéro, sans que l'expression ci-dessus en soit altérée. Dans ce cas les deux corps seront réunis dans le point G, & marcheront dans la ligne Gg. Pareillement, les deux puissances réunies agiront comme une seule $=\alpha+\beta$ sur le corps $A+B$. Donc lorsque les corps A & B sont animés par les puissances α & β, le point G parcourt suivant Gg parallele aux directions AE & BF, le même espace que lorsque les deux corps, réunis au point G, sont animés suivant Gg par la puissance $\alpha+\beta$.

Proposition XIII.

(86.) *Si trois corps, ou masses*, A, B, C *sont animés par trois puissances* α, β, γ, *suivant les directions paralleles* AE, BF, CH; Fig. 6. *& si l'on prend le point* G *de maniere qu'on ait* $A.Ag=B.Bg$ *&* $(A+B)\,Gg=C.GC$; *je dis que la différencielle de l'espace parcouru par le point* G *sera* $=\frac{dt\int(\alpha+\beta+\gamma)dt}{A+B+C}$.

Le point g ayant été pris de maniere qu'on ait $A.Ag=B.gB$, la différencielle de l'espace parcouru par le point g est la même que celle que parcourroit le corps $A+B$ placé en g, & animé par la puissance $\alpha+\beta$, suivant la direction gh parallele aux lignes AE, BF, CH.

Digitized by Google

PLANC. I. Il eſt donc évident que, quant à l'effet, le cas eſt le même que ſi les deux corps C & $A+B$, l'un placé en C, & l'autre en g, étoient animés par les puiſſances γ & $\alpha+\beta$, ſuivant les directions paralleles CH, gh. Ainſi, la différencielle de l'eſpace parcouru par le point G, ſuivant la parallele GI aux autres directions, ce point étant pris de maniere qu'on ait $(A+B)\,Gg=C.GC$; ou, ce qui revient au même, de maniere que les diſtances gG, GC ſoient en raiſon inverſe des maſſes $A+B$ & C, cette différencielle, dis-je, ſera exprimée par la formule $\frac{df(\alpha+\beta)dt}{A+B}$, en y ſubſtituant $\alpha+\beta$ à la place de α & γ à la place de β; $A+B$ pour A, & C pour B. Donc la différencielle de l'eſpace parcouru par le point G, ſuivant la droite GI parallele aux directions AE, BF, CH, ſera $= \frac{df(\alpha+\beta+\gamma)\,dt}{A+B+C}$.

COROLLAIRE I.

(87.) Les diſtances Ag, gB, gG, GC, ne ſe trouvant point dans l'expreſſion $\frac{df(\alpha+\beta+\gamma)\,dt}{A+B+C}$, il s'enſuit qu'elles n'ont aucune influence ſur la valeur de cette expreſſion; & par conſéquent qu'elle reſtera toujours la même, quelles que puiſſent être ces diſtances, pourvu toutefois que Ag, gB, ſoient en raiſon inverſe des maſſes A & B, & que de même gG & GC, ſoient en raiſon inverſe des maſſes $A+B$, & C.

COROLLAIRE II.

(88.) Les diſtances Ag, gB, gG, GC, peuvent donc être diminuées à l'infini, ou ſe réduire à zéro, ſans que la valeur de l'expreſſion $\frac{df(\alpha+\beta+\gamma)\,dt}{A+B+C}$ en ſoit altérée: & comme dans ce cas les trois corps A, B, C ſe trouveront réunis dans le point G, ainſi que les trois puiſſances α, β & γ, qui n'en feront plus qu'une ſeule $= \alpha+\beta+\gamma$; il s'enſuit que le point G parcourra le même eſpace dans la direction GI parallele aux directions AE, BF, GH, lorſque les corps A, B, C ſont animés par les puiſſances α, β, γ, que ſi les trois corps réunis en un ſeul au point G, étoient animés, ſuivant la direction GI, par la puiſſance $\alpha+\beta+\gamma$.

PROPOSITION XIV.

FIG. 7. (89.) *Si l'on a quatre corps, ou maſſes*, comme A, B, C, D, *animés par les quatre puiſſances* α, β, γ, δ, *chacune d'elles agiſſant*

Digitized by Google

ſur le corps qui lui correſpond ſuivant les directions paralleles AE, BF, CH, DL; *& ſi l'on prend le point* G *de maniere que* A . Ag=B. Bg; *que* (A+B) gK=C.KC; *& que* (A+B+C) GK=D . DG: *je dis que la différencielle de l'eſpace parcouru par le point* G *ſera* $= \frac{dtf(\alpha+\beta+\gamma+\delta)dt}{A+B+C+D}$.

On vient de démontrer que la différencielle de l'eſpace parcouru par le point K, en vertu des trois puiſſances α, β, γ, qui animent les corps A, B, C, eſt la même que celle que parcourroient ces corps, ſi, étant réunis tous les trois en un ſeul au point K, ils étoient animés par la puiſſance $\alpha+\beta+\gamma$, ſuivant la direction KI parallele aux autres directions AE, BF, *&c.* Donc, quant à l'effet, ce cas eſt le même que s'il y avoit ſeulement deux corps D, & $A+B+C$, l'un en D, & l'autre en K, qui ſeroient animés par les puiſſances δ, & $\alpha+\beta+\gamma$, ſelon des directions paralleles aux autres. Ainſi, la différencielle de l'eſpace parcouru par le point G, pris de façon qu'on ait $D . DG = (A+B+C)\ KG$, ou que les diſtances KG, DG ſoient en raiſon inverſe des maſſes D, & $(A+B+C)$, ſera celle que fournira la formule $\frac{dtf(\alpha+\beta)dt}{A+B}$, en y ſubſtituant $\alpha+\beta+\gamma$ pour α, & δ pour β; $A+B+C$ pour A, & D pour B. Donc la différencielle de l'eſpace parcouru par le point G ſuivant la parallele GN aux autres directions AE, BF, *&c.* eſt $= \frac{dtf(\alpha+\beta+\gamma+\delta)dt}{A+B+C+D}$.

COROLLAIRE I.

(90.) En raiſonnant comme on vient de le faire, on arrivera toujours à la même concluſion, quel que ſoit le nombre des corps, ou maſſes, quand même il ſeroit infini; de ſorte qu'en général, la différencielle de l'eſpace parcouru par le point G, pris d'après les conditions exprimées ci-deſſus, ſera $= \frac{dtf(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\&c.)dt}{A+B+C+D+\&c.}$, la même que parcourroient les corps réunis en un ſeul au point G, s'ils étoient animés par la puiſſance $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\&c.$ C'eſt une conſéquence néceſſaire de ce que les diſtances reſpectives des corps les uns à l'égard des autres, ne ſe trouvent point dans l'expreſſion générale de cette différencielle; & par conſéquent on peut concevoir ces diſtances diminuées à l'infini, ou les faire chacune égale à zéro, ſans que, pour cela, l'expreſſion en ſoit altérée.

COROLLAIRE II.

(91.) Si nous faiſons la ſomme des puiſſances $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\&c.=\pi$;

Digitized by Google

PLANC. I. & la somme des masses $A+B+C+D+\&c.=M$, nous aurons la quantité $\frac{dt\int v\,dt}{M}$ pour l'expression de la différencielle de l'espace parcouru par le point G, ce point étant pris suivant la condition exprimée dans les *Art.* 81, 86 & 89.

PROPOSITION XV.

(92.) *Si l'on prend le point* G *de maniere que* AG . A=BG . B, *&*

FIG. 8. *qu'on abaisse sur un plan quelconque* FE *les perpendiculaires* AE, Gg, BF; *on aura* $gG=\frac{A\,.\,AE+B\,.\,BF}{A+B}$.

Faisant passer par le point G le plan HI parallele au plan EF, on aura le produit $A\,.\,AE=A\,.\,(gG+HA)$, & le produit $B\,.\,BF=B\,.\,(gG-IB)$; donc la somme des deux produits $A\,.\,AE+B\,.\,BF$ sera $=(A+B)\,gG+A\,.\,HA-B\,.\,IB$. Mais la similitude des triangles AHG, BIG donne $AG:AH::GB:IB=\frac{AH\,.\,GB}{AG}$; substituant cette valeur de IB dans l'équation précédente, on aura $A\,.\,AE+B\,.\,BF=(A+B)\,gG+A\,.\,HA-\frac{B\,.\,AH\,.\,GB}{AG}$; & en mettant pour $B\,.\,BG$ le produit $A\,.\,AG$ qui lui est égal, cette équation devient $A\,.\,AE+B\,.\,BF=(A+B)\,gG+A\,.\,HA-A\,.\,HA=(A+B)\,gG$; d'où l'on tire $gG=\frac{A\,.\,AE+B\,.\,BF}{A+B}$.

COROLLAIRE.

(93.) Si au lieu des masses A & B, on prend les puissances α & β, de sorte qu'on ait $\alpha\,.\,AG=\beta\,.\,BG$, on aura encore $gG=\frac{\alpha\,.\,AE+\beta\,.\,BF}{\alpha+\beta}$.

PROPOSITION XVI.

(94.) *Si l'on a trois corps, ou masses, comme* A, B, C, *& si l'on*

FIG. 9. *prend le point* G *de maniere que* A . AG = B . BG, & (A+B) gG = C . CG; *je dis que si l'on abaisse sur un plan quelconque* FI, *les perpendiculaires* BF, AE, GH, CI, *on aura* $GH=\frac{A\,.\,AE+B\,.\,BF+C\,.\,CI}{A+B+C}$.

Puisque $(A+B)\,gG=C\,.\,CG$, on a (92.) $(A+B)\,gK+C\,.\,CI=(A+B+C)\,GH$; & puisque $A\,.\,Ag=B\,.\,Bg$, on a $A\,.\,AE+B\,.\,BF=(A+B)\,gK$. Substituant cette valeur dans l'équation précédente, elle deviendra $A\,.\,AE+B\,.\,BF+C\,.\,CI=(A+B+C)\,GH$; d'où l'on tire $GH=\frac{A\,.\,AE+B\,.\,BF+C\,.\,CI}{A+B+C}$.

Digitized by Google

Corollaire I.

(95.) Si, au lieu des masses A, B, C, on prend les puissances α, β, γ, & qu'on ait $\alpha . Ag = \beta . Bg$, & $(\alpha+\beta) gK = \gamma . CG$, on aura encore $GH = \frac{\alpha . AE + \beta . BF + \gamma . CI}{\alpha+\beta+\gamma}$.

Corollaire II.

(96.) On démontrera la même chose pour quatre, cinq, &c. & même pour une infinité de corps, ou de puissances; ensorte que la distance perpendiculaire du point G, pris comme on l'a dit, *Art.* 92 & 94, à un plan quelconque, sera toujours égale à la somme des produits de chaque corps, ou puissance, par sa distance perpendiculaire au même plan, divisée par la somme des corps, ou des puissances.

Corollaire III.

(97.) Réciproquement, si la distance perpendiculaire d'un point G à un plan quelconque, est égale à la somme des produits de chaque corps, par sa distance perpendiculaire au même plan, divisée par la somme des corps; ce point G sera celui dont on a parlé dans les Propositions 12, 13, 14, 15, 16 (81 *& suiv. jusqu'à* 94.); & par conséquent il aura toutes les propriétés qu'on lui a reconnues & assignées dans ces Propositions & leurs Corollaires.

Définition XIX.

(98.) Le point G déterminé de la maniere qu'on l'a prescrit dans les Propositions 12, 13, 14, 15, 16 (81 *jusqu'à* 94.), s'appelle communément *Centre de gravité*.

Scolie

(99.) Ce nom de *Centre de gravité* ne convient proprement à ce point qu'autant que les puissances qui agissent sur le système, sont les gravités des corps, ou des masses: mais comme il arrive souvent que d'autres puissances différentes des gravités agissent sur les corps, & que le centre de ces puissances n'est point le même que celui des masses, comme on le verra ci-après; cette considération a engagé *Daniel Bernoulli* à distinguer ces deux centres, en appellant l'un *Centre des puissances*, & l'autre *Centre des masses*.

Digitized by Google

PLANC. I. Comme ces deux centres ſont réunis dans les corps graves, à cauſe que les puiſſances, ou gravité, ſont entre elles comme les maſſes (48), il convient d'appeller centre de gravité l'un ou l'autre de ces centres indiſtinctement. Ainſi, lorſqu'il ne ſera queſtion d'autre puiſſance que de la gravité, ce ſera la même choſe de dire *Centre des maſſes* que *Centre de gravité*, puiſque, dans ce cas, ces deux centres ne diffèrent point l'un de l'autre.

PROPOSITION XVII.

FIG. 10. (100.) *Quelles que ſoient les vîteſſes particulieres avec leſquelles ſe meuvent les corps qui compoſent un ſyſtême, lorſqu'ils marchent tous ſur des directions paralleles, le centre des maſſes ſe maintiendra toujours dans une ſeule & même direction parallele à celles que ſuivent les corps.*

Que A, B, C, &c. ſoient les corps qui compoſent le ſyſtême, & qui ſe meuvent dans les directions AE, BF, CI, paralleles entre elles; qu'on prenne un plan quelconque LK, parallele à ces directions: alors G étant le centre des maſſes, on aura $GH = \frac{A.Ae+B.Bf+C.Ci+\&c.}{A+B+C+\&c.}$. Or, dans cette expreſſion toutes les maſſes demeurent conſtantes, ainſi que les perpendiculaires Ae, Bf, Ci, &c. quelles que ſoient les vîteſſes particulieres avec leſquelles les corps ſe meuvent, pourvu qu'on les ſuppoſe marcher parallélement au plan LK; donc toute l'expreſſion demeure conſtante, & par conſéquent la ligne GH dont elle exprime la valeur. Donc le centre G des maſſes ſe mouvera dans une ſeule & même direction parallele à celle que ſuivent les corps.

COROLLAIRE I.

(101.) La même choſe arrivera au centre des puiſſances, ſi elles ſont conſtantes, comme l'eſt la gravité.

COROLLAIRE II.

(102.) Il ſuit de ce qui a été dit, que la direction du centre des maſſes d'un ſyſtême de corps ſera toujours parallele aux directions des puiſſances, ſi ces directions ſont paralleles entre elles; & que la différencielle de l'eſpace parcouru par ce centre (91.) ſera toujours $= \frac{dt\,f(a+b+c+\&c.)\,dt}{A+B+C+D+\&c.} = \frac{dt\,f\pi\,dt}{M}$, la même que parcourroient les corps, ou maſſes, ſi elles étoient réunies à leur centre, & ſi elles étoient animées par la ſomme π des puiſſances, ſuivant une direction parallele à celle des puiſſances.

Digitized by Google

COROLLAIRE III.

(103.) La distance perpendiculaire du centre des masses à un plan quelconque, est égale (*96.*) à la somme des produits de chaque masse par sa distance perpendiculaire au même plan, divisée par la somme des masses.

COROLLAIRE IV.

(104.) Pareillement, la distance perpendiculaire du centre des puissances qui agissent dans un système, à un plan quelconque, sera (*96.*) égale à la somme des produits de chaque puissance par sa distance perpendiculaire au même plan, divisée par la somme des puissances.

COROLLAIRE V.

(105.) Si l'on suppose l'espace parcouru par le centre des masses $= g$, & sa vitesse $= W$, on aura (*29* & *90*, *91.*) $dg = Wdt = \frac{dt\int(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\&c.)dt}{A+B+C+D+\&c.} = \frac{dt\int\pi dt}{M}$. Donc $W = \frac{\int\alpha dt+\int\beta dt+\int\gamma dt+\&c.}{A+B+C+D+\&c.} = \frac{\int\pi dt}{M}$; $dW = \frac{dt+\alpha dt+\gamma dt+\&c.}{M} = \frac{\alpha dt}{M}$; & $dt = \frac{MdW}{\alpha+\beta+\gamma+\&c.} = \frac{MdW}{\alpha}$.

COROLLAIRE VI.

(106.) Ayant trouvé ci-dessus (*29.*) $dg = Wdt$, ou $W = \frac{dg}{dt}$; & ayant pareillement (*105.*), $dW = \frac{(\alpha+\beta+\gamma+\&c.)dt}{M} = \frac{\alpha dt}{M}$; en multipliant ces deux équations l'une par l'autre, on aura aussi $WdW = \frac{(\alpha+\beta+\gamma+\&c.)dg}{M} = \frac{\alpha dg}{M}$: d'où l'on tire, en intégrant, $\frac{1}{2}W^2 = \frac{\int(\alpha+\beta+\gamma+\&c.)dg}{M} = \frac{1}{M}\int\pi dg$; ou $W^2 = \frac{2\int(\alpha+\beta+\gamma+\&c.)dg}{M} = \frac{2}{M}\int\pi dg$.

COROLLAIRE VII.

(107.) De même, si l'on substitue dans l'équation $W = \frac{\int\alpha dt+\int\beta dt+\int\gamma dt+\&c.}{A+B+\&c.}$ la valeur de $\alpha dt = Adu$ (*19.*), & celle de $\beta dt = Bdv$, &c., nous aurons $W = \frac{\int Adu+\int Bdv+\&c.}{A+B+\&c.} = \frac{Au+Bv+\&c.}{A+B+\&c.}$: c'est-à-dire que la vitesse du centre des masses est égale à la somme des produits de chaque masse par sa vitesse, divisée par la somme des masses.

Digitized by Google

COROLLAIRE VIII.

(108.) Si les puiſſances qui animent les corps ne ſont pas dirigées ſuivant des lignes paralleles, on pourra les décompoſer chacune en deux, ou en trois autres dirigées ſuivant des lignes paralleles à deux, ou trois lignes droites données de poſition, & perpendiculaires entre elles. Alors toutes les puiſſances qui ſont dirigées parallélement à l'une de ces lignes, donneront, avec la plus grande facilité, le mouvement du centre des maſſes ſuivant cette direction. On trouvera de même ſon mouvement ſuivant les autres directions; enſuite on déduira, avec la même facilité, le mouvement compoſé de ce centre.

COROLLAIRE IX.

(109.) Puiſque, par le moyen de cette décompoſition des puiſſances, on obtient le mouvement compoſé du centre de gravité, il ſuffira, pour réſoudre un cas quelconque, de réſoudre ſeulement celui dans lequel les puiſſances ſont dirigées parallélement : c'eſt auſſi ce que nous ferons pour le préſent.

COROLLAIRE X.

(110.) Si, dès le premier inſtant de l'action, la ſomme des puiſſances poſitives qui agiſſent ſur le ſyſtême, eſt égale à la ſomme des puiſſances négatives, le centre des maſſes demeurera immobile; car, dans ce cas, $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\&c.=0$.

COROLLAIRE XI.

(111.) Comme les directions des puiſſances qui ne ſont pas paralleles, ſe décompoſent en d'autres qui le ſont, il peut arriver que, l'eſpace parcouru par le centre des maſſes, ſuivant une ou deux directions, ſoit zéro, ſans que, pour cela, celui qu'il parcourt ſuivant les autres directions ceſſe d'avoir lieu. Il ſuffit, pour cela, que, dès le commencement de l'action, la ſomme des puiſſances poſitives qui agiſſent ſuivant cette direction, ou ces directions, ſoit égale à la ſomme des puiſſances négatives.

COROLLAIRE XII.

(112.) Si les corps qui compoſent un ſyſtême, au lieu d'être libres, ſont liés, ou unis entre eux par des lignes inflexibles, de ſorte qu'ils

Digitized by Google

ne puiſſent obéir à l'action des puiſſances, & prendre les directions ſuivant leſquelles ils ſont ſollicités; on peut, dans ce cas, conſidérer chaque corps comme animé par deux puiſſances, dont l'une eſt celle qui le meut réellement, & l'autre qui procede de la tenſion, ou de la force avec laquelle les corps ſe tirent mutuellement. Mais à chacune de ces dernieres puiſſances, conſidérée poſitivement, répond toujours une puiſſance égale & négative, puiſque l'action eſt égale à la réaction : donc, dès le premier inſtant de l'action, on aura $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\&c.=0$, par rapport aux forces avec leſquelles les corps ſe tirent mutuellement, & par conſéquent le centre des maſſes demeurera immobile, c'eſt-à-dire, ne recevra aucun mouvement de l'action des forces avec leſquelles les corps ſe tirent mutuellement. *

Corollaire XIII.

(113.) Il ſuit de là que le mouvement du centre des maſſes d'un ſyſtême de corps liés entre eux par des lignes inflexibles, ſera le même que s'il n'étoit ſoumis qu'à l'action des puiſſances qui mettent les corps en mouvement; par conſéquent le mouvement du centre des maſſes du ſyſtême ſera toujours le même, ſoit que les corps ſoient libres, ſoit qu'ils ſoient liés entre eux par des lignes inflexibles.

Corollaire XIV.

(114.) Un corps quelconque eſt la même choſe qu'un ſyſtême de corps infiniment petits, liés entre eux. Donc le centre de la maſſe totale d'un corps quelconque, ſoumis à l'action de puiſſances quelconques, ſe mouvera de la même maniere que ſi chaque particule de la matiere qui le compoſe étoit ſéparée & libre; ou comme ſi c'étoit un ſyſtême de corps libres.

---

* Ce principe eſt de la plus grande fécondité dans la ſcience du mouvement des corps; c'eſt à lui que les Sciences Phyſico-Mathématiques ſont redevables des progrès immenſes qu'elles ont faits. Il eſt généralement attribué à M. *d'Alembert*, qui le publia en 1743. (*Voyez* ſa Dynamique.) M. *Fontaine* a ſemblé le révendiquer; (*Voyez* ſon Traité du calcul intégral.) mais cependant la gloire de l'invention eſt demeurée à M. *d'Alembert*; & nous penſons que c'eſt à juſte titre. M. *d'Alembert* a publié ce principe dès 1743, & M. *Fontaine* n'en a parlé qu'en 1764. La poſtérité eſt inexorable, elle ne connoît que les dates, pour décerner les honneurs dus à ceux qui l'ont ſervie. *Il faut publier promptement ce qu'on a fait & ce qu'on a vu de nouveau dans les ſciences; les tardifs ſont toujours malheureux.* (M. Bailly, Hiſt. de l'Aſtronomie moderne, Tome II, page 103.)

Digitized by Google

COROLLAIRE XV.

(115.) On doit entendre la même chose d'un système de corps unis entre eux, quoique sa masse ne soit pas considérée comme réunie à son centre.

COROLLAIRE XVI.

(116.) D'après cela, nous aurons, généralement, pour quelque corps que ce soit, ou pour tout assemblage de corps libres, ou liés entre eux, $dg = \frac{dt(\int \alpha dt + \int \beta dt + \int \gamma dt + \&c.)}{M} = \frac{dt}{M} \int \pi dt$.

$W = \frac{\int \alpha dt + \int \beta dt + \int \gamma dt + \&c.}{M} = \frac{1}{M} \int \pi dt$. $dW = \frac{\alpha dt + \beta dt + \gamma dt + \&c.}{M} = \frac{\pi dt}{M}$.

$dt = \frac{M dW}{\alpha + \beta + \gamma + \&c.} = \frac{M dW}{\pi}$. $W^2 = \frac{2}{M} \int (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \&c.) dg = \int \pi dg$.

$W = \frac{Au + Bv + \&c.}{M}$.

COROLLAIRE XVII.

(117.) Si l'on avoit $W = 0$, on auroit aussi $Au + Bv + \&c. = 0$; & si le système n'étoit composé que des deux corps A & B, l'un agiroit positivement, & l'autre négativement; en sorte qu'on auroit $Au = Bv$; d'où l'on tire $u : v :: B : A$, ou $:: \frac{1}{A} : \frac{1}{B}$. C'est-à-dire que dans tout système, ou machine composée de deux corps, les vitesses des corps sont en raison inverse des masses, lorsque le centre des masses est immobile.

COROLLAIRE XVIII.

(118.) Dans les corps graves, les puissances sont comme les masses : donc dans toute machine dont la gravité est le principe moteur, les vitesses que prennent les deux corps dont on suppose la machine composée, sont en raison inverse des puissances, ou des gravités, si le centre de gravité demeure fixe. Si au contraire ce centre est en mouvement, la raison qui régnera entre les puissances ne sera pas égale à celle qui régnera entre les vitesses prises dans un ordre inverse; c'est-à-dire que l'analogie du Corollaire précédent cesse d'avoir lieu.

COROLLAIRE XIX.

(119.) Si l'on avoit $\alpha + \beta + \gamma + \&c. = 0$, on auroit $dW = 0$; & réciproquement, pour que $dW = 0$, il faut que la somme des puissances $\alpha + \beta + \gamma + \&c.$ qui animent le corps, ou le système de corps,

Digitized by Google

ſoit égale à zéro. Ainſi le centre des maſſes d'un corps, ou d'un ſyſtême, ne peut ſe mouvoir avec une viteſſe, ou un mouvement uniforme, à moins que toute les puiſſances agiſſantes ne ſe détruiſent mutuellement, ou que l'action de chacune d'elles ne ſoit égale à zéro. *

Corollaire XX.

(120.) Comme la ſuppoſition que les corps du ſyſtême ſont liés entre eux, ne change rien à la démonſtration donnée dans les *Art.* 96 & 97, au ſujet de la diſtance perpendiculaire du centre des maſſes à un plan quelconque; il s'enſuit que la diſtance perpendiculaire du centre de maſſe d'un corps quelconque à un plan, ſera égale à la ſomme des produits de chaque particule de la maſſe qui le compoſe, par ſa diſtance perpendiculaire au même plan, diviſée par la ſomme deſdites particules, ou par la maſſe totale du corps. Pareillement, la diſtance perpendiculaire du centre des puiſſances qui agiſſent ſur un corps à un plan quelconque, ſera égale à la ſomme de tous les produits de chaque puiſſance, par ſa diſtance perpendiculaire au même plan, diviſée par la ſomme des puiſſances.

Corollaire XXI.

(121.) On a vu (12.) que dans les corps d'une denſité uniforme, la maſſe eſt proportionnelle à l'eſpace qu'ils occupent; il s'enſuit que, dans le calcul, on pourra prendre l'eſpace, ou le volume pour la maſſe : ainſi la diſtance perpendiculaire du centre des maſſes à un plan quelconque, ſera égale à la ſomme des produits de chaque eſpace, ou volume différenciel, par ſa diſtance perpendiculaire au même plan, diviſée par tout l'eſpace qu'occupe le corps.

Corollaire XXII.

(122.) Si un corps uniformément denſe peut être diviſé en deux parties égales & ſemblables par des plans, & ſi on le diviſe par trois plans quelconques, qui ſe coupent entre eux perpendiculairement; le centre des maſſes ſera dans le point commun à ces trois plans, c'eſt-à-dire, dans le point où les trois interſections des plans ſe ren-

* On voit aſſez, ſans qu'il ſoit néceſſaire d'y inſiſter, qu'on ſuppoſe le centre de maſſe du ſyſtême en mouvement avec la viteſſe W, lorſque les puiſſances α, β, γ, &c. commencent leur action; car il eſt évident (110.) qu'il ne pourroit recevoir aucun mouvement par l'action de ces puiſſances dont la ſomme $= 0$.

Digitized by Google

contrent. Car les produits des volumes différenciels qui ſont ſitués d'un côté de l'un quelconque de ces trois plans, par leurs diſtances perpendiculaires au même plan, ſeront égaux aux produits correſpondants des volumes différenciels ſitués de l'autre côté : mais ces produits étant les uns poſitifs, & les autres négatifs, ſe détruiſent mutuellement ; leur ſomme ſera donc égale à zéro : ainſi la diſtance perpendiculaire du centre de maſſe au plan, ſera par conſéquent égale à zéro ; ou, ce qui revient au même, le centre de maſſe ſe trouvera dans le même plan. Ce raiſonnement pouvant ſe faire pour chacun des trois plans, il s'enſuit que le centre de maſſe doit auſſi ſe trouver dans chacun des deux autres plans : il ſera donc dans le point commun à ces trois plans, c'eſt-à-dire, au point où les trois interſections ſe rencontrent.

COROLLAIRE XXIII.

(123.) Le centre de la maſſe d'une ſphere uniformément denſe, ſera donc le même que ſon centre de grandeur, ou de figure. Il en eſt de même du centre de la maſſe d'un ellipſoïde, d'un paralélipipede, d'un cylindre, ou de tout autre corps ſuſceptible d'être diviſé en deux parties égales par trois plans qui ſe coupent perpendiculairement.

SCOLIE.

(124.) Après ce que nous venons de dire, il ne ſera pas difficile de trouver le centre de maſſe d'un corps quelconque uniformément denſe. Pour cela, il n'y aura qu'à imaginer un plan paſſant par un point quelconque du corps, nous l'appellerons *plan primitif* ; enſuite diviſer le corps par deux plans paralleles au plan primitif, & infiniment près l'un de l'autre, afin qu'ils renferment une tranche, ou eſpace différenciel parallele dans tous ſes points au plan primitif. Cet eſpace différenciel étant multiplié par ſa diſtance perpendiculaire audit plan ; prenant enſuite l'intégrale du produit, & la diviſant par le volume du corps, ou par l'eſpace total qu'il occupe, le quotient de la diviſion exprimera la diſtance perpendiculaire du plan primitif à un plan qui lui eſt parallele, & qui paſſe par le centre de maſſe du corps. Cette opération étant répétée par rapport à trois *plans primitifs* qui ſe croiſent perpendiculairement, on aura la poſition de trois plans perpendiculaires entre eux, & qui paſſent tous par le centre de maſſe ; le point commun à ces trois plans ſera par conſéquent le centre de la maſſe totale du corps.

Digitized by Google

Mais il y a beaucoup de corps qui peuvent se diviser en deux parties égales & semblables par deux plans perpendiculaires entre eux, mais qui ne peuvent pas l'être par trois; tels sont les paraboloïdes, les hyperboloïdes, & tous les autres corps qui sont formés par la révolution d'une courbe quelconque. Dans ce cas, il est certain, par ce qui a été dit dans *l'Art.* 122, que, les corps étant toujours supposés d'une densité uniforme, le centre des masses sera dans la commune section des deux plans, ou dans l'axe de révolution de la courbe génératrice. Pour trouver le point précis de cet axe où se trouve le centre de la masse totale, il n'y aura donc plus qu'à supposer un plan qui lui soit perpendiculaire, & opérer, à l'égard de ce plan, comme on l'a dit ci-dessus. On peut, pour rendre le calcul plus facile, faire passer le plan primitif par l'origine des abscisses, ou par l'extrémité de l'axe; alors en appellant x les abscisses, & y les ordonnées de la courbe génératrice; & représentant par c la circonférence d'un cercle dont le rayon est l'unité; cy sera la circonférence du cercle que l'ordonnée décrira dans sa révolution, & $\frac{1}{2}cy^2$ sera l'aire de ce cercle, ou du plan parallele à celui qu'on suppose passer par l'extrémité de l'axe. On aura donc $\frac{1}{2}cy^2dx$ pour l'expression de l'espace différenciel, ou de la tranche infiniment mince, qui est également éloignée dans tous ses points du plan primitif, & $\frac{1}{2}cy^2xdx$ sera le produit de cet espace, par sa distance perpendiculaire à ce plan. La somme de ces produits sera donc $\frac{1}{2}c\int y^2xdx$; mais $\frac{1}{2}c\int y^2dx$ est la somme de tous ces espaces, ou le volume total du corps; donc on aura la distance du plan primitif, ou de l'extrémité de l'axe, au centre de masse du corps $=\frac{\frac{1}{2}c\int y^2xdx}{\frac{1}{2}c\int y^2dx}=\frac{\int y^2xdx}{\int y^2dx}$: formule générale pour trouver le centre de masse de tous les corps d'une densité uniforme, engendrés par la révolution d'une courbe quelconque autour d'un axe.

Exemple I.

(125.) Soit proposé de trouver le centre de masse d'une demi-sphere. L'équation du cercle générateur, en prenant son centre pour l'origine des abscisses, & faisant son rayon $=r$, est $y^2=r^2-x^2$. Substituant cette valeur de y^2 dans la formule, on aura la distance du centre de la sphere, ou de l'origine des x au centre de masse, $=\frac{\int(r^2-x^2)xdx}{\int(r^2-x^2)dx}=\frac{(\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{4}x^2)x}{r^2-\frac{1}{3}x^2}$, d'où l'on tire $\frac{\frac{1}{2}r}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}r$ pour la valeur de la distance cherchée, en faisant $x=r$, afin de comprendre toute la demi-sphere dans l'expression.

Digitized by Google

PLANC. I.

EXEMPLE II.

(126.) Qu'il soit question de trouver le centre de masse d'un paraboloïde. L'équation de la courbe génératrice est $y^2 = px$; substituant cette valeur de y^2 dans la formule générale, la distance de l'origine des abscisses au centre de la masse sera $= \frac{\int px^2 dx}{\int px dx} = \frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{2}{3}x$. Il en est de même de tous les autres corps de cette espece.

COROLLAIRE XXIV.

(127.) On trouvera de la même maniere le centre des puissances.

CHAPITRE IV.

De la Rotation d'un Système.

DÉFINITION XX.

(128.) ON appelle *Rotation d'un Système*, le mouvement par lequel il tourne sur un point, ou sur un axe quelconque mobile, ou immobile. L'angle que le système décrit en vertu de ce mouvement de rotation, s'appelle *Angle gyratoire*, ou *de Rotation*.

PROPOSITION XVIII.

FIG. 12.

(129.) *Si deux corps* A & B, *liés ensemble par une ligne inflexible* AB, *sont mis en mouvement par l'action des puissances* α & β, *suivant les directions paralleles* AF, BG, *de sorte que, dans un instant, ou différencielle de temps* dt, *ils se trouvent en* E & I; *je dis que l'angle de rotation décrit pendant cet instant sera* $= \frac{A'dt\int \alpha dt \sin \Sigma - B'dt\int \beta dt \sin \Sigma}{A'^2A + B'^2B}$: A' & B' *désignant les distances respectives des corps* A & B *au centre* N *des masses*, & Σ *l'angle* KAB, *que forment les directions des puissances avec la ligne* AB.

On a vu (100.) que le centre de gravité *N* doit suivre la ligne *NHM*, parallele aux directions des puissances; il s'ensuit que les deux distances *HE*, *HI*, doivent être respectivement égales à *NA*, *NB*; & que *FE*, *GI* seront les espaces que parcourront les corps, en vertu des forces avec lesquelles ils se tirent mutuellement. Mais ces forces exerçant toujours leurs actions suivant les lignes *AB*, *EI*, qui

Digitized by Google

qui uniſſent les corps (112.), n'affectent point les forces, ou puiſſances, qui animent ces corps perpendiculairement aux mêmes lignes AB, EI. Cela poſé, les forces, ou puiſſances, qui agiſſent ſuivant AF, BG, ſont (75.) aux forces qui agiſſent perpendiculairement à AB, comme le rayon eſt à $\sin\Sigma$: donc la puiſſance qui anime le corps A perpendiculairement à AB, ſera $=\alpha\sin\Sigma$ *, & celle qui anime le corps B, dans la même direction, ſera $=\beta\sin\Sigma$. La différencielle de l'eſpace parcouru par le corps A, perpendiculairement à AB, ſera donc (35.) $=\frac{dt}{A}\int\alpha dt\sin\Sigma$, & celle de l'eſpace parcouru par le corps B, dans la même direction, ſera $=\frac{dt}{B}\int\beta dt\sin\Sigma$, & la quantité LE, dont un de ces eſpaces différenciels ſurpaſſe l'autre, ſera $=\frac{dt}{A}\int\alpha dt\sin\Sigma-\frac{dt}{B}\int\beta dt\sin\Sigma$. **

Or l'angle de rotation LIE eſt, ſelon la Géométrie, $=\frac{LE}{LI}=\frac{LE}{AB}$ ***; donc l'expreſſion de cet angle ſera $=\frac{\frac{dt}{A}\int\alpha dt\sin\Sigma-\frac{dt}{B}\int\beta dt\sin\Sigma}{AB}$: ou (en mettant pour AB ſa valeur $A'+B'$) $=\frac{\frac{dt}{A}\int\alpha dt\sin\Sigma-\frac{dt}{B}\int\beta dt\sin\Sigma}{A'+B'}$. Mais (83.) $A'A=B'B$; donc on aura, pour l'expreſſion de la valeur de cet angle, la quantité $\frac{\frac{dt}{A}\int\alpha dt\sin\Sigma-\frac{B'dt}{A'A}\int\beta dt\sin\Sigma}{A'+B'}=\frac{A'dt\int\alpha dt\sin\Sigma-B'dt\int\beta dt\sin\Sigma}{A'A(A'+B')}$ $=\frac{A'dt\int\alpha dt\sin\Sigma-B'dt\int\beta dt\sin\Sigma}{A'^2A+B'^2B}$.

* Quoique ceci dérive directement de l'*Art.* 75, auquel l'Auteur renvoie, nous allons cependant en donner une démonſtration particuliere, en faveur des commençants. Soit la puiſſance « repréſentée par la portion Aq de ſa direction, décompoſée en deux puiſſances As, An, la premiere perpendiculaire à AB, & l'autre ſuivant AB. Dans le triangle rectangle Asq, on aura $Aq : As :: 1 : \sin Aqs=\sin KAB=\sin\Sigma$; donc la force $As=Aq\times\sin\Sigma=\alpha\sin\Sigma$. On démontrera de même dans le triangle Bux, que la force perpendiculaire $Fu=\beta\sin\Sigma$.

** LE eſt véritablement l'excès, ou la différence des deux eſpaces différenciels décrits par les corps A & B, en vertu des forces perpendiculaires à AB. Car ſi, par le point I, on mene IL parallele à AB ; & ſi de ce même point I, comme centre, & avec le rayon $IL=AB$, on décrit l'arc infiniment petit LE, qui pourra être conſidéré comme une ligne droite perpendiculaire à IE ; il eſt évident que, ſi les forces perpendiculaires à AB avoient eu la même énergie, ou avoient eu la propriété de ſe faire équilibre, les deux corps ſeroient demeurés conſtamment dans la même ligne parallele à AB ; mais l'arc LE marque de combien le corps A s'eſt élevé au-deſſus de la parallele qui paſſe par le corps B arrivé en I : donc cet arc marque l'excès de l'eſpace différenciel parcouru par le corps A, en vertu de la force perpendiculaire à AB qui l'animoit, ſur l'eſpace différenciel parcouru par le corps B, en vertu de la force ſemblable qui agiſſoit ſur lui.

*** Il eſt aiſé de concevoir que l'angle LIE eſt l'angle de rotation du ſyſtême, & que ſon expreſſion eſt $\frac{LE}{LI}$.

Digitized by Google

DÉFINITION XXI.

(130.) On a auſſi coutume de donner le nom de *Viteſſe angulaire* à cet angle de rotation décrit pendant l'inſtant *dt*.

COROLLAIRE I.

(131.) La différencielle de l'eſpace parcouru par le corps *A* étant (29.) $= udt = LE$; & l'angle de rotation, ou la viteſſe angulaire

---

En effet, puiſque les puiſſances agiſſent ſur les corps *A* & *B* dans les directions parallèles *AF*, *BG*, elles tendent à leur communiquer, ainſi qu'à toutes les parties de la ligne *AB* qui les unit, un mouvement parallele à ces directions; mouvement qui auroit effectivement & uniquement lieu, ſi cette ligne n'étoit pas inflexible, comme on le ſuppoſe. On a vu (100 & 113.) que le centre de gravité *N* du ſyſtême ſe meut de la même maniere que ſi les puiſſances α & β y étoient appliquées; donc ſon mouvement ſera rectiligne & ſimple, dans la direction *NM* parallele à celles des puiſſances. Mais à cauſe de la prépondérance de la puiſſance α ſur la puiſſance β, la ligne *AB* doit s'incliner de plus en plus à l'égard de ſa ſituation primitive *AB*, tandis que le centre de gravité *N* s'avance dans la ligne *NM*: or pour que cette inclinaiſon ait lieu, il faut que le corps *A* tourne dans un ſens, & le corps *B* dans le ſens oppoſé; par conſéquent toutes les parties du ſyſteme participent à ce mouvement, à l'exception du centre de gravité *N* que nous avons vu en être exempt. Donc tout le ſyſtême tourne ſur ſon centre de gravité.

On voit par-là que tous les points de la ligne *AB*, à l'exception du point *N*, doivent avoir un mouvement compoſé de deux autres, l'un rectiligne, qui tend à leur faire parcourir, ainſi qu'au point *N*, des eſpaces paralleles aux directions *AF*, *BG*; & l'autre de rotation autour de ce centre, qui tend à leur faire décrire, dans le même temps, des eſpaces proportionnels aux diſtances dont elles en ſont éloignées. Ainſi, à parler rigoureuſement, les corps *A* & *B* ne parcourent ni des lignes droites, ni des arcs de cercle; mais une courbe réſultante de la combinaiſon d'un mouvement rectiligne & d'un circulaire; courbe qui, comme on le voit, eſt une *Cycloïde*. Mais, comme il ne s'agit ici que du mouvement de rotation pendant la différencielle de temps *dt*, nous ne conſidérerons que le mouvement circulaire.

Si l'on n'examine pas les mouvements abſolus des deux corps *A* & *B*, ni ceux de la ligne *AB*, mais qu'on compare ſeulement ces mouvements à la poſition primitive *AB* que cette ligne avoit avant l'action des puiſſances α & β; il eſt évident que, pendant la différencielle de temps *dt*, *AB* a dû paroître tourner ſur le point fixe *C*, interſection des deux lignes *AB*, *EI*, qui ſont les poſitions du ſyſtême au commencement & à la fin de l'inſtant *dt*. C'eſt ce point qu'on appelle *Centre de converſion*, & que *Bernoulli* a nommé *Centre ſpontané de rotation*.

Ceci poſé, puiſque le ſyſtême a dû paroître tourner ſur le point *C*, il eſt clair que l'angle de rotation eſt *ACE* = l'angle *LIE*: & en menant par le centre de gravité *H* la droite *HR*, parallele à *AB*, on voit encore que cet angle eſt égal à l'angle *RHE*, qui eſt l'angle de rotation décrit autour du centre de gravité *H*.

Maintenant, on ſçait, par les élements de Géométrie, qu'un angle eſt meſuré par l'arc de cercle décrit de ſon ſommet comme centre, & intercepté entre ſes côtés, que cet arc a toujours le même nombre de degrés, de quelque grandeur que ſoit ſon rayon, quoique ſa grandeur abſolue ſoit plus ou moins grande. Or, il eſt évident que le rayon demeurant le même, l'angle croîtra en proportion de la grandeur de l'arc, c'eſt-à-dire, en raiſon directe de l'arc. Il eſt également évident que l'arc demeurant le même en grandeur abſolue, l'angle croîtra à proportion que le rayon diminuera, c'eſt-à-dire, en raiſon inverſe du rayon. Donc en général les angles ſont en raiſon directe de la grandeur abſolue des arcs qui leur ſervent de meſure, & en raiſon inverſe du rayon de ces arcs; par conſéquent $Angle = \frac{Arc}{Rayon}$. Donc $\frac{RH}{RE}$, ou $\frac{LE}{LI}$ eſt l'expreſſion de l'angle de rotation.

Digitized by Google

étant $= \frac{LE}{LI}$; cette derniere viteſſe ſera par conſéquent $= \frac{udt}{LI}$; & la viteſſe u du corps A ſera $= \frac{LE}{dt} = \frac{LE}{LI} \cdot \frac{LI}{dt}$. Donc la viteſſe u eſt égale à la viteſſe angulaire multipliée par $\frac{LI}{dt}$.

DÉFINITION XXII.

(132.) Les produits $A'\alpha$, $B'\beta$, $a\alpha$, $b\beta$, des puiſſances α & β, par leurs diſtances $A' = AN$, $B' = BN$, ou $a = AO$ & $b = BQ$ au centre N des maſſes, ou à un plan QM qui paſſe par ce centre, s'appellent *Moments de ces puiſſances.*

DÉFINITION XXIII.

(133.) Pareillement, les produits $A'A$, $B'B$ s'appellent *Moments des maſſes*, ou *de la gravité.*

DÉFINITION XXIV.

(134.) Les produits A'^2A, B'^2B des maſſes par le quarré de leur diſtance au centre des maſſes, ont été nommés *Moments d'inertie* par *Léonard Euler* (*Scientia navalis*, §. 165.). Nous nous ſervirons de cette expreſſion dans la ſuite.

LEMME I.

(135.) *Les quantités* A' ſin Σ, B' ſin Σ, *ſont égales aux perpendiculaires* AO, BQ, *tirées des corps ſur la ligne* MN, *qui paſſant par le centre* N *des maſſes, eſt parallele aux directions* AF, BG *des puiſſances.*

Les angles ANO, QNB ſont égaux à l'angle KAB; ils auront donc le même ſinus, ſçavoir, *ſin* Σ: de plus, les triangles ANO, QNB étant rectangles, on aura 1 : *ſin* Σ :: $AN(A')$: $AO = A'$ *ſin* Σ, & 1 : *ſin* Σ :: $BN(B')$: $BQ = B'$ *ſin* Σ. Donc, &c.

COROLLAIRE I.

(136.) Repréſentant donc par a & b les perpendiculaires AO, BQ, l'expreſſion de l'angle de rotation produit dans l'inſtant dt deviendra $= \frac{dt\int a\alpha dt - dt\int b\beta dt}{A'^2A + B'^2B}$.

Mais la ligne BQ étant de l'autre côté du centre des maſſes à l'égard de la droite AO, ſuppoſée poſitive, doit être conſidérée comme négative. Convenant donc de changer les ſignes des quantités qui

Digitized by Google

ne ſont pas poſitives *, l'expreſſion de la viteſſe angulaire, ou de l'angle de rotation produit dans l'inſtant dt deviendra $= \frac{dtſdt(a\alpha+b\beta)}{A'^2A+B'^2B} = \frac{dtſdt\,ſin\,\Sigma(A'\alpha+B'\beta)}{A'^2A+B'^2B}$.

SCOLIE.

(137.) Nous ſuppoſerons pour le préſent que les corps ſont infiniment petits, ou que leurs maſſes ſont réunies dans des points, c'eſt-à-dire, à leurs centres de maſſe.

COROLLAIRE II.

(138.) Puiſque l'angle de rotation eſt $= \frac{dtſdt\,ſin\,\Sigma(A\alpha-B\beta)}{A'^2A+B'^2B} = \frac{dtſdt(a\alpha-b\beta)}{A'^2A+B'^2B}$ ſi, dès le commencement de l'action, la ſomme des moments $A\alpha-B\beta$, ou $a\alpha-b\beta$ étoit égale à zéro, le ſyſtême ne tourneroit pas.

COROLLAIRE III.

(139.) Puiſqu'on ſuppoſe que les puiſſances agiſſent conſtamment ſur les deux corps A & B, ſuivant les directions AF, BG; il s'enſuit que la rotation ſe fera (61.) dans le plan qui coïncide avec ces directions, & avec la droite AB qui paſſe par le centre des maſſes.

DÉFINITION XXV.

(140.) Pour plus de clarté, nous appellerons déſormais ce plan, *Plan gyratoire*, ou *Plan de rotation.*

LEMME II.

(141.) *Si l'un des corps eſt ſuppoſé infini, ce corps reſtera ſans mouvement, & le centre des maſſes coïncidera avec lui; par conſequent le centre des maſſes reſtera également fixe, ou ſans mouvement.*

Car B étant le corps qu'on ſuppoſe infini, l'équation $\frac{dt}{B}ſ\beta dt = db$, fait voir que ſon mouvement eſt zéro : on voit de même par l'équation $B' = \frac{A'A}{B}$, que ſa diſtance B', au centre des maſſes eſt auſſi zéro. Donc ſi l'un des corps, &c.

* Les quantités qui ne ſont pas poſitives ſont b & B' : car on voit que la diſtance $BN = B'$ étant de l'autre côté du centre des maſſes à l'égard de la diſtance $AN = A'$, qu'on ſuppoſe poſitive, elle doit être de ſigne contraire. On voit également que ce changement de ſigne n'affecte point le dénominateur des expreſſions de l'angle de rotation, puiſque la quantité B' y eſt au quarré : ainſi, ce dénominateur eſt toujours eſſentiellement poſitif. Cette remarque s'applique à *l'Art.* 129.

Digitized by Google

COROLLAIRE I.

(142.) Dans ce cas, la quantité $B'dtS\beta dt\,sin\,\Sigma$, ainsi que la quantité B'^2B, qui se trouvent dans l'expression de l'angle de rotation, sont zéro. Ainsi, cette expression se réduit à $\frac{A'dtS\alpha dt\,sin\,\Sigma}{A'^2A} = \frac{dtS\alpha dt\,sin\,\Sigma}{A'A}$, ou $= \frac{dtS\alpha adt}{A'^2A}$: d'où l'on voit que lorsqu'un seul corps A est obligé de tourner autour d'un point fixe dont il est éloigné de la quantité A', l'angle de rotation produit pendant l'instant dt est $= \frac{dtS\alpha dt\,sin\,\Sigma}{A'A} = \frac{dtS\alpha adt}{A'^2A}$ *.

COROLLAIRE II.

(143.) S'il n'y a qu'une seule puissance à agir, & qu'il y ait toujours deux corps ; c'est-à-dire, si $\beta = 0$, l'angle de rotation sera $= \frac{A'dtS\alpha dt\,sin\,\Sigma}{A'^2A + B'^2B} = \frac{dtS\alpha adt}{A'^2A' + B'^2B}$.

COROLLAIRE III.

(144.) Cette expression peut se changer en celle-ci, $\frac{A'dtS\alpha dt\,sin\,\Sigma}{A'^3(A + \frac{B'^3}{A'^3}B)} = \frac{dtS\alpha adt}{A'^3(A + \frac{B'^3}{A'^3}B)}$, laquelle est la même (142.) que celle qu'on trouveroit, en supposant qu'un seul corps $= A + \frac{B'^3}{A'^3}B$, tourne par l'action de la puissance α, autour d'un point fixe éloigné de lui de la quantité A'. Donc la puissance α produit le même angle de rotation, lorsqu'elle fait tourner un seul corps $= A + \frac{B'^3}{A'^3}B$ autour d'un point fixe éloigné de lui de la quantité A', que lorsqu'elle fait tourner les deux corps A & B, autour du même point fixe aux distances A' & B'.

COROLLAIRE IV.

(145.) Comme la quantité $B'\,sin\,\Sigma$, ou la perpendiculaire b s'est évanouie de l'expression $\frac{dtS\alpha adt}{A'^2A + B'^2B}$; il s'ensuit que, pour l'angle de rotation, le lieu du corps B est indifférent, pourvu qu'il soit toujours éloigné du point fixe de la quantité B'.

* Réciproquement, on peut regarder le point fixe sur lequel un corps est assujetti à tourner, comme le centre de gravité d'un système de deux corps, dont l'un placé sur ce point, & par conséquent sans mouvement, est d'une masse infinie à l'égard de celle de l'autre qui est le corps qui se meut réellement. Le moment d'inertie du corps en mouvement est le seul qu'on doive considérer, puisque celui de l'autre est zéro ; & ce moment est le produit de la masse de ce corps, par le quarré de sa distance au point fixe.

Digitized by Google

COROLLAIRE V.

(146.) Il eſt évident, par ce qui a été dit à *l'Art.* 144, qu'au lieu de deux corps A & C qui ſeroient animés par la puiſſance α aux diſtances A' & C' du centre de gravité, nous pouvons ſuppoſer un ſeul corps $= A + \frac{C^2}{A'^2}C$ ſoumis à l'action de la même puiſſance à la diſtance A' du même point. Subſtituant donc la quantité $A + \frac{C^2}{A'^2}C$ en place de A ſeul, dans l'expreſſion $\frac{dt\int\alpha a dt + dt\int\beta b dt}{A'^2 A + B'^2 B}$, il en réſultera l'angle de rotation produit dans le même inſtant dt, par l'action des deux puiſſances α & β, ſur les trois corps A, B & C, ſitués dans le même plan de rotation; & la valeur de cet angle ſera $= \frac{dt\int\alpha a dt + dt\int\beta b dt}{A'^2\left(A + \frac{C^2}{A'^2}C\right) + B'^2 B} \cdot = \frac{dt\int\alpha a dt + dt\int\beta b dt}{A'^2 A + B'^2 B + C'^2 C}$.

COROLLAIRE VI.

(147.) Pareillement, l'angle de rotation, produit par la ſeule puiſſance α qui agit ſur les trois corps A, C & D, ſera $= \frac{dt\int\alpha a dt}{A'^2 A + C'^2 C + D'^2 D} = \frac{dt\int\alpha a dt}{A'^2\left(A + \frac{C^2}{A'^2}C + \frac{D'^2}{A'^2}D\right)}$. Mais cet angle eſt le même que celui que produiroit la même puiſſance, ſi elle agiſſoit ſur un ſeul corps $= A + \frac{C^2}{A'^2}C + \frac{D'^2}{A'^2}D$: ſubſtituant donc la valeur de ce corps en place de A dans l'expreſſion $\frac{dt\int\alpha a dt + dt\int\beta b dt}{A'^2 A + B'^2 B}$, on aura l'angle de rotation que produiſent les deux puiſſances α & β agiſſant ſur les quatre corps A, B, C & D, ſitués dans le même plan de rotation, & la valeur de cet angle ſera $= \frac{dt\int\alpha a dt + dt\int\beta b dt}{A'^2\left(A + \frac{C^2}{A'^2}C + \frac{D'^2}{A'^2}D\right) + B'^2 B} = \frac{dt\int\alpha a dt + dt\int\beta b dt}{A'^2 A + B'^2 B + C'^2 C + D'^2 D}$.

COROLLAIRE VII.

(148.) On dira la même choſe de cinq, ſix, ou d'un plus grand nombre de corps: de ſorte que l'angle de rotation produit dans un inſtant dt par l'action de deux puiſſances α & β, ſur un nombre quelconque de corps ſitués dans le même plan de rotation, eſt $= \frac{dt\int\alpha a dt + dt\int\beta b dt}{A'^2 A + B'^2 B + C'^2 C + D'^2 D + \&c.}$.

COROLLAIRE VIII.

(149.) S'il n'y avoit qu'un ſeul corps, & qu'il y eût toujours deux

Digitized by Google

puiſſances ; c'eſt-à-dire, ſi l'on avoit $B=0$; dans ce cas, l'expreſſion de l'angle de rotation ſe réduiroit à $\frac{dt\int a\alpha dt+dt\int b\beta dt}{A'^2A}=\frac{dt\int a dt\left(\alpha+\frac{b}{a}\beta\right)}{A'^2A}$.

COROLLAIRE IX.

(150.) On auroit la même expreſſion, ſi la puiſſance $\alpha+\frac{b}{a}\beta$, agiſſoit ſeule ſur le corps A à la diſtance perpendiculaire a de la direction qui paſſe par le centre des maſſes. Donc deux puiſſances α & β, dont les directions ſont paralleles, & qui agiſſent à des diſtances perpendiculaires a & b de la direction qui paſſe par le centre des maſſes, produiſent le même angle de rotation qu'une ſeule puiſſance $\alpha+\frac{b}{a}\beta$ qui agiroit à la diſtance a.

COROLLAIRE X.

(151.) Nous pouvons donc mettre dans l'expreſſion $\frac{dt\int a\alpha dt+dt\int b\beta dt}{A'^2A+B'^2B+C'^2C+D'^2D+\&c.}$, au lieu de deux puiſſances α & γ, qui agiroient aux diſtances a & c, une ſeule puiſſance $\alpha+\frac{c}{a}\gamma$, qui agiſſe à la diſtance a ; ce qui donnera l'angle de rotation produit par trois puiſſances qui agiſſent parallélement ſur un nombre quelconque de corps ſitués dans le même plan que les directions des puiſſances $=\frac{dt\left(\int a\alpha dt+\int c\gamma dt\right)+dt\int b\beta dt}{A'^2A+B'^2B+C'^2C+D'^2D+\&c.}=\frac{dt\int a\alpha dt+dt\int b\beta dt+dt\int c\gamma dt}{A'^2A+B'^2B+C'^2C+D'^2D+\&c.}$.

COROLLAIRE XI.

(152.) Pareillement, ſi l'on ſubſtitue dans cette derniere expreſſion la quantité $\int a dt\left(\alpha+\frac{d}{a}\delta\right)$, à la place de $\int a\alpha dt$ ſeul, on aura l'angle de rotation produit par l'action de quatre puiſſances qui agiſſent ſuivant des directions paralleles ſur un nombre quelconque de corps ſitués dans le même plan de rotation $=\frac{dt\int a\alpha dt+dt\int b\beta dt+dt\int c\gamma dt+dt\int d\delta dt}{A'^2A+B'^2B+C'^2C+D'^2D+\&c.}$.

COROLLAIRE XII.

(153.) On dira la même choſe d'un nombre quelconque de puiſſances qui agiſſent ſuivant des directions paralleles ſur un nombre quelconque de corps ſitués dans un même plan de rotation. Donc en général, l'angle de rotation produit, pendant un temps infiniment petit dt, par un nombre quelconque de puiſſances qui agiſſent ſuivant des directions paralleles ſur un nombre quelconque de corps unis entre eux par des lignes inflexibles, & ſitués dans le plan même

Digitized by Google

de la rotation, a pour expreſſion $\frac{dtf\alpha a dt + dtf\beta b dt + dtf\gamma c dt + dtf\delta d dt + \&c.}{A'^2 A + B'^2 B + C'^2 C + D'^2 D + \&c.}$. Dans cette expreſſion, on fera négatives les perpendiculaires a, b, c, d, &c. & les puiſſances α, β, γ, δ, &c. qui doivent l'être (136.)

COROLLAIRE XIII.

(154) Si l'on repréſente par p la diſtance perpendiculaire du centre des puiſſances à la direction qui paſſe par le centre des maſſes; & par π la ſomme des puiſſances, on aura (104.) $p\pi = \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \&c.$ ſomme des moments, & $dtfp\pi dt = dtf dt (\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \&c.)$. Donc, en ſubſtituant, on aura, pour la valeur de l'angle de rotation produit dans l'inſtant dt par l'action d'un nombre quelconque de puiſſances qui agiſſent, ſuivant des directions paralleles, ſur un nombre quelconque de corps unis entre eux par des lignes inflexibles, & qui ſont dans le même plan de rotation, la quantité $\frac{dtfp\pi dt}{A'^2 A + B'^2 B + C'^2 C + D'^2 D + \&c.}$.

COROLLAIRE XIV.

(155.) L'expreſſion $p\pi$ fait voir que l'angle de rotation n'éprouvera aucun changement, quelque ſituation qu'on donne aux puiſſances, dans le plan de rotation, ſoit qu'on les diviſe, ſoit qu'on les uniſſe comme on voudra, pourvu que la ſomme des puiſſances qu'on leur ſubſtitue, ſoit toujours égale à la même quantité π; & que la diſtance perpendiculaire de leur centre à la direction qui paſſe par le centre des maſſes ſoit toujours égale à la même quantité p.

COROLLAIRE XV.

(156.) L'expreſſion du dénominateur $A'^2 A + B'^2 B + C'^2 C + D'^2 D + \&c.$ fait voir pareillement que la valeur de l'angle de rotation n'éprouvera aucun changement, de quelque maniere qu'on diſtribue les corps dans le plan de rotation, pourvu qu'on les conſerve à la même diſtance du centre des maſſes; & ſi l'on fait varier ces diſtances en même temps que les corps, l'angle de rotation demeurera encore le même, ſi la ſomme $A'^2 A + B'^2 B + C'^2 C + D'^2 D + \&c.$ des moments d'inertie demeure toujours conſtante.

COROLLAIRE XVI.

(157.) Si nous ſuppoſons que la ſomme des moments d'inertie $A'^2 A + B'^2 B + C'^2 C + D'^2 D + \&c. = S$, l'angle de rotation produit pendant l'inſtant dt, par un nombre quelconque de puiſſances qui agiſſent

Digitized by Google

agiſſent parallélement ſur un nombre quelconque de corps unis entre eux par des lignes inflexibles, & ſitués dans le plan même de la rotation, ſera $= \frac{dſpvdt}{S}$. FIGURE 1.

COROLLAIRE XVII.

(158.) Pareillement, ſi l'on repréſente par P la diſtance du centre des maſſes à celui des puiſſances; & par Σ l'angle que forme la ligne qui joint ces deux centres avec les directions, on aura $1 : ſin\,\Sigma :: P : p = P ſin\,\Sigma$. Donc, en ſubſtituant, on pourra encore exprimer l'angle de rotation par $\frac{ſ(dſvdt\,P ſin\,\Sigma)}{S}$, ou par $\frac{P ſ(dſvdt\,ſin\,\Sigma)}{S}$, ſi P eſt conſtant. *

PROPOSITION XIX.

(159.) *Le mouvement de rotation ſera le même, ſoit que le ſyſtéme ſoit libre, ſoit que ſon centre de maſſe ſoit fixe.*

Si l'on ſuppoſe qu'une nouvelle puiſſance, égale à la ſomme de toutes celles qui agiſſent ſur le ſyſtême, agiſſe dans une direction contraire ſur le centre des maſſes, il eſt clair que ce centre demeurera en repos (110.): mais cette nouvelle puiſſance étant appliquée au centre des maſſes, n'affectera point le numérateur de la formule de l'angle de rotation. Donc le mouvement de rotation du ſyſtême ſe fera de la même maniere, ſon centre de maſſe étant fixe, que s'il étoit libre.

PROPOSITION XX.

(160.) *Les formules que nous avons données pour la valeur de l'angle de rotation, ont encore lieu dans le cas où tous les corps, ainſi que toutes les puiſſances, ne ſont pas dans le même plan de rotation.* FIG. 12

Suppoſons que le ſyſtême eſt compoſé de trois corps B, C, D, unis entre eux par des lignes inflexibles, & animés par les trois puiſſances β, γ, δ, dont les directions ſont paralleles entre elles, & perpendiculaires à la droite DC qui joint les deux corps D & C. Soit de plus BA perpendiculaire à DC; A le centre des maſſes des corps C & D; & G celui des trois corps, ou celui des deux B & A, en ſuppoſant les deux corps C & D, réunis dans le point A, de maniere à ne faire qu'un ſeul corps $A = C + D$. Soit encore ſuppoſé que le centre des deux puiſſances γ & δ, ſe trouve de

* On remarquera que ces expreſſions ſont celles de l'angle de rotation pendant un temps fini t, au lieu que les précédentes n'en expriment que la différencielle, c'eſt-à-dire qu'elles expriment l'angle de rotation produit pendant un temps infiniment petit dt.

de même en A, afin que le ſyſtême des deux corps C & D ne tourne point, & qu'en conſéquence la ligne CD ſe conſerve dans tout ſon mouvement perpendiculaire aux directions des puiſſances. Par le centre G des maſſes, menons la ligne IH parallele à DC, & enſuite des points D & C abaiſſons ſur IH les perpendiculaires DH & CI; de plus, repréſentons ces perpendiculaires par D' & C', & la ligne AG par A', ce qui donnera $A'=C'=D'$; & ſuppoſons enfin que $\gamma+\lambda=\alpha$.

Subſtituant maintenant ces valeurs dans la formule trouvée pour l'angle de rotation produit dans le ſyſtême des deux corps B & A, qui eſt $\frac{dtſdt\,ſin\,\alpha\,(A'\alpha+B'\beta)}{A'^2A+B'^2B}$, cette formule deviendra $\frac{dtſdt\,ſin\,\alpha\,(C'\gamma+D'\lambda+B'\beta)}{C'^2C+D'^2D+B'^2B}$, qui eſt l'expreſſion de l'angle de rotation produit dans le ſyſtême des trois corps B, C & D; angle qui eſt le même que celui qui auroit lieu, ſi les trois corps étoient dans le même plan de rotation AB, & placés à des diſtances B', C' & D' du point G: puiſque cette expreſſion de l'angle de rotation eſt identique avec celle qu'on a trouvée précédemment pour ce cas.

COROLLAIRE I.

(161.) On voit évidemment que le corps B peut pareillement ſe diviſer en deux autres corps ſitués aux extrémités d'une ligne parallele à DC, & les ſuppoſer animés par l'action de deux puiſſances, dont la ſomme eſt égale à β. Il en ſeroit de même d'un nombre quelconque de corps, dont ſe trouveroit compoſé un ſyſtême, & qui ſeroient ſitués dans le même plan de rotation AB.

COROLLAIRE II.

(162.) On vient de voir comment deux corps A & B placés dans le même plan de rotation AB, peuvent être diviſés, ou conçus diviſés en pluſieurs autres: par la même méthode, les corps diviſés peuvent auſſi être réunis, ou conſidérés comme réunis dans le même plan AB. Dans l'un & l'autre cas, le centre des puiſſances ſe trouve dans ce plan, & c'eſt ſur ce même plan qu'on exprime la meſure de l'angle gyratoire, ou de rotation.

COROLLAIRE III.

(164.) Le plan de rotation ſera donc, dans les deux cas, celui qui, paſſant par le centre des maſſes, paſſe auſſi par celui des puiſſances, & eſt parallele aux directions de ces dernieres.

COROLLAIRE IV.

(163.) Puiſque le mouvement de rotation du ſyſtême ſe fait de

Digitized by Google

la même maniere lorſque le ſyſtême eſt libre, que lorſque le centre G des maſſes eſt fixe, le ſyſtême tournera donc, dans le cas préſent, de la même maniere que ſi la ligne HI étoit fixe. Car, par la ſuppoſition, cette droite HI doit ſe maintenir conſtamment parallele à DC, & celle-ci doit toujours être perpendiculaire aux directions des puiſſances.

DÉFINITION XXVI.

(165.) La ligne HI, conſidérée comme fixe, ſur laquelle le ſyſtême fait ſa rotation, s'appelle *Axe de rotation.*

COROLLAIRE V.

(166.) Si, par l'axe de rotation HI, on fait paſſer un plan parallele aux directions des puiſſances; & ſi, des points D, A & C, on abaiſſe des perpendiculaires à ce plan, ces perpendiculaires que nous nommerons d, a & c, ſeront égales entre elles, & à D' *ſin* Σ, A' *ſin* Σ, & C' *ſin* Σ (135.). Subſtituant donc les lettres d, a & c dans la formule de l'angle de rotation, en place des quantités D' *ſin* Σ, A' *ſin* Σ, & C' *ſin* Σ, chacune pour celle qui lui correſpond, cette formule deviendra $\frac{dſpdt(c\gamma+d\delta+b\beta)}{C'^2C+D'^2D+B'^2B}$; expreſſion qui, comme on le voit, eſt la même que celle qu'on a trouvée pour le cas où tous les corps du ſyſtême ſont dans le même plan de rotation AB.

DÉFINITION XXVII.

(167.) Nous appellerons *Plan directeur* ce plan qui, paſſant par l'axe de rotation, eſt parallele aux directions des puiſſances.

COROLLAIRE VI.

(168.) Puiſque d, c & b marquent les diſtances perpendiculaires des points D, C & B au plan directeur, ſi nous nommons p la diſtance perpendiculaire du centre de toutes les puiſſances au même plan; & ſi nous repréſentons par π la ſomme des mêmes puiſſances, on aura la ſomme des moments des puiſſances, c'eſt-à-dire, $\gamma c+d\delta+b\beta+\&c.=p\pi$ (104.), d'où l'on tire $\frac{dſp\pi dt}{C'^2C+D'^2D+B'^2B}$ pour l'expreſſion de l'angle de rotation, ou enfin en faiſant le dénominateur $C'^2C+D'^2D+B'^2B+\&c.=S$, cette expreſſion deviendra $\frac{dſp\pi dt}{S}$: S marquant ici la ſomme des moments d'inertie. *

* Il eſt néceſſaire de remarquer que depuis *l'Art.* 160, les moments d'inertie n'exprimen

COROLLAIRE VII.

(169.) On verra aiſément, en examinant ces formules, qu'elles n'exigent point que les centres de maſſe des corps pris deux à deux, comme D & C, ſe trouvent préciſément dans la droite AB, comme nous l'avons ſuppoſé dans *l'Art.* 160 ; on peut les ſuppoſer plus hauts, ou plus bas, dans la même ligne CD ; car cela n'affecte nullement les diſtances DH, AG & CI, & par conſéquent le dénominateur $C'^2C+D'^2D+B'^2B+\&c.$, ni l'angle de rotation n'éprouvent aucun changement. La ſeule choſe qui changera ſera le centre G des maſſes ; mais il ſe maintiendra toujours dans la droite, ou axe HI.

COROLLAIRE VIII.

(170.) Les mêmes formules n'exigent pas non plus que les centres des puiſſances qui agiſſent ſur les corps pris deux à deux, comme D & C, tombent préciſément dans la ligne AB, ni dans le centre de maſſe des mêmes corps, comme nous l'avons ſuppoſé dans *l'Art.* 160 : elles exigent ſeulement que la diſtance p du centre de toutes les puiſſances au plan directeur, reſte toujours la même ; que ce centre ſoit placé en K, ou en quelque autre point de la ligne LKN parallele à l'axe, il en réſultera toujours le même angle de rotation, puiſque la quantité p conſerve toujours la même valeur.

PROPOSITION XXI.

(171.) *Si l'on faiſoit varier le centre des puiſſances, de maniere qu'il ſortît de la ligne, ou plan* GA, *qui, paſſant par le centre des maſſes, eſt perpendiculaire au plan directeur HI, le ſyſtême ne tourneroit pas alors ſur l'axe fixe HI, mais ſur un autre axe qui, paſſant par le centre de gravité, ſeroit perpendiculaire à un plan parallele aux directions des puiſſances, & paſſant par le centre des maſſes & par celui des puiſſances.*

Suppoſons que les directions des puiſſances ſont perpendiculaires au plan du papier ſur lequel la figure eſt tracée, & que leur centre ſe trouve en O. Soit imaginé le plan GO, parallele aux directions ; & par le centre G ſoit élevé la perpendiculaire GQ ſur ce plan, cette perpendiculaire ſera l'axe fixe ſur lequel le ſyſtême ſera ſa rotation. Car ſuppoſons que le ſyſtême puiſſe auſſi tourner ſur la

plus le produit de chaque corps par le quarré de ſa diſtance au centre des maſſes qui compoſent le ſyſtême, comme notre Auteur les a définis d'après *Léonard Euler*, & comme il les avoit employés avant cet article ; mais ces moments expriment le produit de chaque corps par le quarré de ſa diſtance à l'axe de rotation. Cette derniere définition revient à la premiere, lorſque les corps ſont dans un même plan.

Digitized by Google

ligne GO ; dans ce cas, les produits des puiſſances ſituées de part & d'autre du plan GO, par leurs diſtances perpendiculaires au même plan, doivent former le numérateur de l'expreſſion de l'angle de rotation ; mais la ſomme de ces produits eſt égale à zéro : donc le ſyſtême ne peut tourner ſur la ligne GO, & par conſéquent la ligne QT ne peut non plus tourner ſur GO. Donc QT ſera l'axe fixe ſur lequel le ſyſtême doit tourner. *

COROLLAIRE I.

(172.) Si l'on fait paſſer par QGT un plan parallele aux directions des puiſſances, ce plan ſera le plan directeur (167.) ; p exprimera la perpendiculaire abaiſſée du centre O des puiſſances ſur le plan directeur QGT (168.) ; & GO ſera le plan de rotation qui, paſſant par le centre G des maſſes, & par celui O des puiſſances, eſt parallele aux directions de celles-ci (163.).

COROLLAIRE II.

(173.) Comme un corps fini quelconque peut être conçu diviſé en une infinité d'autres corps infiniment petits, & unis entre eux par la nature, il s'enſuit que l'angle de rotation produit pendant la différencielle de temps dt, autour d'un axe, par un nombre quelconque de puiſſances qui agiſſent ſur un corps dans des directions paralleles, ſera $= \frac{dt\int pv}{S} = \frac{Pdt\int v \sin \Sigma}{S}$: en marquant par P la diſtance du centre des puiſſances à l'axe de rotation ; & par Σ l'angle que forme la ligne qui meſure cette diſtance, avec le plan directeur.

COROLLAIRE III.

(174.) Si l'un des corps eſt infini, ce corps reſtera fixe (141.), & ſon centre de gravité concourra avec le centre de gravité du ſyſtême. Le ſyſtême tournera alors autour de ce corps, ou ſur un axe fixe qui, paſſant par ſon centre de gravité, ſera perpendiculaire à un plan parallele aux directions, & qui paſſe par ce point fixe, & par le centre des puiſſances.

COROLLAIRE IV.

(175.) L'expreſſion de l'angle de rotation ſera dans ce cas, comme

* Ceci paroîtra d'ailleurs évident, ſi l'on conſidere que le point O étant, par l'hypotheſe, le centre des puiſſances, & que le ſyſtême devant tourner ſur ſon centre de gravité G, (Voyez les *Articles* 129 & ſuiv. & particuliérement la troiſieme note de l'Article 129.) le plan GO parallele aux directions des puiſſances, & dans lequel ſe trouve leur réſultante, ſera néceſſairement le plan de rotation. Par conſéquent toutes les parties du ſyſtême décriront des arcs paralleles à ce plan GO. Donc le ſyſtême tournera ſur un axe perpendiculaire à ce plan, c'eſt-à-dire, ſur la ligne QT.

Digitized by Google

PLANC. I. ci-dessus, $= \frac{d\int a\,dt + d\int b^2\,dt + \&c. \ldots + d\int e\,dt}{A'^2 A + B'^2 B + \&c. \ldots + E'^2 E}$; expression qui se réduit, le corps E étant infini, à $\frac{d\int a\,dt + d\int b^2\,dt + \&c.}{A'^2 A + B'^2 B + \&c.} * = \frac{d\int p\,r\,dt}{S} = \frac{P\,d\int r\,dt\,\sin\Sigma}{S}$.

SCOLIE.

(176.) Dans ce cas, le centre de gravité du système est dans l'axe fixe : les distances A', B', C', &c. sont celles des corps au même axe fixe ; a, b, c, &c. & p sont les perpendiculaires abaissées des puissances & de leur centre sur le plan directeur, lequel coïncide avec le même axe fixe ; P est la distance perpendiculaire du centre des puissances à l'axe ; π la somme de toutes les puissances ; & S la somme des produits des corps, ou masses, par le quarré de leurs distances perpendiculaires au même axe fixe.

LEMME III.

(177.) *Si l'on appelle* Z *la somme des produits des corps, ou masses, par le quarré de leurs distances respectives à un axe qui passe par leur centre de masse, & qui soit en même temps parallele à celui qui passe par le point fixe ; & si de plus on appelle* G *la distance du même centre des masses à l'axe fixe, on aura* $S = G^2 M + Z$.

FIG. 13. Car soit $IKLN$ un corps qu'on peut regarder comme un système de corps liés entre eux ; H son centre de gravité ; O l'axe fixe perpendiculaire au plan de rotation, que nous supposerons être le même que celui de la figure ; & Q un petit poids, un corpuscule, ou une petite ligne perpendiculaire au plan de rotation, ou parallele aux axes. Cela posé, le quarré de OQ, distance perpendiculaire du corpuscule Q à l'axe fixe O est égal à la somme des quarrés de $OH = G$, & de HQ ; plus à deux rectangles de OH par HT. La même chose aura lieu pour chacun des corpuscules dont le corps est composé. Donc la somme des produits de chaque corpuscule, ou masse élémentaire, par le quarré de sa distance perpendiculaire à l'axe fixe O, sera $= G^2 M + \int HQ^2 . Q + 2G\int HT . Q$; c'est-à-dire que $S = G^2 M + Z + 2G\int HT . Q$. Mais $\int HT . Q$ est la somme des pro-

* Cela est évident ; car, par le Corollaire précédent, la distance E', ainsi que la perpendiculaire e sont chacune égales à zéro.

On voit encore, par ces deux Corollaires, qu'on peut regarder le point fixe sur lequel un système de corps est assujetti à tourner, comme le centre de gravité d'un autre système qui auroit un corps de plus ; ce corps additionnel étant supposé infini à l'égard de la somme des autres, & placé sur le point fixe. On voit, par ces formules, que la considération de ce corps infini est inutile relativement à l'angle de rotation, qui par conséquent sera le même dans les deux systèmes. Dans ce cas, comme dans tous les autres, les moments d'inertie sont le produit de chaque corps par le quarré de sa distance à l'axe fixe. Cette note est analogue à celle de *l'Article* 142.

Digitized by Google

duits des corpuſcules, ou maſſes, par leurs diſtances au plan directeur YX, & cette ſomme eſt égale (120.) au produit de la maſſe totale M, par la diſtance du centre des maſſes H au plan YX, laquelle diſtance eſt zéro : donc $\int HT.Q=0$, & par conſéquent $G^2M+Z=S$. PLANC. II.

COROLLAIRE I.

(178.) En ſubſtituant cette valeur de S dans les expreſſions de l'angle de rotation, elles deviendront dans le cas d'un axe fixe $=\frac{\int(dtfr\omega dt)}{G^2M+Z}=\frac{Pf(dtfr dt\ fin\ \Sigma)}{G^2M+Z}$.

COROLLAIRE II.

(179.) Lorſque $G=0$; c'eſt-à-dire, lorſque l'axe fixe paſſe par le centre des maſſes, ou que le ſyſtême tourne ſur ſon centre de maſſe, on a $S=Z$; dans ce cas, les expreſſions ci-deſſus ſe réduiſent à celles qu'on a données dans les *Art.* 157 & 158. Donc le ſyſtême, ou le corps, étant libre, ſa rotation ſe fait de la même maniere que s'il tournoit ſur ſon centre de maſſe ſuppoſé fixe; c'eſt ce qui a déjà été démontré, *Art.* 159.

COROLLAIRE III.

(180.) Quand le centre des puiſſances coïncide avec celui des maſſes, comme il arrive dans les corps peſants, lorſqu'ils deſcendent par la ſeule action de la gravité, on a $G=P$. Donc, dans ce cas, l'angle de rotation ſur un axe fixe ſera $=\frac{\int(dtfp\cdot dl)}{P^2M+Z}=\frac{Pf(dtfr dt\ fin\ \Sigma}{P^2M+Z}$.

PROPOSITION XXII.

(181.) *Le centre de gravité dans les corps peſants qui deſcendent par la ſeule action de la gravité, en tournant autour d'un point, ou axe fixe, ne peut parvenir au repos qu'en deſcendant le plus bas qu'il eſt poſſible.*

Soit $ABCD$ un corps peſant, qui doit tourner librement autour de l'axe E, par la ſeule action de la gravité. Soit G le centre de gravité du corps, HO un plan horiſontal, & FI un plan vertical, qui paſſent par l'axe fixe E. Ayant tiré la ligne EG perpendiculaire à l'axe, elle ſera $=P$, & l'angle $GEI=\Sigma$. Le ſeul cas où le corps peut reſter ſans mouvement, eſt ſans contredit celui dans lequel, au commencement de l'action, la différencielle $\frac{Pdtfr dt\ fin\ \Sigma}{P^2M+Z}$ de l'angle de rotation eſt égale à zéro. Mais quelle que ſoit la ſituation du corps, cette quantité ne peut être zéro que lorſque $Pfin\ \Sigma=GK=0$, ou lorſque $\Sigma=0$. Donc il faut que le corps parvienne à cette ſi- FIG. 14.

Digitized by Google

PLANC. I. tuation pour pouvoir s'arrêter, ou rester en repos. Or cette situation ne peut avoir lieu que lorsque le corps parvient au point où la perpendiculaire $GN = P \cos \Sigma$ a la plus grande valeur, ou est un *maximum*; car, en différenciant, on a pour ce cas $Pd\Sigma \sin \Sigma = 0$, qui donne $P \sin \Sigma = 0$. Donc un corps ne peut rester en repos que lorsque son centre de gravité G est parvenu à sa plus grande distance du plan horisontal HO, ou, ce qui revient au même, que lorsqu'il est descendu le plus bas qu'il est possible.

DES PENDULES.

DÉFINITION XXVIII.

(182.) On appelle *Pendule simple* un corps infiniment petit, ou entiérement réuni dans un point A suspendu à un fil infiniment mince, ou à une ligne inflexible AC.

DÉFINITION XXIX.

(183.) Le point C étant fixe, si l'on éloigne le corps A de la
PLAN. 25. verticale CB, comme en CA, & qu'ensuite on l'abandonne à lui-même, le pendule se meut en vertu de la gravité qui est la puissance qui l'anime, & va jusqu'en Ca; ensuite il revient de nouveau en CA, & ainsi continuellement. Chacune de ces allées & venues s'appelle une *Oscillation*.

COROLLAIRE I.

(184.) Comme il n'y a qu'un seul corps dans ce système, ou pendule simple, & qu'une seule puissance qui l'anime, toutes les quantités qui entrent dans l'expression de l'angle de rotation doivent, dans ce cas, être égales à zéro, excepté une: par conséquent l'angle de rotation du pendule simple $= \frac{dt\,s\alpha\,dt}{A^2 A} = \frac{P\,dt\,s\,dt \sin \Sigma}{A^2 A}$, ou à cause que $P = A' = CA$, $= \frac{dt\,s\,dt \sin \Sigma}{CA \cdot A}$.

COROLLAIRE II.

(185.) Comme la puissance α est constante dans les corps qui tombent par l'action de la gravité; & qu'on a (50.) $\frac{\alpha}{A} = \xi$, il s'ensuit que l'angle de rotation du pendule simple sera $= \frac{\xi\,dt\,s\,dt \sin \Sigma}{CA}$; Σ marquant l'angle BCA que forme le pendule simple avec la verticale CB, à quelque instant que ce soit de son oscillation; de sorte que l'angle total, ou l'oscillation entiere sera $= 2\Sigma = \frac{\xi}{CA} \int (dt\,s\,dt \sin \Sigma)$.

DÉFINITION

Définition XXX.

PLANC. I.

(186.) On appelle *Pendule composé* tout autre pendule dans lequel le corps, ou le fil, a quelque volume, ou qui est composé de plusieurs corps unis entre eux, comme *A* & *B*. FIG. 16 & 17.

Corollaire I.

(187.) L'angle de rotation du pendule composé est (180.) $= \frac{Pf(dsfdt\,fin\,\Sigma)}{P^2M+Z}$: ou, à cause que π est constant, & que $\frac{\pi}{M} = \xi$ (50.), $= \frac{P\xi Mf(dsfdt\,fin\,\Sigma)}{P^2M+Z}$.

Corollaire II.

(188.) Si un pendule simple & un pendule composé font leurs oscillations dans le même temps, & si ces oscillations sont d'ailleurs égales; c'est-à-dire, si l'angle Σ de l'une est toujours égal à l'angle Σ de l'autre, on aura $\frac{\xi f(dsfdt\,fin\,\Sigma)}{CA} = \frac{P\xi Mf(dsfdt\,fin\,\Sigma)}{P^2M+Z}$, ou à cause que la quantité $\xi f(dsfdt\,fin\,\Sigma)$, qui se trouve dans l'un & dans l'autre membre de l'équation, est la même de part & d'autre, par les conditions du problême, on aura, en réduisant, $\frac{1}{CA} = \frac{PM}{P^2M+Z}$; expression qui donne la longueur du pendule simple isochrone au pendule composé ; c'est-à-dire, $CA = \frac{P^2M+Z}{PM} = P + \frac{Z}{PM}$.

Corollaire III.

(189.) Substituant en place de P^2M+Z son égale S, la longueur CA du pendule simple isochrone au pendule composé sera $= \frac{S}{PM}$.

Définition XXXI.

(190.) Si, dans un pendule composé, on prend, dans la ligne qui joint le centre de gravité & l'axe fixe, un point qui soit éloigné de l'axe fixe de toute la longueur du pendule simple, dont les oscillations sont de la même grandeur & de la même durée que celles du pendule composé, ce point est ce qu'on appelle *Centre d'oscillation.*

Corollaire I.

(191.) Le centre d'oscillation sera donc éloigné du centre de gravité, de la quantité $\frac{Z}{PM} = P + \frac{Z}{PM} - P$, qui est la différence entre les distances du centre d'oscillation & du centre de gravité à l'axe, ou au point fixe.

Digitized by Google

PLANC. I

COROLLAIRE II.

(192.) Le centre d'oſcillation eſt donc toujours plus éloigné de l'axe fixe, que le centre de gravité, puiſqu'on a $P+\frac{Z}{PM}>P$.

PROPOSITION XXIII.

(193.) *La longueur du pendule ſimple iſochrone eſt auſſi* $=\frac{(A'A^2+B'^2B+C'^2C+\&c.)\sin\Sigma}{A'A\sin\alpha+B'B\sin\beta+C'C\sin\gamma+\&c.}$; Σ *marquant l'angle* DCG *que forme la verticale* CD, *ou le plan vertical perpendiculaire aux directions, avec la ligne* CG, *qui paſſe par le centre de gravité* G ; & α, β, γ, &c., *les angles* DCA, DCB, &c. *que forme la même verticale, ou le même plan, avec les lignes tirées du point fixe* C *à chacun des corps dont eſt compoſé le pendule.*

FIG. 16.

Car $P\sin\Sigma=p$ (158.), ou $P=\frac{p}{\sin\Sigma}$, en ſubſtituant cette valeur dans la formule de *l'Art.* 189, on aura la longueur du pendule ſimple iſochrone $=\frac{S\sin\Sigma}{pM}$. Mettant dans cette expreſſion, pour S, ſa valeur $A'^2A+B'^2B+C'^2C+\&c.$, & pour pM ſa valeur $aA+bB+cC+\&c.=A'A\sin\alpha+B'B\sin\beta+C'C\sin\gamma+\&c.$, la longueur du pendule ſimple iſochrone ſera $=\frac{(A'^2A+B'^2B+C'^2C+\&c.)\sin\Sigma}{A'A\sin\alpha+B'B\sin\beta+C'C\sin\gamma+\&c.}$.

COROLLAIRE.

(194.) Si tous les angles α, β, γ, &c. ſont égaux ; c'eſt-à-dire, ſi tous les corps A, B, &c. ſont dans une même ligne, ou plan BAC, qui paſſe par le point, ou axe fixe, C ; & ſi chacun de ces corps en particulier peut être regardé comme réuni en un ſeul point de la même ligne, ou du plan, le numérateur & le dénominateur de l'expreſſion pourront alors ſe diviſer par le même ſinus, & la longueur du pendule ſimple deviendra, pour ce cas, $=\frac{A'^2A+B'^2B+C'^2C+\&c.}{A'A+B'B+C'C+\&c.}$.

SCOLIE.

(195.) Cette formule que beaucoup d'Auteurs ont donnée comme générale, n'eſt certaine que dans le cas ci-deſſus : dans tous les autres, où les corps qui compoſent le pendule ne ſeroient pas réunis dans une ligne qui paſſât par le point fixe, elle eſt tout-à-fait ſans fondement.

DES LEVIERS.

DÉFINITION XXXII.

(196.) Lorſque deux puiſſances α & β agiſſent dans les directions

Digitized by Google

AD, *BE*, sur un corps inflexible *AB*, appuyé, ou fixé en *C*, cette espece d'instrument, ou corps inflexible s'appelle un *Levier*; & le point *C* sur lequel il est fixé, s'appelle *Point d'appui*, ou *Hypomochlion*. PLANC. I. FIG. 18, 19 & 20.

DÉFINITION XXXIII.

(197.) Lorsque l'hypomochlion est entre les deux puissances appliquées en *A* & *B*, on l'appelle *Levier de la premiere espece*. Si l'hypomochlion est à l'une des extrémités, la puissance β étant appliquée en *B*, c'est-à-dire, la plus éloignée de l'hypomochlion, tandis que l'autre puissance α, qu'elle est destinée à vaincre, est appliquée en *A*, c'est-à-dire, plus proche du point d'appui, ce levier s'appelle *Levier de la seconde espece*. Enfin si l'hypomochlion étant toujours à l'une des extrêmités, la puissance β en est plus proche que la puissance α qu'elle est destinée à vaincre, on l'appelle *Levier de la troisieme espece*. FIG. 18. FIG. 19. FIG. 20.

COROLLAIRE I.

(198.) L'angle *CAD* étant supposé $= \Sigma$, & l'angle *CBE* $= \sigma$, l'angle de rotation produit pendant la différencielle de temps dt, sera généralement dans les leviers $= \frac{dt.ds(CB.\beta\ fin\ \sigma - CA.\alpha\ fin\ \Sigma)}{S}$ (129); *S* marquant la somme de tous les moments d'inertie, ou de tous les produits de chaque particule des masses mises en mouvement par le quarré de la distance au point fixe *C*.

COROLLAIRE II.

(199.) Puisque *CB*. *fin* σ = la perpendiculaire *CF*; & que *CA*. *fin* Σ = la perpendiculaire *CG*, l'angle de rotation produit pendant la différencielle de temps dt sera aussi $= \frac{dt.ds(CF.\beta - CG.\alpha)}{S}$.

COROLLAIRE III.

(200.) Il suit de là que plus la perpendiculaire *CF* sera grande à l'égard de la perpendiculaire *CG*, moins il faudra que la puissance β destinée à vaincre la puissance α, soit considérable. Ce sera la même chose, plus la perpendiculaire *CG* sera petite à l'égard de la perpendiculaire *CF*.

COROLLAIRE IV.

(201.) Il convient donc que la direction *BE* soit perpendiculaire à la longueur du levier, afin que *CF* parvienne à la plus grande valeur qu'elle puisse avoir.

Digitized by Google

COROLLAIRE V.

(202.) Il convient encore que la matiere dont le levier eſt compoſé ait le moins de denſité qu'il eſt poſſible, ou que les efforts qu'il doit ſoutenir peuvent le permettre; parce qu'alors la maſſe étant la moindre qu'il eſt poſſible, les quantités qui forment le dénominateur, ſe trouvent diminuées le plus qu'il eſt poſſible; ce qui augmente la valeur de l'angle de rotation.

COROLLAIRE VI.

(203.) Si, dès le commencement de l'action des puiſſances, on avoit $CB.\beta \sin \sigma = CA.\alpha \sin \Sigma$, ou $CF.\beta = CG.\alpha$, l'angle de rotation ſeroit égal à zéro, & le levier reſteroit ſans mouvement, c'eſt-à-dire, en équilibre.

COROLLAIRE VII.

(204.) Ce qu'on vient de dire de deux puiſſances, doit s'entendre d'un nombre quelconque de puiſſances qu'on appliqueroit au levier; car on a vu dans *l'Art.* 104, que $p\pi = a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta + \&c.$ & par conſéquent la ſomme des momens de toutes ces puiſſances produit le même effet qu'une ſeule puiſſance π placée à la diſtance p de l'hypomochlion.

COROLLAIRE VIII.

(205.) L'angle de rotation dans le levier pouvant s'exprimer généralement par $\frac{dsf.vdt}{S}$, π exprimant une puiſſance quelconque qui agit à la diſtance p de l'hypomochlion; & de même par $\frac{udt}{p}$ (131.), en ſuppoſant que u repréſente la viteſſe du point auquel la puiſſance eſt appliquée: on aura par conſéquent $\frac{dsfpvdt}{S} = \frac{vdt}{p}$; d'où l'on tire, en diviſant par dt, & en différenciant, $p^2\pi dt = Sdu$; ce qui donne la puiſſance $\pi = \frac{Sdu}{p^2 dt}$.

COROLLAIRE IX.

(206.) Lorſqu'un levier tourne ſur un point quelconque, l'action qu'il éprouve eſt proportionnelle à Sdu, c'eſt-à-dire que cette action eſt en raiſon compoſée de la ſomme S des moments d'inertie, & de la différencielle du.

COROLLAIRE X.

(207.) Puiſque l'angle de rotation, ou la viteſſe angulaire eſt $= \frac{udt}{p}$, la différencielle du ſera proportionnelle à la différencielle

Digitized by Google

de la viteſſe angulaire ; par conſéquent l'action que ſouffre le levier ſera en raiſon compoſée de la ſomme S des moments d'inertie, & de la différencielle de la viteſſe angulaire. PLANC. I.

SCOLIE I.

(208.) Lorſqu'un levier eſt fixé par un quelconque de ſes points, ſans avoir la liberté de tourner ſur ce point, on doit conſidérer ce point comme *l'hypomochlion*, ou *l'appui* ſur lequel le levier tend à tourner; mais comme, par l'hypotheſe, il ne tourne pas, il faut qu'il y ait équilibre entre les moments (138.) : d'où l'on voit, que ſi tous les moments des forces qu'on a employées ſont poſitifs, il faut néceſſairement qu'il y en ait d'autres qui ſoient négatifs. Ces moments négatifs trouvent leur exiſtence dans la maſſe même du levier, dans ſes fibres qui agiſſent dans une direction contraire, en vertu de leurs forces d'attraction, de cohéſion, ou d'une nature quelconque, comme l'expérience le fait voir. Ainſi, ſi des puiſſances quelconques agiſſoient ſur le levier CA fixe ſur ſa baſe $KEDG$, FIG. 82. de maniere que leurs efforts réunis tendiſſent à le faire tourner ſur l'axe GE, toutes les fibres, ou tous les points de la même baſe réſiſteroient, & le moment de chacune de ces fibres ſeroit la force effective qu'elle exerce, multipliée par ſa diſtance perpendiculaire à l'axe EG. Si nous appellons donc f cette force effective de chaque fibre, & a, b, c, d, &c. les différentes diſtances perpendiculaires reſpectives des fibres à l'axe EG, on aura le moment de la réſiſtance des fibres $= f(a+b+c+d+\&c.)$: donc, par la ſuppoſition que le levier ne peut pas tourner, on aura $p\pi = f(a+b+c+d+\&c.)$, ou $f = \frac{p\pi}{a+b+c+d+\&c.}$; π déſignant la puiſſance qui agit ſur le levier, & p la diſtance perpendiculaire de l'axe EG à la direction de cette même puiſſance.

On obſervera que, dans ce cas, la lettre f ne déſigne pas ſeulement l'intenſité de la force abſolue de chaque fibre, mais le produit de cette force, par l'amplitude, ou l'aire de la fibre. Suppoſant donc $CB = x$, & FH parallele à l'axe $= y$, l'aire de la fibre ſera $= dydx$; & ſi nous repréſentons par f l'intenſité qui en réſulte, la force de chaque fibre ſera $= fydx$: par conſéquent toute la force de la différencielle HI ſera $= fydx$, & ſon moment $= fyxdx$. Donc, dans le cas où le levier ne tourne pas, on aura $\int fyxdx = p\pi$, ou $f = \frac{p\pi}{\int yxdx}$; bien entendu que dans l'expreſſion $\int yxdx$ on renferme non ſeulement les moments poſitifs des fibres du ſegment

Digitized by Google

GDE, mais auſſi les moments du ſegment GKE qui agiſſent auſſi poſitivement, & réſiſtent également à la rotation, quoique dans celui-ci les x ſoient négatives; parce que les forces $fydx$ des fibres ſont en même temps négatives : car il eſt facile de voir que dans ce ſegment, les fibres ſe compriment, au lieu qu'elles ſe dilatent, ou tendent à ſe dilater dans l'autre ſegment. Les moments de chacun de ces ſegments ſont égaux (103.) au produit de leur ſurface, par l'intenſité f de la force des fibres, & par la diſtance de leur centre de gravité à l'axe GE. Donc ſi nous ſuppoſons la ſurface $GDE = A^2$, la ſurface $GKE = a^2$, la diſtance du centre de gravité de la premiere à l'axe $= K$, & celle de la ſeconde au même axe $= k$, on aura $\int xydx = KA^2 + ka^2$, & par conſéquent $f = \frac{p^n}{KA^2+ka^2}$.

COROLLAIRE XI.

(209.) On doit entendre la même choſe, quoique le levier tourne ſur un point quelconque; car quelle que ſoit l'action à laquelle il eſt ſoumis, l'effet de cette action doit néceſſairement ſe manifeſter en quelque ſection comme KD.

COROLLAIRE XII.

(210.) On a vu (205.) que, dans la rotation du levier, on a $\pi = \frac{Sdu}{p^n dt^2}$; on aura donc auſſi, dans ce cas, $f = \frac{Sdu}{pdt(KA^2+ka^2)}$; c'eſt-à-dire que l'action qui réſulte ſur les fibres, eſt comme Sdu, ou comme le produit de la ſomme S des moments d'inertie, par la différencielle de la viteſſe angulaire.

COROLLAIRE XIII.

(211.) Si l'intenſité totale, ou la force effective des fibres qui compoſent le levier, eſt plus grande que $\frac{p^n}{KA^2+ka^2}$, ou que $\frac{Sdu}{pdt(KA^2+ka^2)}$, le levier réſiſtera; mais il ſe rompra, ſi cette force eſt plus petite.

COROLLAIRE XIV.

(212.) Si l'on ſuppoſe que la baſe $KGDEK$ augmente proportionnellement dans toutes ſes dimenſions linéaires, la quantité $KA^2 + ka^2$ ſera comme $L^2 l$ *, L exprimant le diametre KD, & l celui qui

* On peut aiſément ſe rendre raiſon de ceci. Si l'on repréſente par L' & l' les dimenſions linéaires homologues dans une autre baſe ſemblable à $KGDEK$, il eſt évident que les produits, ou moments correſpondants KA^2, $K'A'^2$, donneront cette proportion $KA^2 : K'A'^2 :: K^2 : K'^2$ (repréſentant les parties homologues des deux baſes, par les mêmes lettres accentuées), ou

lui est perpendiculaire. Nous pourrons donc faire $KA^2+ka^2=nL^2l$, n désignant un nombre quelconque ; ce qui donnera $f=\frac{P\pi}{nL^2l}$, ou $f=\frac{Sdu}{pdt(nL^2l)}$.

COROLLAIRE XV.

(213.) Si l'on suppose dans un levier $f=\frac{P\pi}{nL^2l}$, & dans un autre $F=\frac{P\varphi}{nL'^2l'}$, on aura $f:F::\frac{P\pi}{L^2l}:\frac{P\varphi}{L'^2l'}$.

COROLLAIRE XVI.

(214.) Si les leviers sont d'une même matiere, on aura $f=F$, & $\frac{P\pi}{L^2l}=\frac{P\varphi}{L'^2l'}$: d'où il suit que les forces π & φ que ces leviers pourront supporter, seront entre elles comme $\frac{P}{L^2l}$ est à $\frac{P}{L'^2l'}$, ou comme $\frac{L'^2l'}{P}$ est à $\frac{L^2l}{P}$; c'est-à-dire, en raison directe de L'^2l', & en raison inverse de P ; ou en raison directe de KA^2+ka^2, & en raison inverse de p.

COROLLAIRE XVII.

(215.) Ce qu'on vient de dire de la section KD, doit s'entendre d'une autre section quelconque, comme LM. L'intensité de la force des fibres, dans cette derniere section, sera pareillement $F=\frac{P\varphi}{K'A'^2+k'a'^2}=\frac{P\varphi}{nL'^2l'}$, avec la seule différence que, dans ce cas, P marque la distance de l'axe situé dans la section LM, à la direction de la puissance. Donc si nous supposons l'intensité de la force des fibres en $KD=f=\frac{P\pi}{nL^2l}$, & l'intensité en $LM=F=\frac{P\varphi}{nL'^2l'}$, comme ces deux intensités F & f sont égales lorsqu'il s'agit d'un levier homogène, nous aurons $\frac{P\pi}{L^2l}=\frac{P\varphi}{L'^2l'}$, ou $\pi:\varphi::PL^2l:pL'^2l'$: ainsi, pour qu'un levier soit capable d'une même résistance dans tous ses points, ou dans toutes ses distances de la base, ou pour qu'il puisse supporter avec une égale force l'action de la même puissance $\varphi=\pi$, on doit avoir $PL^2l=pL'^2l'$, ou $L^2l:L'^2l'::p:P$; c'est-à-dire que les dimensions linéaires du levier, dans ses différents points, ou dans ses différentes sections, telles que KD, LM, doivent être comme

---

: : $L^3:L'^3$. Il en sera de même des produits, ou moments ka^2, $k'a'^2$; donc $KA^2:K'A'^2::ka^2:k'a'^2$, & par conséquent $KA^2+ka^2:K'A'^2+k'a'^2::KA^2:K'A'^2$, ou : $L^3:L'^3$, ou enfin : : $L^2l:L'^2l'$. Mais à cause de la similitude des bases, on a $L:L'::l:l'$, donc $L^2L:L'^2L'::L^2l:L'^2l'$: par conséquent $KA^2+ka^2:K'A'^2+k'a'^2::L^2l:L'^2l'$. Donc, &c.

Digitized by Google

les racines cubiques de leurs distances à la direction de la puissance. *

COROLLAIRE XVIII.

(216.) Il suit de là que, pour que le levier soit également fort dans tous ses points, il doit avoir la forme d'un conoïde, dont les côtés KL & DM, soient des paraboles du second genre. Car, en supposant que y soit une des dimensions linéaires des sections KD, LM, x la distance de ces sections à la direction de la puissance, & que Q représente le parametre de la parabole, on doit avoir constamment $y^3 = Q^2x$, pour que le levier soit capable de la même résistance dans tous ses points. **

COROLLAIRE XIX.

(217.) Si, au lieu d'une seule puissance π agissante sur le levier, il y en avoit plusieurs qui fussent égales entre elles, & également distribuées sur sa longueur, il est évident que la somme des moments qu'elles exerceront à l'égard d'une section quelconque, comme les sections KD, LM, sera $= \frac{1}{3}x^3\alpha$; α exprimant une quelconque de ces puissances égales. Donc, pour que des leviers homogènes soient, dans la supposition actuelle, d'une égale force dans tous leurs points, il faut que la quantité $\frac{x^3\alpha}{y^3}$ soit constante; c'est-à-dire qu'on doit avoir $y^3 = Qx^2$; équation à une parabole du second genre, mais d'une espeçe différente de celle du Corollaire précédent. ***

* Cette conséquence est évidente, d'après tout ce qu'on vient de dire, & particuliérement d'après la note de l'*Art.* 212 : car on a vu que $L^3 : L'^3 :: L^3 : L'^3 :: l^3 : l'^3$: donc, en substituant, $L^3 : L'^3$, ou $l^3 : l'^3 :: p : P$, d'où l'on tire $L : L'$, ou $l : l' :: \sqrt[3]{p} : \sqrt[3]{P}$.

** Pour rendre cette vérité plus sensible, supposons que y représentant une des dimensions linéaires de la section KD, y' représente une dimension homologue de la section LM; & que x marquant la distance de la premiere section à la direction de la puissance, x' marque la distance de la seconde à la même direction : on aura, par le Corollaire précédent, $y^3 : y'^3 :: x : x'$. Donc si Q^2 est tel qu'en multipliant x, on ait $y^3 = Q^2x$, on aura aussi $y'^3 = Q^2x'$. Donc en général $y^3 = Q^2x$, équation à la parabole du second genre; dont Q est le parametre.

*** Quoique ce Corollaire soit une suite nécessaire de ce qui a été dit dans les deux précédents & dans leurs notes, nous allons cependant le développer davantage en faveur des commençants. Soit x la distance de la section KD à l'extrémité du levier; puisqu'on suppose sur tous les points du levier des puissances égales α, qui agissent dans des directions paralleles pour en opérer la rupture, il est évident que la somme des moments de ces puissances à l'égard de la section KD; sera égale au moment de leur résultante. Mais cette résultante est égale à la somme $x\alpha$ de toutes les puissances; & sa distance à la section $KD = \frac{1}{2}x$, donc son moment $= \frac{1}{2}x^2\alpha$. Marquant également par x' la distance de la section LM à l'extrémité du levier, on aura $\frac{1}{2}x'^2\alpha$ pour la somme des moments de puissances à l'égard de cette section.

Ceci posé, si l'on met ces moments à la place de $p\gamma$ & de $P\varphi$ (215.), on aura $\frac{\frac{1}{2}\gamma^2\alpha}{L^2} = \frac{\frac{1}{2}\gamma'^2\alpha}{L'^2}$,

SCOLIE

Scolie II.

(218.) La situation de l'axe GE peut varier, c'est-à-dire que cet axe peut être plus ou moins éloigné du centre de la base $KGDEK$. Cela dépend de la figure de cette base, de la qualité de la matiere dont le levier est composé, de la disposition dans laquelle il est assujetti, & enfin de la direction de la puissance qui agit sur lui. Cette situation de l'axe peut être plus ou moins avantageuse, ou donner au levier plus ou moins d'avantage pour résister. Supposons que l'axe GE puisse se placer plus voisin de l'extrémité K de la quantité z : dans ce cas, les moments du segment GDE seront $=\int\int ydx\,(x+z)$; & ceux du segment $GKE=\int\int ydx\,(x-z)$; c'est-à-dire que les premiers seront $=\int\int yxdx+\int\int yzdx$, & les seconds $=\int\int yxdx-\int\int yzdx$. Or, la somme de ces moments est plus grande que celle que nous avons eue pour le premier cas, dans lequel $z=0$, de la quantité $\int z\int ydx-\int z\int ydx$: c'est-à-dire, de $\int z$. *aire* $GDE-\int z$. *aire* GKE; & cette quantité sera plus ou moins grande, selon la valeur de z. Donc plus z sera grand, plus KA^2+ka^2, ou son égal nL^2l le sera aussi, & par conséquent plus la valeur de $f=\frac{F^2}{KA^2+ka^2}=\frac{F^2}{nL^2l}$ sera petite. Donc les fibres auront besoin de moins de force pour résister, ou, ce qui revient au même, elles résisteront davantage à un égal degré de force. Donc plus z sera grand, ou plus l'axe sera éloigné du point par lequel passe un axe qui divise la base $KGDEK$ en deux parties égales, plus le levier sera capable de résistance.

Scolie III.

(219.) On a supposé dans tout ce qu'on vient de dire, que la force des fibres, dans la section GKE, est égale à celle qui a lieu dans l'autre section GDE ; mais, comme dans la premiere de ces sections, les fibres résistent à leur compression, & que dans la seconde elles résistent à leur dilatation, il n'y a aucune certitude que ces deux especes de résistances soient égales dans la nature. Cependant on peut les supposer ainsi, jusqu'à ce que l'expérience nous fasse con-

dans tous les points d'un levier homogène qu'on suppose capable d'une égale résistance. y & y' représentant des dimensions linéaires homologues dans les deux sections, les quantités L^3l & L'^3l', qui sont proportionnelles à L^3 & L'^3, sont aussi proportionnelles à y^3 & y'^3 ; donc $\frac{\frac{1}{2}x^2a}{y^3}=\frac{\frac{1}{2}x'^2a}{y'^3}$, c'est-à-dire que $\frac{\frac{1}{2}x^2a}{y^3}$ est une quantité constante. Si l'on fait cette quantité $=m$, on aura $y^3=\frac{a}{2m}.x^2$, ou $y^3=Qx^2$, en faisant $\frac{a}{2m}=Q$; équation à la parabole cubique.

Digitized by Google

PLANC. I. noître la véritable loi suivant laquelle les fibres exercent leurs forces de résistance.

CHAPITRE V.

De l'axe & du rayon de Rotation.

DÉFINITION XXXIV.

(220.) ON appelle *Axe de Rotation* la ligne fixe dans un système de corps, sur laquelle tournent tous les corps qui le composent, en décrivant de petits arcs de cercle, quand même ce ne seroit que dans un instant, ou une différencielle de temps. La distance perpendiculaire du centre de gravité du système à cet axe, s'appelle *Rayon de Rotation.*

PROPOSITION XXIV.

(221.) *Trouver l'axe de rotation, ou le point sur lequel tourne un système.*

Soit un système libre composé d'un nombre quelconque de corps
FIG. 12. unis entre eux par des lignes inflexibles, lequel tourne dans le plan de la Figure; soit de plus C le centre de gravité du système qu'on suppose avoir parcouru, suivant la direction CI, l'espace CD, dans un instant, ou différencielle de temps. Supposant encore qu'un corps quelconque A passe de A en B dans le même instant, soit tiré les lignes ACE, BDE, prolongées jusqu'à ce qu'elles se coupent en E, l'angle AEB sera l'angle de rotation décrit par le système dans le même instant, ou différencielle de temps. (*Voyez la note *** de l'Article* 129). Soit pris $EH = ED$, & soit mené la ligne DH, ensuite par le point F qui divise la ligne CD en deux parties égales, soit élevé la perpendiculaire FG, & en faisant l'angle $CDG = EDH$, le point G sera celui où se trouve l'axe sur lequel tourne tout le système dans l'instant, ou la différencielle de temps, que le centre de gravité a employé à passer de C en D.

Les triangles HED, CGD, sont semblables par la construction, & par conséquent l'angle $HED = CGD$. L'angle $ACI = BDI + HED = BDI + CGD$, & l'angle $IDG = DCG + CGD$. En sommant ces deux égalités, on a $ACI + DCG + CGD = BDI + CGD + IDG$; c'est-à-dire, $ACI + DCG = BDI + IDG$, ou $ACG = BDG$: de sorte que, si, donnant un petit mouvement au système, on fait tomber C

Digitized by Google

sur D, & A sur B, & la ligne AC sur BD, à cause des angles égaux ACG & BDG, la ligne CG tombera sur la ligne DG, & le point G sera demeuré immobile pendant le mouvement. De plus, les triangles ACG, BDG, étant semblables & égaux, donnent $AG=BG$, & par conséquent le corps A aura décrit, dans l'instant, ou la différencielle de temps, le petit arc AB, dont le rayon est AG.

On démontrera la même chose de tout autre corps du système: donc le point G, où le plan directeur est rencontré par la perpendiculaire FG à la direction CI, & menée du centre de gravité, sera celui où passe l'axe de rotation.

COROLLAIRE I.

(222.) A mesure que le centre de gravité passe d'un lieu à un autre, l'axe de rotation varie, & il ne peut être fixe, à moins que le centre de gravité ne le soit aussi; & dans ce cas, tout le système tourne sur un axe qui passe par ce centre.

COROLLAIRE II.

(223.) Donc il n'y a point d'axe fixe dans le système, si ce n'est pour un instant, ou différencielle de temps, lorsqu'il ne tourne pas sur celui qui passe par le centre de gravité.

PROPOSITION XXV.

(224.) *Chacune des lignes* DG, CG, *ou le rayon de rotation, est* $= \frac{S r\,dt}{PMf r\,dt \sin \Sigma}$.

Car l'angle $CGD = \frac{CD}{CG}$ (129, *note* ***) est égal à AED (221.), qui est l'angle de rotation; donc $\frac{CD}{CG} = \frac{P dt f r\,dt \sin \Sigma}{S}$. Substituant, dans cette équation, pour CD, sa valeur $\frac{dt f r\,dt}{M}$ (35, 105, ou 116.), on aura $\frac{dt f r\,dt}{M.CG} = \frac{P dt f r\,dt \sin \Sigma}{S}$. Donc $CG = \frac{S f r\,dt}{PM f r\,dt \sin \Sigma}$.

COROLLAIRE I.

(225.) Comme $P \sin \Sigma = p$ (158.), on pourra encore exprimer le rayon de rotation par $\frac{S f r\,dt}{M f p r\,dt}$.

COROLLAIRE II.

(226.) Dans les corps qui tombent librement par la seule action de leur gravité, le centre des puissances coïncide avec celui de gravité; c'est-à-dire que $p=0$: donc le rayon de rotation sera infini; par conséquent les corps qui tombent librement par la seule

Digitized by Google

action de leur gravité, ne peuvent jamais avoir de mouvement de rotation. Il en eſt de même d'un corps qui ſeroit animé par des puiſſances dont le centre coïncideroit avec celui de gravité.

COROLLAIRE III.

(227.) Si la ſomme des puiſſances π eſt égale à zéro, ou ſi elles ſe détruiſent mutuellement par l'oppoſition des quantités poſitives & des quantités négatives, ſans que pour cela l'intégrale $\int \pi dt \sin \Sigma$, ou $\int p\pi dt$ ceſſe d'avoir une valeur, le rayon de rotation ſera auſſi zéro, & par conſéquent le ſyſtême tournera ſur ſon centre de gravité. (110.) *

SCOLIE I.

(228.) M. *Bouguer*, dans ſon *Traité du Navire, Liv. II, Section III, Chap. I*, dit que, ſi une ligne droite eſt pouſſée ou tirée perpendiculairement par deux puiſſances égales, & de directions contraires, appliquées à ſes extrémités, cette ligne tournera ſur ſon centre de gravité. Cette aſſertion eſt vraie non-ſeulement dans ce cas, mais dans tous ceux où les puiſſances ſont égales & de directions contraires, lors même qu'elles n'agiſſent pas perpendiculairement ſur la ligne, & qu'elles ne ſont pas appliquées à ſes extrémités. Il ſuffit, pour cela, comme on vient de le voir, que la ſomme des puiſſances π ſoit $= 0$, comme elle l'eſt en effet lorſque les deux puiſſances ſont égales & de directions contraires. Que les puiſſances ſoient d'ailleurs placées où l'on voudra, & qu'elles agiſſent ſur la ligne, ſous quelque angle que ce ſoit, cela eſt indifférent, pourvu qu'on n'ait pas $\int \pi dt \sin \Sigma$, ou $\int p\pi dt = 0$. Il eſt vrai que ce cas, bien examiné, eſt tout-à-fait imaginaire, & que la formule ne peut lui être appliquée, parce qu'en rigueur une ligne eſt immatérielle; & par conſéquent, dans ce cas, M auſſi-bien que S, ſont zéro. Mais ſi l'on admet qu'il ne s'agit pas d'une ligne mathématique, mais d'un parallélipipede matériel, notre remarque demeure dans toute ſa force.

* On remarquera que l'expreſſion $p\pi$, qui repréſente généralement la ſomme des moments des forces, n'eſt pas zéro toutes les fois que la ſomme π des puiſſances eſt zéro par l'oppoſition des puiſſances poſitives & négatives; car on voit (104.) que p eſt alors infini. La difficulté diſparoîtra, ſi l'on prend pour π, non le zéro abſolu, mais une quantité infiniment petite. En général, $p\pi$ ne peut être zéro, quant à l'angle de rotation, que dans deux cas particuliers, ſavoir, lorſque $p = 0$, qui eſt le cas du Corollaire précédent, & lorſque la ſomme des puiſſances poſitives eſt non-ſeulement égale à celle des puiſſances négatives, mais encore lorſque le centre des unes coïncide avec le centre des autres, ou, ce qui revient au même, lorſque la réſultante des unes eſt égale & directement oppoſée à celle des autres.

Digitized by Google

SCOLIE II.

(229.) *Jean Bernoulli*, dans le Tome IV de ſes Œuvres, N°. CLXXVII, ne détermine le centre, ou l'axe de rotation que dans le cas où $\sin \Sigma = 1$; c'eſt-à-dire, dans le cas où la ligne menée du centre des puiſſances au centre de gravité, eſt perpendiculaire à la direction. La valeur du rayon de rotation ſe réduit, alors, à $\frac{S}{PM}$, qui eſt l'expreſſion que nous avons trouvée (189.) pour la longueur du pendule ſimple, dont les oſcillations ſont de même grandeur & de même durée que celles du pendule compoſé, ou pour la diſtance de l'axe de rotation au centre d'oſcillation du pendule, ou du ſyſtême (190.); ce qui lui a fait croire que le ſyſtême tournoit ſur ſon centre d'oſcillation. En effet, ſi l'on imagine que le ſyſtême tourne ſur ſon centre de gravité fixe, comme ſi c'étoit un pendule, dans ce cas, ſon centre d'oſcillation ſera éloigné de ſon centre de gravité, de la quantité $\frac{S}{PM}$, quoique du côté oppoſé à celui que nous avons vu que ſe trouve l'axe de rotation. M. *Bouguer*, dans ſon *Traité de la Manœuvre des Vaiſſeaux*, *Liv. I*, *Section II*, *Chap. XIV*, remarque bien que ce point eſt du côté oppoſé à celui où l'on place la puiſſance, par rapport au centre de gravité; mais il donne, pour regle générale, que la diſtance du centre de gravité à l'axe de rotation, eſt en raiſon inverſe de celle de ce même centre à la puiſſance, ou comme $\frac{S}{PM}$, tandis que l'expreſſion générale de la diſtance du centre de gravité à l'axe de rotation, eſt $\frac{S\int r dt}{PM\int r dt \sin \Sigma}$; expreſſion qui ne ſe réduit à $\frac{S}{PM}$, & ne répond par conſéquent avec la regle de M. *Bouguer*, que dans le cas où $\sin \Sigma = 1$, & eſt conſtant. Dans tous les autres cas, cette diſtance eſt en raiſon inverſe de la diſtance P, & en raiſon directe de $\frac{\int r dt}{\int r dt \sin \Sigma}$. Cette différence vient de ce que, tant M. *Bouguer*, que *Jean Bernoulli*, n'ont cherché le lieu du centre, ou de l'axe de rotation, que dans le premier inſtant où le ſyſtême ſe met en mouvement. Il eſt certain que pendant la durée de cet inſtant, on peut ſuppoſer $\sin \Sigma$ conſtant, quoiqu'il ne le ſoit pas dans les ſuivans. La quantité $\frac{\int r dt}{\int r dt \sin \Sigma}$ ſe trouve réduite, pour le premier inſtant, à $\frac{1}{\sin \Sigma}$, qui eſt une quantité conſtante; & par conſéquent la diſtance du centre de gravité à l'axe de rotation ſe trouve par-là ſeulement en raiſon inverſe de la diſtance P.

Digitized by Google

CHAPITRE VI.

De la Percuſſion.

DÉFINITION XXXV.

(230.) *LA Percuſſion* eſt le choc, ou le coup que ſe donnent les corps, lorſqu'ils ſe rencontrent, étant mus avec des viteſſes, ou des directions différentes.

DÉFINITION XXXVI.

(231.) Si, après que le choc a eu ſon effet, les corps continuent à ſe mouvoir étant unis, & ne font ſeulement que ſe preſſer, l'action qu'ils exercent s'appelle une *Preſſion.*

DÉFINITION XXXVII.

(232.) Si, dans l'action du choc, aucun des corps ne ſe détermine à la rotation, le point dans lequel ſe fait le choc, s'appelle *Centre de percuſſion.*

On a vu que, dans les corps graves, on appelle *Centre de gravité* le point ſur lequel le corps étant appuyé, demeure en équilibre, ſans ſe déterminer à tourner, ni d'un côté ni de l'autre. Dans l'action du choc, on appelle de même *Centre de percuſſion*, le point dans lequel le corps, étant choqué, demeure en équilibre, ſans ſe déterminer à la rotation, ni d'un côté, ni de l'autre.

AXIOME IV.

(233.) Les corps ſont impénétrables, c'eſt-à-dire, ne peuvent ſe pénétrer de maniere à occuper le même lieu dans le même temps.

Quoique nous voyions journellement qu'un corps s'introduiſe dans un autre, les particules de matiere du premier n'occupent pas pour cela le même lieu que celles du ſecond : celles de celui-ci cedent leur place à celles du premier, & chaque particule occupe un lieu ſéparé, tant avant qu'après, & même dans le temps du choc, de ſorte que deux particules ne peuvent jamais occuper le même lieu.

AXIOME V.

(234.) La nature opere par intervalles, ou par des mouvements ſucceſſifs.

C'eſt ce que quelques-uns ont nommé la *Loi de continuité.* Un

Digitized by Google

corps qui se meut suivant une direction, ne peut passer d'un point à un autre, sans passer successivement par tous les points intermédiaires. Pareillement un corps ne peut passer d'une vitesse à une autre plus grande ou plus petite, sans avoir eu auparavant & successivement tous les autres degrés de vitesse intermédiaires : il en est de même de tous les cas à l'infini.

Définition XXXVIII.

(235.) Si un corps en rencontre, ou en choque un autre, comme (233.) ils ne peuvent se pénétrer, & que le corps choquant, en vertu de son inertie, tend à conserver son degré de vitesse, il doit agir peu à peu, & par des degrés successifs, sur le corps choqué, qui n'en a pas tant, & l'inertie de celui-ci doit s'exercer, avec une direction contraire, à chaque instant de l'action du corps choquant : par conséquent chacun des deux corps doit éprouver, dans le point du contact, ou dans les environs, une force, ou puissance, qui est une force d'action dans le corps choqué, de la part du corps choquant, & une force de réaction dans le corps choquant, de la part du corps choqué ; l'une & l'autre est égale (16.) à la force d'inertie des corps. Cette force, quelle qu'elle soit, s'appelle *Force de percussion.*

Scolie I.

(236.) Si les deux corps étoient parfaitement solides, ou denses ; c'est-à-dire, s'il n'y avoit aucuns pores, ou interstices entre les particules de matiere qui les composent ; il ne seroit pas possible que le corps choquant agît peu à peu, & par degrés, sur le corps choqué : il faudroit alors que le corps choqué reçût tout d'un coup toute la vitesse du corps choquant, ce qui est absolument contraire à ce qu'on a dit ci-dessus. (234.)

Cette difficulté a paru à quelques Auteurs une raison suffisante pour ne point admettre, dans la nature, de corps parfaitement solides. Cependant si l'on considere que, dans la division continue des corps, il faut nécessairement qu'on arrive aux atomes primitifs dont ils sont composés, & que ceux-ci sont tout à-fait privés de pores ; on ne peut gueres souscrire à cette opinion, & par conséquent on ne peut pas exclure de la nature les corps parfaitement durs, ou solides. Il se présente encore d'autres difficultés, à mesure qu'on examine plus profondément les propriétés des premiers éléments de la matiere ; mais ces discussions n'entrent pas dans notre plan, puisque nous nous bornons à traiter des corps déjà composés de ces éléments.

Digitized by Google

Il eſt certain, au reſte, qu'on ne connoit point de corps dans toute la nature, dont les particules intégrantes ne ſoient ſéparées les unes des autres par des pores, ou interſtices.

DÉFINITION XXXIX.

(237.) C'eſt au moyen des pores, ou interſtices, que les premieres particules des corps cedent leur place à l'impulſion du choc, ou de la percuſſion, pour aller occuper des interſtices plus éloignés. Dans certains corps, les particules cedent moins au choc, & dans d'autres elles cedent davantage; c'eſt ce qui fait qu'on dit que les corps ſont plus ou moins durs, ou plus ou moins mous; enſorte qu'un corps eſt d'autant plus dur, que ſes particules cedent moins leur place dans l'impulſion du choc, ou de la percuſſion.

SCOLIE II.

(238.) De là viennent les enfoncements, cavités, ou impreſſions qui ſe forment dans les corps, par le moyen des chocs; de là les introductions, &, pour ainſi dire, les pénétrations des corps les uns dans les autres. Nous diſons tous les jours, quoiqu'improprement, qu'un boulet a pénétré dans un mur, un clou dans une planche, &c.

SCOLIE III.

(239.) Il eſt néceſſaire de ne pas confondre la dureté des corps avec leur denſité. L'or eſt plus denſe que l'acier, mais l'acier eſt plus dur que l'or; le mercure eſt plus denſe que l'argent, & n'eſt cependant point dur; il en eſt de même de beaucoup d'autres corps. On ne prétend pas pour cela établir que la dureté eſt abſolument indépendante de la denſité: le même or, battu avec le marteau, & réduit à un moindre volume, & par conſéquent à une plus grande denſité, acquiert auſſi une plus grande dureté. Si un corps n'avoit pas de pores, où s'il étoit infiniment denſe, aucune de ſes parties ne pourroit céder au choc; par conſéquent il ſeroit auſſi infiniment dur. La dureté peut donc dépendre de la denſité, mais elle peut auſſi dépendre de la cohéſion des parties mêmes. L'expérience eſt le ſeul moyen que nous ayons, juſqu'à préſent, pour connoître le degré de dureté de chaque eſpece de corps.

DÉFINITION XL.

(240.) On appelle *Corps tenaces*, ceux dont les parties ne ſe rompent point, ou ne ſe ſéparent point les unes des autres, en cédant leurs

Digitized by Google

leurs places ; & la tenacité eſt d'autant plus grande, que les parties réſiſtent davantage à leur ſéparation.

DÉFINITION XLI.

(241.) Les corps dont les parties ne peuvent céder leurs places ſans ſe rompre, ſont appellés *fragiles*, & la fragilité eſt d'autant plus grande, que les parties qui reçoivent le choc, ſe ſéparent, ou ſe rompent plus facilement.

DÉFINITION XLII.

(242.) *L'élaſticité* eſt la force que l'expérience nous a fait découvrir dans les corps, par laquelle les parties qui ont été forcées, ou qui ont cédé à l'impreſſion d'un choc, ou à celle d'une preſſion, tendent à ſe rétablir dans leur lieu reſpectif, telles qu'elles étoient avant le choc, ou la preſſion. C'eſt par cette force qu'une balle de paume ſe releve, lorſqu'elle tombe à terre ; c'eſt encore par cette force qu'un reſſort, après avoir été comprimé, tend à ſe rétablir dans ſon premier état ; que l'arc décoche la fleche, &c. &c. &c. Cette force réſide dans toutes les particules de matiere qui cedent à l'impulſion du coup, à moins que, dans l'action, quelques-unes d'elles ne ſe rompent, ou ne ſe ſéparent totalement, ou en partie : car, dans ce cas, elles perdent totalement, ou en partie, leur élaſticité. Enfin cette force agit dans quelque inſtant que ce ſoit du choc, elle concourt avec celle de percuſſion, dont elle fait partie, ou même le tout, & elle tend à ſéparer les corps, en les pouſſant dans des directions oppoſées.

COROLLAIRE I.

(243.) L'élaſticité augmente à proportion que le nombre des parties forcées, ou qui ont cédé à l'impulſion du choc, augmente ; ou, ce qui eſt la même choſe, à proportion que l'impreſſion devient plus grande ; & la force d'élaſticité eſt la plus grande qu'il eſt poſſible, lorſque l'impreſſion eſt parvenue à toute ſa grandeur, ou qu'elle eſt devenue l'impreſſion totale.

COROLLAIRE II.

(244.) C'eſt dans cet état de la plus grande impreſſion, que toute la force d'élaſticité exiſte ; parce qu'ayant été en augmentant par des degrés ſucceſſifs, juſqu'à ce que la plus grande impreſſion fût tout-à-fait formée, elle ne peut s'évanouir (234.) qu'en repaſſant par tous les degrés de diminution. Le corps choquant doit donc continuer à perdre

Digitized by Google

de sa viteſſe, & le corps choqué à en acquérir, juſqu'à ce que les parties déplacées ſoient revenues entiérement, ou en partie, au lieu qu'elles occupoient avant le choc.

DÉFINITION XLIII.

(245.) Si le rétabliſſement des parties comprimées eſt total, c'eſt-à-dire, ſi elles reprennent entiérement la ſituation qu'elles avoient, on dit que l'élaſticité eſt parfaite, ou que le corps eſt parfaitement élaſtique; mais ſi, au contraire, elles ne la reprennent qu'en partie, le corps n'eſt pas parfaitement élaſtique. Enfin s'il n'y a aucun rétabliſſement dans tout le temps du choc, le corps n'eſt nullement élaſtique.

SCOLIE IV.

(246.) On ſçait par l'expérience que l'effet produit par la percuſſion, ou le choc, eſt beaucoup plus grand que celui qui eſt produit par la preſſion. Ce fait eſt trop commun, & ſe préſente trop ſouvent à nos yeux, pour qu'il n'ait pas été dans tous les temps un ſujet de réflexion. *Ariſtote*, dans la queſtion 20 de ſa *Méchanique*, demande pourquoi une hache coupe ou diviſe un corps par ſon coup, & qu'elle ne le fait pas quand elle eſt ſeulement comprimée, ou preſſée? On ne doit pas trouver étonnant que ce Philoſophe ſe ſoit contenté de faire la queſtion, ſans entreprendre d'y répondre, lorſqu'on voit que la difficulté n'eſt pas encore éclaircie, & a ſubſiſté juſqu'ici, quoiqu'elle ait été le ſujet de bien des diſcuſſions.

Leibnitz, conſidérant la diverſité des effets, diſtingua la force que produit la percuſſion de celle que produit la preſſion; & il appella la premiere, *Force vive*, & la ſeconde, *Force morte*. Cette diſtinction a eu, & a peut-être encore aujourd'hui de grands partiſans. *Jean Bernoulli*, dans ſon *Diſcours ſur les loix de la communication du mouvement*, *Chap. III*, *Def. II*, définit les deux forces en ces termes: *La force vive eſt celle qui réſide dans un corps, lorſqu'il eſt dans un mouvement uniforme; & la force morte, celle que reçoit un corps ſans mouvement, lorſqu'il eſt ſollicité & preſſé de ſe mouvoir, ou à ſe mouvoir plus ou moins vîte, lorſque le corps eſt déjà en mouvement.* Cette définition ne fait pas dépendre la force vive du choc, puiſque *cette force réſide dans un corps, lorſqu'il eſt dans un mouvement uniforme*, ſans exprimer aucunement qu'elle ſoit dépendante, ou non, de l'action du choc. Le même Auteur s'explique encore plus clairement dans ſa *Diſſertation ſur la véritable notion des*

Digitized by Google

forces vives, N°. CXLV, §. I, où il dit : *Vis viva non consistit in actuali exercitio, sed in facultate agendi : subsistit enim, etiamsi non agat, neque habeat in quod agat.* La faculté d'agir que nous connoissons dans les corps, est la force d'inertie, ou, pour mieux dire, la force innée de la matiere ; aussi tous ceux qui ont adopté & soutenu cette distinction des forces vives, ne les ont point distinguées des forces d'inertie dont nous avons vu l'action dans le choc, ou au moins sont convenus que ce sont elles qui les produisent. *Bernoulli* convient de cela lui-même, puisque dans le Chap. V, §. 3 du Discours déjà cité, il dit, en parlant de la force vive : *Sa nature est toute différente ; elle ne peut ni naître, ni périr en un instant, comme la force morte ; il faut plus ou moins de temps pour produire une force vive dans un corps qui n'en avoit pas ; il faut aussi du temps pour la détruire dans un corps qui en a. La force vive se produit successivement dans un corps, lorsque ce corps étant en repos, une pression quelconque, appliquée à ce corps, lui imprime peu à peu, & par degrés, un mouvement local. Ce mouvement s'acquiert par des degrés infiniment petits, & monte à une vîtesse finie & déterminée, qui demeure uniforme à l'instant que la cause qui a mis le corps en mouvement cesse d'agir sur lui. Ainsi la force vive produite dans un corps, dans un temps fini, est équivalente à cette partie de la cause qui s'est consumée en la produisant.* Dans un corps qui en choque un autre qui est en repos, l'inertie du corps choquant est, comme nous l'avons dit ci-dessus, la force qui imprime peu à peu, & par degrés, au corps choqué un mouvement local qui arrive à une vitesse déterminée ; & par conséquent l'inertie est la pression qui, appliquée au premier corps, ou qui, résidant en lui, produit la force vive dans le second. Il n'est pas nécessaire cependant, d'après cette définition, que ce soit le choc qui produise la force vive ; elle peut naître d'une puissance quelconque. La gravité, par exemple, agissant sur un corps libre, lui imprime peu à peu un mouvement local, ou une force vive, qui réside ensuite dans le corps. Enfin la force vive, suivant ces Auteurs, réside dans les corps, & y est produite par une pression, ou puissance quelconque ; mais elle n'est pourtant pas cette même pression, ou puissance qui la produit : c'est une autre chose dont aucun d'eux n'est encore parvenu à définir, ni à expliquer la nature.

L'obscurité de ces notions, & les doutes qu'elles présentent, ont fait qu'*Euler* (*Tom. I des Mémoires de l'Academie Royale de Berlin*) s'est naturellement persuadé que la force vive n'étoit autre chose que la force de percussion ; mais la force de percussion, suivant la défi-

Digitized by Google

nition que nous en avons donnée, eſt une puiſſance qui agit, & qui, ſuivant les Auteurs cités, ne peut être, tout au plus, que la cauſe productrice de la force vive. Les partiſans de cette force ſont même ſi éloignés de la confondre avec la force de percuſſion, ou de preſſion quelconque, qu'ils ne ceſſent de répéter que la premiere n'eſt comparable en aucune maniere avec la ſeconde, pas plus que le fini ne l'eſt avec l'infini, ou une ligne avec une ſurface, comme le dit *Bernoulli* lui-même.

Mais ſi l'on ne nous a pas donné, juſqu'à préſent, une définition exacte, ou une connoiſſance parfaite des forces vives, au moins nous aſſure-t-on en général qu'elles ſont proportionnelles aux effets qu'elles produiſent; c'eſt-à-dire, à l'impreſſion qui réſulte du choc. Cette notion, toute claire qu'elle paroiſſe, au premier coup-d'œil, ne fait que nous jetter dans de plus grandes difficultés. Une preſſion, quelle qu'elle ſoit, produit auſſi une impreſſion qui eſt bien ſenſible dans les corps mous; & les choſes étant ainſi, comment peut-on les concilier avec l'aſſertion que la force de preſſion, & la force vive, ſont incomparables, de la même maniere que le fini n'eſt pas comparable avec l'infini? Il eſt vrai que la preſſion produit ſon impreſſion relativement au temps; c'eſt-à-dire, qu'à chaque inſtant elle augmente ſon impreſſion d'une quantité infiniment petite, au lieu qu'il ne paroît pas que les partiſans des forces vives demandent que les choſes arrivent ainſi; mais il faudroit pour cela que l'impreſſion fût ſimultanée, c'eſt-à-dire qu'elle ſe fît dans un inſtant indiviſible, ce qui eſt abſolument contraire à ce qui a été dit, *Art.* 234. Et ſi on la ſuppoſe faite dans un temps déterminé, quelque court qu'il ſoit, il eſt clair alors que la force vive agit comme la force de preſſion, qu'elle n'en diffère aucunement, & n'en peut par conſéquent être diſtinguée.

Cette queſtion, de quelque façon qu'on l'enviſage, n'eſt donc qu'une queſtion de nom *, & on donne le nom de force vive à un être dont on n'a aucune connoiſſance; par conſéquent cette diſcuſſion ne peut influer, en aucune maniere, ſur la théorie & le calcul du mouvement. Qu'on admette ou qu'on rejette cette force vive, il eſt toujours certain que le mouvement procede de la puiſſance qui agit; quelle que ſoit cette puiſſance, & de quelque façon qu'on

* Cette vérité a été miſe dans tout ſon jour par M. *d'Alembert*. Voyez la préface de ſon *Traité de Dynamique*, ou le mot *force* de l'Encyclopédie, qui en eſt preſque entiérement extrait. Voyez auſſi la quatrieme partie du *Cours de Mathématique* de M. *Bezout*, art. 388.

Digitized by Google

en considere les effets, les viteſſes qui en réſultent, les eſpaces parcourus, & les temps de la durée de l'action, tant dans un ſyſtême que dans l'autre, ſeront toujours les mêmes. Toute la difficulté conſiſte donc à ſçavoir à quoi on doit donner le nom de force vive; difficulté d'autant plus embarraſſante, qu'elle paroît exiſter même parmi les Auteurs & les partiſans de cette force. Nous nous en tiendrons à ce qui a été dit dans *l'Article* 13; &, pour éviter tout doute & toute obſcurité, nous n'entendrons autre choſe par force, qu'une action, ou une puiſſance quelconque. On verra dans la ſuite que ſi c'eſt ſeulement par la grande différence qu'on remarque dans les effets, qu'on a introduit la force vive, on peut bien s'en paſſer, & même l'abandonner dès à préſent, parce qu'on démontrera que la force de percuſſion ſuffit, pour rendre raiſon de tous les phénomenes de cette nature que peut nous préſenter l'expérience.

Définition XLIV.

(247.) Nous appellerons *Profondeur de l'impreſſion*, ſa plus grande profondeur meſurée ſuivant la direction du mouvement; & l'*Amplitude de l'impreſſion* eſt la plus grande ſection qu'on peut y faire perpendiculairement à la direction du mouvement.

Proposition XXVI.

(248.) *La force de percuſſion eſt en raiſon compoſée de la dureté des corps & de l'amplitude des impreſſions.*

Un corps eſt d'autant plus dur, que ſes particules cedent moins à l'impulſion du coup (237); c'eſt-à-dire, que la différencielle de la viteſſe pendant un inſtant *dt* du choc, eſt plus grande *. Pareillement, plus le nombre des particules choquées ſera grand, ou plus ſera grande l'amplitude de l'impreſſion, plus la même différencielle ſera grande. Donc cette différencielle ſera en raiſon directe compoſée de la dureté des corps, & de l'amplitude des impreſſions; mais la force qui agit (18.) eſt comme cette différencielle: donc auſſi la force de percuſſion ſera en raiſon compoſée de la dureté des corps, & de l'amplitude des impreſſions.

Corollaire I.

(249.) Donc il n'y a point dans la nature de corps abſolu-

* Car (236.) ſi les corps étoient parfaitement durs, le corps choqué recevroit, tout d'un coup, toute la viteſſe du corps choquant; alors la différencielle de ſa viteſſe dans le choc ſeroit un *maximum*: donc, plus cette différencielle de viteſſe ſera grande, c'eſt-à-dire, plus elle approchera du *maximum*, plus les corps auront de dureté.

Digitized by Google

PLANC. I. ment mous ; parce que n'y ayant point d'altération dans le mouvement, il n'y a point de force qui réſiſte ; & où il n'y a pas de réſiſtance, il n'y a pas de corps.

COROLLAIRE II.

(250.) Il n'y a point de corps qui ne ſoit élaſtique ; car l'élaſticité conſiſtant dans la réaction d'une puiſſance capable de comprimer le corps, cette compreſſion ne peut s'évanouir, ou devenir nulle, ſans paſſer par tous les degrés de diminution, & par conſéquent ſans donner lieu aux parties déplacées de ſe rétablir, ſelon la direction ſuivant laquelle elles réagiſſent. Il pourroit ſeulement y avoir de la difficulté dans le cas des corps parfaitement durs ; mais nous avons déjà dit qu'il n'en exiſte point de tels dans la nature, ſi ce ne ſont les premiers atômes dont les corps ſont compoſés, & deſquels nous ne prétendons pas traiter.

SCOLIE I.

(251.) Ce ce l'on vient de démontrer a également lieu lorſque les baſes des impreſſions ne ſont point planes & paralleles à leurs amplitudes ; car, de quelque maniere que ſe faſſe l'impreſſion, il n'y a pas dans l'action d'autres points réſiſtants ſuivant la direction du mouvement, que ceux qui ſont compris dans l'amplitude : & quant à la réſiſtance, c'eſt la même choſe qu'ils ſoient tous à la même profondeur, ou à des profondeurs différentes, pourvu que la dureté ne ſoit pas changée par cette circonſtance.

SCOLIE II.

(252.) Malgré la facilité avec laquelle on a déterminé la raiſon ſuivant laquelle agit la force de percuſſion, la détermination de ſa meſure exacte eſt cependant bien difficile ; car, malgré que quelques Auteurs aient ſuppoſé généralement que la figure de l'impreſſion eſt la même que celle du corps choquant, il eſt clair que cette opinion ne peut ſe ſoutenir pour les corps durs & tenaces. Dans un grand nombre de ces derniers, l'amplitude de l'impreſſion eſt tou-
FIG. 13. jours beaucoup plus grande. Si un cylindre *AB*, par exemple, très-dur, & incapable d'aucune impreſſion ſenſible, choque un autre corps *CD*, & y forme une impreſſion, cette impreſſion, ſi le corps choqué eſt tenace, n'aura point la figure même *EFGB* du cylindre ; mais elle ſera de la forme *HFBI* : car les parties contiguës aux points *F* & *B* ne ſe détachant point avec facilité de leurs voiſines, malgré que ces points cedent à l'impulſion, il eſt néceſſaire que ces

Digitized by Google

parties cedent auſſi, mais en entraînant avec elles celles qui les touchent, & que celles-ci entraînent de même celles qui les ſuivent immédiatement, & ainſi ſucceſſivement ; de ſorte qu'il ſe forme, tout autour du cylindre, une cavité *HFE*. L'amplitude de l'impreſſion ſe forme du diametre *HI*, au lieu du diametre *FB* ; ce qui fait qu'il eſt difficile d'avoir une meſure exacte de l'impreſſion réelle.

Au reſte, cette obſervation, toute vraie qu'elle eſt, ne peut cependant être appliquée à tous les cas, ſans aucune modification ; car ſi le corps *AB*, au lieu d'être un cylindre, étoit une ſphere, une cône, ou tout autre corps, dont la baſe *FB* ne fût point parallele à *HI*, il eſt certain que la cavité peut, dans ce cas, diminuer beaucoup, & peut-être même s'évanouir entiérement, ſi le corps *CD* n'étoit pas d'une dureté & d'une ténacité extrêmes. En outre, quoique le corps choqué ſoit d'une même denſité, ou dureté, dans toutes ſes parties, cette dureté peut varier par le mouvement des particules ſupérieures qui s'approchent davantage des inférieures, & par-là il peut y avoir un plus grand nombre de particules dans la baſe *FB*, à la fin de l'impreſſion qu'au commencement, particuliérement dans les corps tenaces & élaſtiques. Il arrive de là que la force de percuſſion qu'on auroit cru conſtante, parce qu'on ne voit aucune variation dans la baſe *FB*, ne peut cependant l'être, par quelques-unes des raiſons que nous venons de développer.

PROPOSITION XXVII.

(253.) *Trouver la relation entre la force de percuſſion, la dureté des corps, & l'amplitude de l'impreſſion.*

Si nous exprimons par *H* l'amplitude de l'impreſſion *HI*, & par *D* la dureté du corps *CD*, dans un inſtant quelconque du choc, la force de percuſſion ſera comme *DH* (248.) : mais ceci n'a lieu cependant que dans le cas où le cylindre *AB* ſeroit extrêmement dur, ou incapable d'impreſſion. Si le rapport de la dureté du cylindre à celle du corps *CD* n'eſt pas infini, les particules du cylindre dans la baſe *FB*, ſeront auſſi déplacées, & la différencielle de la viteſſe dépendra auſſi de l'aire de la baſe *FB*, & de la dureté du cylindre. Appellant donc *H'* cette baſe, & repréſentant par *D'* la dureté du cylindre, la différencielle de la viteſſe dépendra des produits *DH* & *D'H'*, ou ſera en raiſon compoſée *DH*. *D'H'* des deux : mais lorſque *D'H'* eſt infini par rapport à *DH*, ou, ce qui revient au même, lorſque *DH* eſt zero, par rapport à *D'H'*, l'expreſſion doit ſe réduire à *DH* ; c'eſt-à dire que la différencielle de la viteſſe doit

Digitized by Google

Planc. I. être comme DH. Donc la différencielle de la viteſſe, & par conſéquent la force de percuſſion, eſt en général comme $\frac{DH.D'H'}{DH+D'H'}$.

SCOLIE I.

Fig. 24. (254.) Lorſque les premieres particules du corps CD viennent à ſe rompre, à cauſe de leur fragilité, il arrive ordinairement que, par leur force élaſtique, elles compriment les côtés AG, BF de l'autre corps AB, & les aſpérités du corps CD forment, dans ces côtés, autant d'autres petites impreſſions latérales. Ces impreſſions doivent ſe conſidérer comme autant d'autres petites amplitudes d'impreſſion, qui, réunies avec celles de la baſe GB, feront l'amplitude totale H. Après que l'impreſſion totale eſt faite, la force d'élaſticité qui agit à la baſe GB, tend à faire rétrograder le corps AB, tandis que les petites impreſſions latérales réſiſtent à cette rétrogradation. L'action exercée dans ce cas dépendra donc de l'excès de la force élaſtique en GB, ſur celle qui ſeroit néceſſaire pour vaincre la réſiſtance des petites impreſſions latérales. Si la premiere de ces forces eſt plus grande que la ſeconde, le corps AB rétrogradera; & ſi elle eſt moindre, il demeurera en repos dès l'inſtant qu'il aura perdu toute ſa viteſſe poſitive. Mais il eſt évident que la force d'élaſticité en GB, à l'inſtant que le corps AB ceſſe de ſe mouvoir, ne peut manquer d'être plus grande que la force néceſſaire pour vaincre les petites impreſſions latérales, parce qu'elle eſt égale à la force d'inertie du corps AB, qui a vaincu non-ſeulement la réſiſtance des parties en GB, mais encore celle des petites impreſſions latérales: ainſi, de toute néceſſité, le corps retournera toujours en arriere auſſitôt qu'il aura ceſſé de ſe mouvoir. Il peut arriver, à la vérité, que ce ne ſoit que d'une très-petite quantité, parce que l'élaſticité de GB va toujours en diminuant à meſure que le corps AB rétrograde; & elle peut diminuer au point de n'être plus ſuffiſante pour vaincre les petites impreſſions latérales. On doit entendre la même choſe des corps viſqueux, tant parce qu'il ſe forme auſſi, dans ces corps, quelques inégalités latérales, que parce que la viſcoſité même, ou la cohéſion des parties les retient. Si le corps AB venoit à pénétrer entiérement dans le corps CD, le nombre des petites impreſſions latérales ſeroit alors conſtant. Dans ce cas, la dureté du corps demeurant la même, ainſi que l'amplitude de l'impreſſion principale, la force de percuſſion ne peut manquer d'être conſtante.

SCOLIE II.

(255.) Nous ſuppoſerons généralement dans nos calculs, que les deux

Digitized by Google

deux corps qui se choquent, se meuvent dans la même direction, ou dans des directions opposées ; car, s'ils se mouvoient dans des directions différentes, il seroit facile de décomposer leur mouvement, & de faire le calcul pour chaque force séparément. Nous supposerons encore, pour plus de facilité, que les corps sont uniformément denses, & qu'ils sont réguliers, comme deux cylindres, deux sphères, deux parallélipipedes, &c., afin qu'étant mus suivant la direction de leurs axes, la force de percussion, ou du choc, agisse dans la même direction. Car les corps ayant une figure égale & semblable, & étant uniformément denses, toutes leurs parties seront semblablement disposées autour du point dans lequel la force de percussion agit, & il n'y a pas de raison pour que la force de percussion s'incline, ou agisse plus d'un côté que de l'autre, attendu que les dimensions de l'impression en longueur & largeur, doivent être égales dans tous les sens : par conséquent la force de percussion doit agir également de tous les côtés ; & ainsi elle ne peut produire son effet dans une autre direction que celle que tiennent les corps.

Nous supposerons aussi que, si quelques puissances agissent sur les corps, elles sont appliquées à leurs centres de gravité, afin qu'il n'en résulte aucun mouvement de rotation, ou que le choc se fasse aux centres de percussion, pour éviter également le mouvement de rotation.

Enfin nous supposerons que les corps sont d'une grandeur suffisante pour que les impressions ne les pénetrent pas, ou ne parviennent pas jusqu'à leurs centres de gravité, afin que le mouvement de ces centres ne soit pas affecté par le changement de leur situation à l'égard des autres parties du corps.

Nous établirons en général que

A & *B* sont les deux corps qui doivent se choquer.

ʒ & *x* les longueurs, ou profondeurs, des impressions qui se font en eux.

α & β les puissances constantes qui les animent.

U & *V* les vitesses avec lesquelles le choc commence.

u & *v* les vitesses dans un instant quelconque du choc.

a & *b* les espaces parcourus dans le temps même du choc.

D' & *D* les *duretés* des corps *.

* Tout ce qui précede & tout ce qui suit, nous indique qu'il y a, dans cet endroit, une faute typographique dans l'original ; on y trouve le mot *densité* pour celui *dureté*. On ne peut pas confondre ces deux qualités des corps (239) ; cependant, deux corps d'une même matiere, mais dans deux états différents, comme seroit du cuivre fondu & du cuivre écroui

H' & H les amplitudes des impressions.

t le temps.

π la force de percussion $= \frac{DH\,D'H'}{DH+D'H'}$.

On suppose que le corps A suit & choque le corps B, & par conséquent que la vitesse U est plus grande que V; sans cela on voit que le choc ne pourroit pas s'effectuer, à moins que la vitesse V ne fût négative. Mais, pour plus de facilité dans le calcul, nous supposerons toujours que les puissances α & β, ainsi que les vitesses U & V sont positives; car il est très-facile de faire négatives, dans le résultat du calcul, les quantités qui le seroient.

PROPOSITION XXVIII.

(256.) *Trouver la relation entre les impressions & les espaces parcourus par les corps dans le temps du choc.*

Puisque le corps A suit le corps B, & qu'il se forme en eux des impressions dont les longueurs sont ζ & x, l'espace a parcouru par le corps A, doit être égal à l'espace b parcouru par le corps B, plus les longueurs, ou profondeurs ζ & x des impressions, lesquelles sont les espaces parcourus par les parties des mêmes corps qui ont cédé. Donc on aura $a=b+\zeta+x$, ou $a-b=x+\zeta$.

COROLLAIRE.

(257.) Si, à la fin de la percussion, les corps viennent à se séparer, parce qu'ils auroient une elasticité presque parfaite, alors $x+\zeta=0$: donc aussi $a-b=0$, ou $a=b$; c'est-à-dire qu'à la fin de la percussion des corps parfaitement élastiques, ou à-peu-près, l'espace parcouru, pendant le choc, par le corps A, est toujours égale à l'espace parcouru, dans le même temps, par le corps B.

PROPOSITION XXIX.

(258.) *Trouver la valeur de la différencielle du temps, c'est-à-dire, la valeur de* dt.

De l'équation $a-b=x+\zeta$, on tire $da-db=dx+d\zeta$; mais (29.) $udt=da$, & $vdt=db$: donc $(u-v)dt=da-db$. Donc aussi $(u-v)dt=dx+d\zeta$; d'où l'on tire $dt=\frac{dx+d\zeta}{u-v}$.

COROLLAIRE.

(259.) Lorsque les impressions parviennent à toute leur grandeur,

long-temps à coups de marteaux, pourroient bien avoir leur dureté proportionnelle à leur densité, & on pourroit alors exprimer les duretés relatives, par les mêmes lettres que les densités relatives. C'est à l'expérience à décider ce qui en est.

Digitized by Google

c'eſt-à-dire, lorſque x & z arrivent à leurs plus grandes valeurs, on a $dx+dz=0$, d'où l'on conclut $u-v=0$, ou $u=v$; c'eſt-à-dire que, dans l'inſtant où s'achevent les plus grandes impreſſions, les corps marchent avec des vîteſſes égales.

Proposition XXX.

(260.) *Trouver la relation entre les vîteſſes des corps.*

Les forces, ou puiſſances, qui animent le corps A, ſont α & π, & comme cette derniere eſt négative, il s'enſuit que $(\alpha-\pi)dt=Adu$ (19.)

Les deux puiſſances qui animent le corps B, ſont β & π, & toutes les deux ſont poſitives; ainſi nous aurons $(\beta+\pi)dt=Bdv$.

En prenant la ſomme de ces deux équations, nous aurons $(\alpha+\beta)dt=Adu+Bdv$; & en intégrant $(\alpha+\beta)t=A(u-U)+B(v-V)$;* d'où l'on tire $Au+Bv=(\alpha+\beta)t+AU+BV$; & par conſéquent $v=\frac{(\alpha+\beta)t+AU+BV-Au}{B}$.

Corollaire I.

(261.) Le temps t pendant lequel ſe fait le choc, eſt extrêmement court, comme l'expérience nous l'apprend, & comme nous le démontrerons ci-après. Donc ſi les vîteſſes U & V, ou l'une quelconque d'elles, étoient d'une valeur infinie par rapport au temps t, la quantité $(\alpha+\beta)t$ ſeroit zéro à l'égard des autres, à moins que $\alpha+\beta$ ne fût infini, & l'on auroit $AU+BV=Au+Bv$.

Corollaire II.

(262.) $AU+BV$ eſt la ſomme des mouvements des corps, avant, ou au commencement du choc, & $Au+Bv$, eſt la ſomme des mouvements des mêmes corps dans un inſtant quelconque du choc: donc la ſomme des mouvements dans un inſtant quelconque du choc, eſt égale à la ſomme des mouvements, avant, ou au commencement du choc.

Scolie I.

(263.) Cette propoſition eſt donnée comme généralement vraie, par tous les Auteurs de Méchanique; cependant on vient de voir qu'elle n'eſt certaine que dans le cas où $(\alpha+\beta)t=0$, ou quand cette quantité eſt ſuſceptible d'être négligée à l'égard de U, ou de V.

* Cette intégrale eſt $Au+Bv+C$; & comme elle doit convenir à tous les inſtants du choc, il eſt évident qu'elle doit être zéro, en même temps que t; c'eſt-à-dire, lorſque le choc commence: mais dans ce cas $u=v$ & $U=V$; donc $AU+BV+C=0$, ou $C=-AU-BV$; ſubſtituant cette valeur de C dans l'intégrale trouvée, elle devient $A(u-U)+B(v-V)$.

Digitized by Google

Cette condition n'ayant pas lieu, l'équation eſt $AU+BV+(\alpha+\beta)t = Au+Bv$: d'où l'on voit que lorſqu'il y a des puiſſances qui agiſſent, il n'eſt pas vrai que la quantité de mouvement dans un inſtant quelconque du choc, ſoit la même qu'auparavant, ou au commencement du choc.

SCOLIE II.

(264.) Il ſe préſente ici une queſtion qui a été le ſujet de bien des diſcuſſions parmi les Philoſophes. On demande ſi la même quantité de mouvement ſe conſerve ou non. Par ce qui vient d'être démontré, il paroît que l'affirmative eſt vraie. Le raiſonnement de ceux qui ſoutiennent le contraire, conſiſte en ce que ſi l'on fait V négative, on aura, en ſuppoſant α & $\beta=0$, $AU-BV=Au+Bv$; que par conſéquent, dans ce cas, la différence des deux mouvements AU & BV eſt égale à la ſomme de Au & Bv: donc, continuent-ils, en prenant BV poſitivement, comme le font tous ceux qui ſoutiennent cette opinion, il n'y pas de doute qu'on n'ait $AU+BV>Au+Bv=AU-BV$; de ſorte que la perte totale du mouvement ſera $2BV$. Ce raiſonnement n'affecte aucunement la rigueur de notre démonſtration; car lorſqu'on parle de la ſomme des mouvements, on entend que ceux qui ſont négatifs ſont pris négativement, & non poſitivement; & dans ce cas, la loi, ou le principe, a lieu généralement.

COROLLAIRE III.

(265.) A l'inſtant où ſe fait la plus grande impreſſion, on a trouvé (259.) $u-v=0$, ou $u=v$: donc, en ſubſtituant l'une ou l'autre valeur dans l'équation $Au+Bv=(\alpha+\beta)t+AU+BV$; il en réſulte $u=v=\frac{(\alpha+\beta)t+AU+BV}{A+B}$; expreſſion de la viteſſe des deux corps, à l'inſtant de la plus grande impreſſion.

COROLLAIRE IV.

(266.) Si la quantité $(\alpha+\beta)t$ eſt ſuſceptible d'être négligée par rapport aux autres, l'expreſſion précédente deviendra $u=v=\frac{AU+BV}{A+B}$.

SCOLIE III.

(267.) Les corps d'une très-petite élaſticité, ou qui n'en ont aucune, continuent à marcher avec la viteſſe qu'ils ſe trouvent avoir lors de la plus grande impreſſion, parce qu'il n'y a aucune force dont l'action puiſſe l'altérer. Donc la viteſſe trouvée ci-deſſus ſera celle avec laquelle les corps d'une très-petite élaſticité, ou qui n'en ont aucune, ſe mouveront après le choc.

Digitized by Google

Scolie IV.

(268.) Il est temps présentement de résoudre la difficulté dont nous avons parlé dans *l'Art.* 21. Il est question de sçavoir si l'équation $\alpha = \frac{Adu}{dt}$ est applicable au cas où une puissance α pousse un corps A. Un Auteur des plus respectables de l'Europe, & digne des plus grands éloges, paroit en douter; & pour justifier ses doutes, il suppose que deux corps se choquent, l'un d'eux étant en repos, & raisonne en cette maniere. Le changement, ou l'altération du mouvement du dernier de ces corps sera $Bu = Bv = \frac{AUB}{A+B}$, V étant supposé $= o$. Rien n'est plus vrai, c'est d'ailleurs une suite de ce que nous avons démontré; nous n'éleverons donc aucun doute à ce sujet. Mais, continue-t-il, pour que l'effet soit proportionnel à la puissance qui l'a produit, comme on le suppose dans l'équation $\alpha = \frac{Adu}{dt}$, il est nécessaire, dans ce cas, que la cause qui a produit le changement $\frac{AUB}{A+B}$ soit proportionnelle à ce même changement; or c'est ce qu'il n'est pas possible de démontrer.* Notre réponse à ce raisonnement, est qu'il nous paroit que l'effet total $\frac{AUB}{A+B}$ doit être proportionnel à la somme de toutes les actions de la puissance durant tout le temps de l'action, & non à une action instantanée de cette puissance. L'effet qui doit être proportionnel à une action instantanée est la différencielle, ou l'altération instantanée du mouvement. Si c'est le corps A qui choque le corps B, la puissance du premier est son inertie, qui est proportionnelle à Adu; & l'on aura, dans un instant quelconque $-Adu = Bdv$**. En intégrant cette équation, on trouve $A(U-u) = Bv$, en supposant $V = o$. Donc aussi-tôt qu'on arrive, par la continuité de l'action, jusqu'à avoir $u = v$, on a $u = \frac{AU}{A+B}$, & $Bu = \frac{AUB}{A+B}$; c'est-à-dire, que tout le mouvement produit dans le corps B, pendant la durée de l'action, jusqu'à ce qu'on ait $u = v$, sera proportionnel à $\frac{AUB}{A+B}$. Ceci ne prouve point que l'action instantanée Adu ne soit pas proportionnelle au

* Voyez les Ouvrages cités dans la note de la page 60, & sur-tout *l'art.* 158 de la *Dynamique* de M. *d'Alembert.*

** Cette équation qui marque l'égalité entre la différencielle du mouvement perdu par le corps A, & celle du mouvement gagné par le corps B, paroit supposer ce qui est en question; mais elle est évidente, puisqu'on voit qu'en l'admettant on en déduit une vérité dont elle est indépendante. On voit d'ailleurs, que les différencielles du, dv doivent être de signe contraire, puisque la vitesse du corps A diminue de la quantité du, tandis que celle du corps B augmente de dv.

Digitized by Google

changement instantané Bdv; mais prouve, au contraire, que cette proportionalité a effectivement lieu, puisque de sa supposition il résulte une vérité manifeste.

PROPOSITION XXXI.

(269.) *Trouver la relation entre les différencielles des vîtesses, & celles des impressions.*

De l'équation $(\alpha-\pi)\,dt=Adu$, & de l'équation $(\beta+\pi)dt=Bdv$, on tire $\frac{(\alpha-\pi)dt}{A}=du$, & $\frac{(\beta+\pi)dt}{B}=dv$: soustrayant la seconde équation de la premiere, on a $\left(\frac{\alpha-\pi}{A}-\frac{\beta+\pi}{B}\right)dt=du-dv$; ou $\left(\alpha B-\beta A-\pi(A+B)\right)dt=AB(du-dv)$. Substituant la valeur de $dt=\frac{dx+d\zeta}{u-v}$ (258.), on aura enfin $\left(\alpha B-\beta A-\pi(A+B)\right)(dx+d\zeta)=AB(u-v)(du-dv)$.

COROLLAIRE I.

(270.) Si l'on integre la quantité $\left(\alpha B-\beta A-\pi(A+B)\right)(dx+d\zeta)$, toutes les quantités qui en résulteront se trouveront multipliées par x, ou par ζ; mais à la fin du choc des corps parfaitement élastiques, ou à-peu-près, on a $x=0$, & $\zeta=0$. Donc à la fin du choc de ces corps, on a $\int AB(u-v)\,(du-dv)=\frac{1}{2}AB(u-v)^2-\frac{1}{2}AB(U-V)^2=0$*, ce qui donne $U-V=v-u$; c'est-à-dire, que les corps parfaitement élastiques, ou à-peu-près, ont leur vîtesse relative avant le choc, égale à leur vîtesse relative après le choc.

---

* Cette intégrale est facile à trouver; car $\int AB(u-v)\,(du-dv)=\int AB(udu-vdu-udv+vdv)$. Prenant les deux termes $udu-vdu$ affectés de la différencielle du de la même variable, & intégrant comme si v étoit une constante; on aura $\frac{1}{2}u^2-vu$: différenciant ensuite cette quantité, & la rétranchant de la différencielle proposée, on a vdv pour reste, dont l'intégrale $\frac{1}{2}v^2$ étant jointe avec la premiere, donne $\frac{1}{2}u^2-vu+\frac{1}{2}v^2$, ou $\frac{1}{2}(u-v)^2$ pour l'intégrale totale: donc en multipliant par AB, & ajoutant une constante, l'intégrale cherchée devient $\frac{1}{2}AB(u-v)^2+C$. Cette regle porte avec elle sa démonstration, on peut d'ailleurs voir la quatrieme partie du Cours de Mathématiques de M. *Bézout*, *Art.* 148.

A l'égard de la constante C, voici comment on la détermine; cette intégrale étant celle du second membre de l'équation générale de *l'Art.* 269, convient à tous les instants du choc, elle doit par conséquent être zéro lorsque le choc commence; or, dans ce cas, $u=U$, & $v=V$, donc $\frac{1}{2}AB(U-V)^2+C=0$, d'où l'on tire $C=-\frac{1}{2}AB\,(U-V)^2$. Substituant cette valeur de C dans l'intégrale trouvée, & remplissant la condition du Corollaire, on a l'expression même de l'Auteur. Faisons encore observer que pour que l'expression convienne après le choc, il faut écrire $v-u$ au lieu de $u-v$ que l'équation paroit fournir directement, car alors $u-v$ est une quantité négative, qui ne peut être égale, que numériquement, à la quantité positive $U-V$; tant que ces quantités sont au quarré, il n'importe pas dans quel ordre on les écrive; mais lorsqu'elles sont au premier dégré, il est nécessaire de les mettre dans l'ordre convenable à ce qu'on veut exprimer.

Digitized by Google

Corollaire II.

(271.) Si l'on substitue, dans l'équation $U-V=v-u$, en place de place v, sa valeur qu'on vient de trouver (260.), qui est $\frac{(\alpha+\beta)t+AU+BV-Au}{B}$, on aura, pour la fin du choc des corps parfaitement élastiques, ou à-peu-près, $U-V+u=\frac{(\alpha+\beta)t+AU+BV-Au}{B}$; d'où l'on tire $u=\frac{(\alpha+\beta)t+U(A-B)+2BV}{A+B}$.

Corollaire III.

(272.) Si l'on substitue de même cette valeur dans l'équation $v-U+V=u$, on aura $v-U+V=\frac{(\alpha+\beta)t+U(A-B)+2BV}{A+B}$, qui donne $v=\frac{(\alpha+\beta)t+V(B-A)+2AU}{A+B}$.

Corollaire IV.

(273.) Si la quantité $(\alpha+\beta)t$ étoit extrêmement petite, ou négligeable à l'égard des autres, les équations ci-dessus deviendroient $u=\frac{U(A-B)+2BV}{A+B}$, & $v=\frac{V(B-A)+2AU}{A+B}$.

Corollaire V.

(274.) Dans la même supposition que $(\alpha+\beta)t$ est négligeable à l'égard des autres quantités, nous aurons aussi $u^2=\ldots\ldots$. $\frac{U^2(A-B)^2+4BUV(A-B)+4B^2V^2}{(A+B)^2}$; $Au^2=\frac{AU^2(A-B)^2+4ABUV(A-B)+4AB^2V^2}{(A+B)^2}$. De même, $v^2=\frac{V^2(B-A)^2+4AUV(B-A)+4A^2U^2}{(A+B)^2}$; $Bv^2=\frac{BV^2(B-A)^2+4ABUV(B-A)+4A^2BU^2}{(A+B)^2}$: par conséquent $Au^2+Bv^2=\frac{AU^2(A-B)^2+4A^2BU^2+BV^2(B-A)^2+4AB^2V^2}{(A+B)^2}$, $=\frac{AU^2(A+B)^2+BV^2(A+B)^2}{(A+B)^2}=AU^2+BV^2$. Donc dans les corps parfaitement élastiques, ou à peu près, lorsque $\alpha+\beta$ est négligeable à l'égard des autres quantités, la somme des produits de chaque masse, par le quarré de sa viteſſe, eſt la même au commencement & à la fin du choc, ou la même avant & après le choc.*

Proposition XXXII.

(275.) *Le produit* DH ix *de l'amplitude de l'impreſſion, & de la*

* C'eſt ce qu'on appelle la *Conſervation des Forces vives*. Cette expreſſion eſt encore admiſe par la plus grande partie des Géometres, même par ceux qui n'admettent pas la diſtinction des Forces vives, & des Forces mortes, propoſée par *Leibnitz*, & ſur-tout ſon principe ſur la meſure de la Force des Corps en mouvement, qui eſt de multiplier la maſſe par le quarré de la viteſſe. *Voyez* la Préface du *Traité de Dynamique*, de M. *d'Alembert*.

Digitized by Google

différencielle dx *parcourue par les particules du corps choqué, eſt toujours égale au produit* D'H'dz *des quantités ſemblables du corps choquant.*

Le produit DH de la dureté par l'amplitude, eſt proportionnel au nombre des particules choquées (248.), & la différencielle dx (29.) eſt comme la viteſſe avec laquelle ſe meuvent leſdites particules: donc le produit $DHdx$ eſt comme la quantité de mouvement des mêmes particules. $DHdx - D'H'd\zeta$, ſera donc, d'après cela, comme la quande mouvement de toutes les particules, laquelle quantité eſt conſtante (264.). Mais, au commencement du choc, ce mouvement eſt zéro. Donc on aura toujours $DHdx - D'H'd\zeta = 0$; ou $DHdx = D'H'd\zeta$, & $d\zeta = \frac{DHdx}{D'H'}$.

PROPOSITION XXXIII.

(276.) *Trouver la relation entre les viteſſes & les impreſſions.*

Si l'on ſubſtitue dans l'équation (269.) $(\alpha B - \beta A - \pi(A+B))(dx+d\zeta) = AB(u-v)(du-dv)$, les valeurs de $\pi = \frac{DH.D'H'}{DH+D'H'}$ (253.), & de $d\zeta = \frac{DH}{D'H'}dx$ (275.), on aura l'équation $(\alpha B - \beta A - (A+B)(\frac{DH.D'H'}{DH+D'H'}))(dx + \frac{DH}{D'H'}dx) = AB(u-v)(du-dv)$, qui, en réduiſant devient . . . . . $(\alpha B - \beta A)(\frac{DH+D'H'}{D'H'})dx - (A+B)DHdx = AB(u-v)(du-dv)$, & en intégrant, $(\alpha B - \beta A)\int(\frac{DH+D'H'}{D'H'})dx - (A+B)\int DHdx = \ldots$ $\frac{1}{2}AB((u-v)^2 - (U-V)^2)$. Mais $\int(\frac{DH+D'H'}{D'H'})dx = x+\zeta$ *, ſubſtituant donc cette valeur, on a $(\alpha B - \beta A)(x+\zeta) - (A+B)\int DHdx = \frac{1}{2}AB((u-v)^2 - (U-V)^2)$.

PROPOSITION XXXIV.

(277.) *Trouver la viteſſe* u, *avec laquelle ſe meut le corps* A, *dans un inſtant quelconque du choc.*

Qu'on dégage de l'équation précédente la valeur de $u-v$, on aura $u-v = \pm\left((U-V)^2 + \frac{(\alpha B-\beta A)(x+\zeta)}{\frac{1}{2}AB} - \frac{(A+B)\int DHdx}{\frac{1}{2}AB}\right)^{\frac{1}{2}}$; qu'on ſubſtitue enſuite la valeur de v trouvée dans *l'Art.* 260, qui eſt $\frac{(\alpha+\beta)t+AU+BV-Au}{B}$, & l'on aura $\frac{Au+Bu-AU-BV-(\alpha+\beta)t}{B} = \pm\left((U-V)^2 + \frac{(\alpha B-\beta A)(x+\zeta)}{\frac{1}{2}AB} - \frac{(A+B)\int DHdx}{\frac{1}{2}AB}\right)^{\frac{1}{2}}$ d'où l'on tire $u = \frac{AU+BV+(\alpha+\beta)t}{A+B} \pm \frac{B}{A+B}\left((U-V)^2 + \frac{(\alpha B-\beta A)(x+\zeta)}{\frac{1}{2}AB} - \frac{(A+B)\int DHdx}{\frac{1}{2}AB}\right)^{\frac{1}{2}}$.

* Car $\frac{DH+D'H'}{D'H'}dx = \frac{DHdx}{D'H'} + dx = d\zeta + dx$ (275.). Donc, &c.

Le

Le ſigne ſupérieur eſt pour le cas où la plus grande impreſſion n'eſt pas encore parvenue à toute ſa grandeur, & l'inférieur a lieu après que la plus grande impreſſion eſt achevée. *

COROLLAIRE I.

(278.) Si l'on avoit $V=0$, & $B=\infty$, on auroit . . . . . $u=\pm\left(U^2+\frac{a(x+\zeta)}{\frac{1}{2}A}-\frac{\int DH dx}{\frac{1}{2}A}\right)^{\frac{1}{2}}$.

COROLLAIRE II.

(279.) Si les deux corps A & B étoient parfaitement élaſtiques, de ſorte que, pendant la rétrogradation du corps A, la quantité DH ne variât point, les deux vîteſſes de ce corps, poſitive & négative, ſeroient égales à diſtances égales de l'origine des x, ou à égales diſtances du point où ſe termine la plus grande impreſſion.

COROLLAIRE III.

(280.) Si les corps n'étoient pas parfaitement élaſtiques, comme cela arrive réguliérement dans la nature, la quantité DH ſeroit *plus grande* ** pendant la rétrogradation, à égales diſtances de l'origine des x; & par conſéquent la vîteſſe négative ſeroit moindre que la poſitive, à égales diſtances du point où ſe termine la plus grande impreſſion.

COROLLAIRE IV.

(281.) On ne pourra donc pas avoir $u=U$ dans l'origine des x, mais ſeulement $u<U$. Les premieres particules des corps ne pourront donc auſſi retourner entiérement dans leur premiere ſituation: il reſtera par conſéquent une petite impreſſion, lorſque les corps ſe

* Cela ſuit de ce qu'après la plus grande impreſſion achevée, la quantité $u-v$ eſt négative.

** Il y a dans l'original, *la quantité* DH *ſeroit moindre*; mais nous croyons que c'eſt une faute typographique: car il eſt évident que, l'élaſticité étant imparfaite, les parties qui ont été forcées & rapprochées les unes des autres par l'action du choc, ne reprennent pas entiérement la même diſpoſition qu'avant le choc: à égales diſtances de l'origine des x, ou du point où ſe termine la plus grande impreſſion, les parties ſeront donc plus rapprochées dans la rétrogradation du corps A, qu'avant la formation de la plus grande impreſſion: donc la dureté D, qui eſt une ſuite du rapprochement des parties, ſera plus grande, & par conſéquent DH le ſera auſſi (252.). Cette correction faite, les conſéquences de ce Corollaire & des ſuivants viennent naturellement, au lieu qu'elles nous paroiſſent devoir être abſolument contraires. En effet, ſi DH étoit réellement moindre dans la rétrogradation, $\frac{\int DH dx}{\frac{1}{2}A}$ le ſeroit auſſi; & comme cette quantité eſt à ſouſtraire, il eſt clair que la vîteſſe négative u ſeroit plus grande que la poſitive, & non pas moindre, comme elle doit l'être, & comme le dit l'Auteur, &c. On fera attention que l'origine des x ou des profondeurs de l'impreſſion, eſt le point de la ſurface du corps choqué dans lequel commence le choc, ou le point du premier contact de ce corps, avant que ſes parties euſſent été forcées par l'impulſion du choc. Lorſque le corps A, dans la retrogradation, paſſe aux mêmes diſtances de l'origine des x, il eſt auſſi aux mêmes diſtances du point où ſe termine la plus grande impreſſion: & c'eſt de ce dernier point que commence la vîteſſe négative.

ſépareront, & la viteſſe, dans cet inſtant, ſera moindre que celle qu'auroit le corps A dans l'origine des x : par conſéquent elle ſera beaucoup moindre que la viteſſe primitive U.

COROLLAIRE V.

(282.) Comme la puiſſance α agit négativement pendant la rétrogradation, ou retarde le mouvement du corps A, même après qu'il eſt ſéparé du corps B, elle parviendra donc à détruire tout le mouvement du corps A, qui à la fin s'arrêtera, comme on l'a expliqué en parlant du mouvement retardé; & la puiſſance α retournant à agir poſitivement, il ſe fera un ſecond choc, le corps A acquérant (281.), juſqu'au moment de ſa nouvelle rencontre avec le corps B, la même viteſſe qu'il avoit lorſqu'il s'en eſt d'abord ſéparé, c'eſt-à-dire, une viteſſe moindre que U, & cette nouvelle viteſſe ſera la viteſſe primitive relativement à ce ſecond choc.

COROLLAIRE VI.

(283.) L'origne des x ſera auſſi placée plus profondément pour le ſecond choc, puiſque les premieres particules des corps n'ont pas pu, dans le premier choc, retourner préciſément à leur premiere ſituation.

COROLLAIRE VII.

(284.) La même choſe arrivera dans le troiſieme, le quatrieme, & dans tous les chocs ſuivants; la viteſſe primitive ira toujours en diminuant, juſqu'à ce qu'enfin le corps A s'arrête après avoir fait, dans les derniers chocs, des impreſſions d'une quantité infiniment petite; & alors (231.) la force de percuſſion ſe réduira à une ſimple preſſion; c'eſt-à-dire, qu'on aura $\pi = \alpha$.

PROPOSITION XXXV.

(285.) *Trouver la viteſſe* v, *avec laquelle ſe meut le corps* B, *dans un inſtant quelconque du choc.*

Si l'on ſubſtitue la valeur de u, qu'on vient de trouver, dans l'équation de *l'Art.* 260, qui eſt $v = \frac{(\alpha+B)t + AU + BV - Au}{B}$, après la réduction faite, on trouvera . . . . . .

$$v = \frac{AU+BV+(\alpha+B)t}{A+B} \mp \frac{A}{A+B}\left((U-V)^2 + \frac{(\alpha B-\alpha A)(x+\xi)}{\frac{1}{2}AB} - \frac{(A+B)\int Dt dx}{\frac{1}{2}AB}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le ſigne ſupérieur eſt pour le cas où la plus grande impreſſion n'eſt pas encore achevée; & l'inférieur a lieu après qu'elle eſt achevée.

PROPOSITION XXXVI.

(286.) *Trouver la valeur de l'impreſſion, en ſuppoſant que la dureté* D *eſt conſtante.*

Digitized by Google

Puiſqu'on ſuppoſe la dureté D conſtante, on aura $\int DHdx = D\int Hdx$; mais $\int Hdx$ eſt la valeur de l'impreſſion, puiſque H déſigne ſon amplitude, & dx la différencielle de ſa profondeur : donc, en ſubſtituant, dans l'équation de *l'Art.* 276, $D\int Hdx$ en place de $\int DHdx$, & ordonnant, on aura, pour la valeur de l'impreſſion, dans le cas où la dureté D eſt conſtante, $\int Hdx = \frac{\frac{1}{2}AB((U-V)^2-(u-v)^2)+(\alpha B-\beta A)(x+z)}{D(A+B)}$.

PROPOSITION XXXVII.

(287.) *Trouver la valeur de la plus grande impreſſion, dans le cas où la dureté* D *eſt conſtante.*

Dans l'inſtant de la plus grande impreſſion, on a $u-v=0$ (259.): ſubſtituant donc cette valeur dans l'expreſſion précédente, & appellant I la plus grande impreſſion, on aura $I=\frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)(x+z)}{D(A+B)}$.

COROLLAIRE I.

(288.) Si le corps B étoit immobile, il n'y auroit qu'à ſuppoſer $B=\infty$, & $V=0$, & la valeur de la plus grande impreſſion deviendroit, pour ce cas, $I=\frac{\frac{1}{2}AU^2+\alpha(x+z)}{D}$.

COROLLAIRE II.

(289.) Dans les corps qui tombent librement par la ſeule action de la gravité, on a (52.) $\alpha=32A$, ou $A=\frac{1}{32}\alpha$. Subſtituant cette valeur dans l'équation précédente, elle deviendra $I=\frac{\frac{1}{64}AU^2+\alpha(x+z)}{D}$. Mais ſi nous appellons e la hauteur d'où le corps tombe, on aura (52.) $e=\frac{1}{64}U^2$, ou $64e=U^2$. Subſtituant donc cette valeur de U^2, on aura, pour les corps qui tombent librement par la ſeule action de la gravité, $I=\frac{\alpha(e+x+z)}{D}$.

COROLLAIRE III.

(290.) Si les quantités x & z étoient aſſez petites pour être négligeables à l'égard de e, on auroit $I=\frac{\alpha e}{D}=\frac{\alpha U^2}{64D}$; ou, en mettant pour α ſa valeur $32A$, $I=\frac{32Ae}{D}=\frac{AU^2}{2D}$. Donc les impreſſions faites par les corps qui tombent par l'action de la gravité, ſont en raiſon directe compoſée des corps & des hauteurs d'où ils tombent, ou en raiſon directe compoſée des corps & des quarrés des viteſſes primitives avec leſquelles ils choquent, & en raiſon inverſe des duretés, ou denſités.

Digitized by Google

SCOLIE I.

(291.) Ces formules sont parfaitement d'accord avec l'expérience. Pour s'en convaincre, il ne faut que consulter les Ouvrages des Auteurs qui ont écrit sur la Physique Expérimentale. Le Docteur 's Gravesande, dans le 1er. volume de son Ouvrage intitulé, *Physices Elementa Mathematica*, décrit (§. 833.) une machine pour faire tomber avec précision différentes sphères de cuivre sur de l'argille. * Dans la troisieme expérience, il en fait tomber trois de même diametre, mais d'un poids différent, en ayant fait deux creuses : leurs poids étoient entre eux comme 1, 2 & 3. La hauteur de la chûte de ces trois spheres étoit de 9 pouces; & les impressions qu'elles firent, se trouverent aussi comme 1, 2 & 3. Dans la dixieme expérience, (§. 855.), il fit tomber les deux plus pesantes, de 18 pouces de hauteur, & trouva que leurs impressions étoient comme 4 à 6, c'est-à-dire, doubles des premieres. On voit par-là qu'en effet les impressions sont en raison composée des poids, ou masses, & des hauteurs d'où ils tombent, ou en raison composée des poids, ou masses, & des quarrés des viteſſes primitives.

COROLLAIRE IV.

(292.) Si les deux corps qui se choquent, étoient égaux & que, dans le choc, ils ne fussent animés par aucune puissance, on auroit $B = A$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$; ce qui réduit la valeur de l'impression (287.) à $I = \frac{A(U-V)^2}{4D}$; & dans le cas de $V = 0$, à $I = \frac{AU^2}{4D}$. On voit donc, comme ci dessus, que les impressions sont en raison directe composée des poids, ou des masses, & des quarrés des viteſſes avec lesquelles ils se choquent, & en raison inverse des duretés.

* Nous traduisons le mot *Greda* par le mot *Argille*, quoique, d'après l'autorité des différents Dictionnaires que nous avons été à même de consulter, ce mot signifie proprement de la *Craie*. Nous nous sommes crus fondés à faire cette correction, parce que les expériences du Docteur 's Gravesande, dont il est ici question, ont été réellement faites en laissant tomber les spheres de cuivre sur de l'argille, telle que celle dont se servent les Potiers pour leurs ouvrages du plus bas prix. Ce sçavant la prefere aux autres; voici comment il s'exprime dans le §. 821 de l'Ouvrage cité. *Argillâ omnium maximè commodè adhibetur; sed illum ex quibus vasa fictilia, maximè vulgaria, & vilioris pretii, efficiuntur, eligimus. Hæc pura defideratur, & admixtâ aquâ ita temperanda eſt, ut quidem inquinet manus, non autem adhæreat ... Ubi maſſa ex toti Argillâ fictitur, fatiſcit, & in quibuſdam locis ſeparatio partium datur; quando hanc habet proprietatem, partes eux intrepmuntur, dum cedunt, inter adjacentes penetrant.* Et dans le § 822. *Si etiam argillam magis albam, & ad naturam cretæ accedentem, adhibeamus, non facilè fatiſcit, & partes etiam inter adjacentes penetrant, dum cedunt; ſed has potiùs removent; quod pro diverſâ naturâ Argillæ diverſimodè contingit. Hæc ne ſolâ cauſâ Argillâ, primùm indicatâ, utor; quia quid huic contingere debeat ratiocinio deſignare poſſumus; eſſectus omnes fixis regulis ſubjiciuntur, prævideri poſſunt, & experimenta ratiocinia confirmant*, &c. &c.

Digitized by Google

PLANC. II

SCOLIE II.

(293.) Ceci eſt encore confirmé par pluſieurs autres expériences que le Docteur *'s Graveſande* expoſe dans l'endroit cité, & dont il déduit que les effets étant proportionnels aux cauſes, & les mêmes effets aux impreſſions, il eſt néceſſaire que les cauſes qu'il prétend avec *Leibnitz* être les *forces vives*, ſoient auſſi en raiſon compoſée des maſſes & des quarrés des viteſſes. *

SCOLIE III.

(294.) Puiſque l'expérience s'accorde avec nos formules, non-ſeulement dans le cas des corps mous comme l'argille, mais encore dans celui des corps durs & élaſtiques, lorſque la dureté *D* eſt conſtante; il eſt évident que, dans ces cas, la dureté a été au moins ſenſiblement conſtante, & que nous pouvons la ſuppoſer telle. On voit encore, par la conformité de l'expérience avec le calcul, dans lequel nous avons ſuppoſé l'impreſſion de la même figure ſphérique que le corps choquant *A*; on voit, dis-je, qu'il eſt évident, au moins dans les corps mous tels que l'argille, que, dans ces cas, le creux, ou l'enfoncement latéral *HFE*, n'a pas eu lieu. Cependant cet enfoncement ne peut manquer d'exiſter dans des corps plus élaſtiques: il exiſte même dans les corps mous comme l'argille, ſuivant le Docteur *'s Graveſande*, §. 824, lorſque l'amplitude de l'impreſſion eſt très-grande relativement à ſa profondeur, parce que, dans ce cas, les raiſons ſur leſquelles il s'eſt fondé, ne peuvent avoir lieu; car, de quelque nature que ſoit l'argille, ſes particules cedent latéralement; ** ce qui prouve que le creux, ou l'enfoncement latéral ſe forme même dans les corps mous, pourvu que la figure du corps choquant ne ſoit pas telle que ſon amplitude augmente par degrés. FIG. 23.

PROPOSITION XXXVIII.

(295.) *Déterminer la profondeur de l'impreſſion, dans le cas où l'on auroit* H = Qx; *Q déſignant une quantité conſtante.*

Si l'on ſubſtitue *Qx* pour *H* dans l'équation $\int Hdx = \ldots\ldots$ $\frac{\frac{1}{2}AB^{\prime}((U-V)^{2}-(u-v)^{2})+(aB-bA)(x+l)}{D(A+B)}$ (286.); & ſi enſuite on integre,

* *Voyez*, ſur la meſure des *forces vives*, les Ouvrages cités dans la note de la page 62, ſur-tout la Préface du *Traité de Dynamique* de M. *d'Alembert*; voyez auſſi la 4e partie du *Cours de Mathématiques* de M. *Bézout*, *Art.* 388.

** Voici ce §. 824. *Si cavitatis latitudo magna ſit reſpectu profunditatis, ratiocinia in hac ipſâ Argillâ* (celle qu'il avoit adoptée) *locum non habent; quia in hoc caſu, quæcumque ſit natura Argillæ, facilè partes lateraliter cedunt, & pars tantùm cavitatis, harum introceſſioni, tribuenda eſt.*

Digitized by Google

on aura $\frac{1}{2}Qx^2=\frac{\frac{1}{2}AB((U-V)^2-(u-v)^2)+(\alpha B-\beta A)(x+\zeta)}{D(A+B)}$. Or, dans la supposition de $H=Qx$, on aura aussi $H'=Q\zeta$ *, & l'équation $DHdx=D'H'd\zeta$ (276.) se réduira à $DQxdx=D'Q\zeta d\zeta$, d'où l'on tire, en divisant par Q, & intégrant, $Dx^2=D'\zeta^2$, & $\zeta=\frac{D^{\frac{1}{2}}}{D'^{\frac{1}{2}}}x$. Si l'on substitue maintenant cette valeur de ζ dans l'équation, il en résultera $\frac{1}{2}Qx^2=\frac{\frac{1}{2}ABD'^{\frac{1}{2}}((U-V)^2-(u-v)^2)+(\alpha B-\beta A)(D^{\frac{1}{2}}+D'^{\frac{1}{2}})x}{DD'^{\frac{1}{2}}(A+B)}$, &, en dégageant x, on a

$$x=\frac{(\alpha B-\beta A)(D^{\frac{1}{2}}+D'^{\frac{1}{2}})}{DD'^{\frac{1}{2}}Q(A+B)}\pm\left(\frac{((\alpha B-\beta A)(D^{\frac{1}{2}}+D'^{\frac{1}{2}}))^2}{(DD'^{\frac{1}{2}}Q(A+B))^2}+\frac{AB((U-V)^2-(u-v)^2)}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

COROLLAIRE I.

(296.) Dans le cas de la plus grande profondeur, ou impression, on a $u-v=0$ (259.); donc on aura la plus grande profondeur . . . .

$$x=\frac{(\alpha B-\beta A)(D^{\frac{1}{2}}+D'^{\frac{1}{2}})}{DD'^{\frac{1}{2}}Q(A+B)}\pm\left(\frac{((\alpha B-\beta A)(D^{\frac{1}{2}}+D'^{\frac{1}{2}}))^2}{DD'^{\frac{1}{2}}Q(A+B)}+\frac{AB(U-V)^2}{DQ(A+B}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

COROLLAIRE II.

(297.) Si l'on avoit $V=0$, & $B=\infty$, la plus grande profondeur x seroit $=\frac{\alpha(D^{\frac{1}{2}}+D'^{\frac{1}{2}})}{DD'^{\frac{1}{2}}Q}\pm\left(\left(\frac{\alpha(D^{\frac{1}{2}}+D'^{\frac{1}{2}})}{DD'^{\frac{1}{2}}Q}\right)^2+\frac{AU^2}{DQ}\right)^{\frac{1}{2}}$.

COROLLAIRE III.

(298.) Si, outre cela, on avoit aussi $U=0$, la plus grande x seroit alors $=\frac{2\alpha(D^{\frac{1}{2}}+D'^{\frac{1}{2}})}{DD'^{\frac{1}{2}}Q}$; c'est-à-dire, en raison directe simple de la puissance α, qui agit sur le corps A.

PROPOSITION XXXIX.

(299.) *Déterminer la profondeur de l'impression, dans le cas où π est constante.*

Qu'on suppose $\pi(A+B)=\frac{DHD'H'}{DH+D'H'}(A+B)=n(\alpha B-\beta A)$, n désignant un nombre quelconque; puisque, dans la supposition présente, DH & $D'H'$ sont des quantités constantes, l'équation (275.) $DHdx=D'H'd\zeta$, donnera, en intégrant, $DHx=D'H'\zeta$, d'où l'on tire $D'H'=\frac{DHx}{\zeta}$. Substituant cette valeur dans la premiere équa-

* Est-il bien certain que si $H=Qx$, on doive en inferer que $H=Q\zeta$? Nous croyons qu'on peut en douter. Quoiqu'il semble que cela dérive de la supposition qu'on a faite que les duretés sont constantes; cependant il ne nous paroît pas certain qu'on en puisse conclure avec l'évidence mathématique, que si la raison de H à x est Q, celle de H à ζ soit aussi Q.

Digitized by Google

tion, on aura $\frac{DHx(A+?)}{x+\zeta} = n(\alpha B - \beta A)$, ce qui donne .....
$Hx = \frac{n(\alpha B-\beta A)(x+\zeta)}{D(A+B)} = (286.) \frac{\frac{1}{2}AB((U-V)^2-(u-v)^2)+(\alpha B-\beta A)(x+\zeta)}{D(A+B)}$, d'où l'on déduit $x+\zeta = \frac{\frac{1}{2}AB((U-V)^2-(u-v)^2)}{(n-1)(\alpha B-\beta A)}$; ou en substituant $\frac{\pi(A+B)}{\alpha B-\beta A}$ à la place de n, $x+\zeta = \frac{\frac{1}{2}AB((U-V)^2-(u-v)^2)}{\pi(A+B)-(\alpha B-\beta A)}$.

Corollaire I.

(300.) Si l'on avoit $V=0$, & $B=\infty$, on auroit $x+\zeta = \frac{\frac{1}{2}A(U^2-u^2)}{\pi-\alpha}$.

Corollaire II.

(301.) Dans le cas de la plus grande impression, on a $u-v=0$: on aura donc, pour ce cas, $x+\zeta = \frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2}{\pi(A+B)-(\alpha B-\beta A)}$.

Corollaire III.

(302.) Il n'y a donc point alors de plus grande impression, ou, ce qui est la même chose, l'impression n'a point de limite, à moins que $\pi(A+B)-(\alpha B-\beta A)$ ne soit positif, ou que l'on n'ait $\pi(A+B) > \alpha B-\beta A$.

Corollaire IV.

(303.) Si l'on avoit $V=0$, & $B=\infty$, on auroit la plus grande profondeur $x+\zeta = \frac{\frac{1}{2}AU^2}{\pi-\alpha}$.

Proposition XL.

(304.) *Trouver la valeur de la dureté* D.

Puisque la dureté D a été trouvée constante, ou sensiblement constante, l'équation de *l'Art.* 276 se réduira à ..... $(\alpha B-\beta A)(x+\zeta)-D(A+B)\int Hdx = \frac{1}{2}AB((u-v)^2-(U-V)^2)$; d'où l'on tire $D = \frac{\frac{1}{2}AB((U-V)^2-(u-v)^2)+(\alpha B-\beta A)(x+\zeta)}{(A+B)\int Hdx}$; & pour le cas de plus grande impression, dans lequel on a $u-v=0$, on aura $D = \frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)(x+\zeta)}{(A+B)I}$.

Corollaire I.

(305.) Si l'on avoit $B=\infty$, & $V=0$, comme dans les expériences, rapportées ci-dessus, faites sur l'argille par le Docteur *'s Gravesande*, on auroit $D = \frac{\frac{1}{2}AU^2+\alpha z}{I} = \frac{\alpha(c+x}{I}$.

Digitized by Google

SCOLIE

PLANC. A.

(306.) Prenons, pour exemple, la premiere expérience, rapportée ci-dessus (291.), dans laquelle on faisoit tomber la sphere la moins pesante de 9 pouces de hauteur, & dans laquelle on a trouvé le diametre de l'impression de $\frac{61}{100}$ *, celui de la sphere étant de $\frac{1}{9}$. Delà on déduit la valeur de $x = \frac{100-(10000-65.65)^{\frac{1}{2}}}{1600} = \frac{3}{200}$. Celle de $I = cx^2\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{3}x\right)$; c marquant la circonférence, dont le diametre est

* Les trois spheres avec lesquelles le Docteur *'s Gravesande* a fait ses expériences, avoient 1 pouce $\frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{8}$ de pied, de diametre (*Physices Elementa mathematica*, §. 833.). Lorsqu'il faisoit tomber la sphere la moins pesante de la hauteur de 9 pouces, ou $\frac{3}{4}$ de pied, elle faisoit une impression sur l'argille, dont le diametre étoit de $\frac{61}{100}$ de celui de la sphere; c'est-à-dire, de $\frac{61}{800}$ de pied (*Ibid.* 855.). Il est aisé, d'après ces données, de concevoir les calculs de ce Scolie. Soit A la sphere, ou le corps choquant de l'expérience citée, AR le corps choqué, ou l'argille sur laquelle on faisoit tomber la sphere A: soit nommé $2a$ le diametre SP de la sphere, $2y$ le diametre GI de l'impression qu'elle formoit sur l'argille, & x la profondeur PK de la même impression, ou la fleche du segment $GPIK$; on aura $a = \frac{1}{16}$, & $y = \frac{61}{1600}$. Ceci posé, par la propriété du cercle $yy = 2ax - xx$, donc $x = a \pm (aa - yy)^{\frac{1}{2}}$,

FIG. I. ou simplement $x = a - (aa - yy)^{\frac{1}{2}}$, puisque, dans le cas dont il s'agit ici, il est évident qu'on a $x < a$. Substituant, dans cette équation, à la place des lettres leurs valeurs numériques, on a $x = \frac{1}{16} - \left(\frac{10000 - 65.65}{(1600)^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{100 - (10000 - 65.65)^{\frac{1}{2}}}{1600} = \frac{3}{200}$.

La valeur de I, ou de la plus grande impression, est la solidité du segment $GPIK$: pour la calculer, je représente par c la circonférence du cercle dont le diametre est l'unité, alors acy sera la circonférence qui termine l'impression, & dont $GI = 2y$ est le diametre; $\frac{2}{a}cy \cdot \frac{y}{2} = cy^2$ en sera la surface; & $cy^2 dx$ sera un des éléments de la solidité de la sphere. Substituant pour yy sa valeur $2ax - xx$, cet élément devient $2acxdx - cx^2 dx$, & en intégrant, on aura la solidité d'un segment quelconque de la sphere $= \int(2acxdx - cx^2 dx) = acx^2 - \frac{1}{3}cx^3 = cx^2\left(a - \frac{1}{3}x\right)$. Si l'on fait $x = 2a$, on aura la solidité de la sphere entiere $= 4ca^2\left(\frac{4}{3}a\right) = \frac{16a^3}{3}c$. Remarquons en passant que l'expression générale que nous venons de trouver, étant traduite en langage ordinaire, fait voir que *la solidité d'un segment sphérique, est égale à celle d'un cylindre dont le rayon de la base est la fleche du segment, & dont la hauteur est le rayon de la sphere moins le tiers de la fleche.* Mettant pour a sa valeur $\frac{1}{16}$, on a $I = cx^2\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{3}x\right)$. Faisant la même substitution dans la solidité de la sphere, elle devient $\frac{4c}{2.16.16.16}$: mais comme il s'agit ici de la sphere la moins pesante, qui n'est que le tiers de la plus pesante (291), il faut prendre le tiers de cette expression, & on aura $\frac{4c}{9.16.16.16}$ pour cette solidité. Il est évident qu'on peut prendre cette quantité pour représenter A, puisque l'auteur n'a en vue ici que de trouver l'expression de la dureté des spheres que le Docteur *'s Gravesande* a soumises à l'expérience, & de faire voir que toutes les expériences donnent le même résultat: car ces spheres étant d'une même matiere, elles ont leurs masses proportionnelles à leurs volumes. Mais s'il s'agissoit de comparer les duretés de plusieurs spheres de différentes matieres, il seroit absolument nécessaire de prendre pour A le poids absolu de chacune, parce que les poids sont proportionnels aux masses, au lieu que les volumes ne le sont pas. Les calculs du reste de ce Scolie sont si aisés, d'après ce que nous venons de dire, que nous ne croyons pas nécessaire de nous y arrêter plus long temps.

Notre résultat est différent de celui de l'Auteur qui donne $D = 200\frac{3^{1}c^{0}}{39^{3}10}$; mais il est évident qu'il y a une faute dans l'original.

l'unité

l'unité. Celle de A, qui est la masse totale de la sphere $= \frac{4c}{9.16.16.16}$, ce qui donne $\alpha = \frac{4.32.c}{9.16.16.16}$ (290.). Ces valeurs de α & de I étant substituées dans l'équation $D = \frac{\alpha(c+x)}{I}$, donnent $D = \frac{c+x}{6x^2(3-16x)} = \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{200}}{\frac{63}{40000}(3-\frac{32}{200})} = 205\frac{1040}{1312}$. On aura le même résultat, à quelques petites différences près, en calculant d'après les autres expériences. On trouvera de la même maniere la valeur de D, avec quelque matiere qu'on fasse les expériences.

Corollaire II.

(307.) Ayant trouvé la valeur de D par l'équation . . . . . $D = \frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(aB-bA)(x+c)}{(A+B)I}$, on trouvera de même celle de D': car ayant $D\int Hdx = D'\int H'd\zeta$, ou $DI = D'I'$, I' marquant la grandeur de la plus grande impression faite dans le corps A, on aura $D' = \frac{DI}{I'}$. Calculant donc, d'après l'expérience, la valeur de I', on aura celle de D'.

Proposition XLI.

(308.) *La plus grande force de percussion est celle qui agit au moment que s'acheve l'impression totale.*

A l'instant de l'action de la plus grande force de percussion, la différencielle de π, ou de son égale $\frac{DH.D'H'}{DH+D'H'}$ est $=0$; c'est-à-dire que $\frac{H'dH}{DH+D'H'} + \frac{HdH'}{DH+D'H'} - \frac{HH'(DdH+D'dH')}{(DH+D'H')^2} = 0$; ou en réduisant, . . . $D'H'^2dH + DH^2dH' = 0$; mais cette quantité ne peut être zéro, sans que les différencielles dH & dH' ne soient aussi zéro; c'est-à-dire, sans que les amplitudes H & H', ou les impressions, n'aient reçu toute l'augmentation qu'elles peuvent avoir. Donc la plus grande force de percussion est celle qui agit au moment que s'acheve l'impression totale.

Proposition XLII.

(309.) *Trouver l'expression de la force de percussion* π.

La force de percussion, à quelque instant du choc que ce soit, est $\pi = \frac{DH.D'H'}{DH+D'H'}$. Substituant, dans cette équation, la valeur de $D' = \frac{DI}{I'}$ (307.), on aura $\pi = \frac{D^2HH'}{I'\left(DH+\frac{DIH'}{I'}\right)} = \frac{DHH'}{H'+HI}$. Substituant main-

tenant, dans cette équation, la valeur de $D=\frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)(x+\zeta)}{(A+B)I}$ (304), & on aura $\pi=\frac{HH'}{HI'+H'I}\left(\frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)(x+\zeta)}{A+B}\right)$. *

SCOLIE.

(310.) On sçait déjà que les quantités I & I' expriment les plus grandes impressions; mais on doit remarquer que les x & ζ sont aussi les profondeurs des plus grandes impressions, puisque ces quantités sont introduites dans la valeur de π, par la substitution de la valeur de D, prise pour le cas de la plus grande impression (304.). Les quantité H & H' sont donc les seules qu'on doive regarder comme variables dans cette équation, pour obtenir les différentes valeurs de la force π.

COROLLAIRE I.

(311.) La plus grande force de percussion étant celle qui a lieu, lorsque les quantités H & H' parviennent à leur plus grande valeur, il s'ensuit qu'en mettant dans l'équation les plus grandes valeurs de H & H', on aura la plus grande force de percussion.

COROLLAIRE II.

(312.) Dans le cas où $B=\infty$, $V=0$, & $\frac{D}{D'}=0$, d'où il résulte $I'=0$, & $\zeta=0$ **, on aura $\pi=\frac{H}{I}(\frac{1}{2}AU^2+\alpha x)$: & dans la chûte des corps par la seule action de la gravité, où l'on a $\frac{1}{2}AU^2=\alpha\epsilon$ (46.), $\pi=\frac{H\alpha}{I}(\epsilon+x)$.

COROLLAIRE III.

(313.) La force de gravité sera donc à celle de percussion, comme α est à $\frac{H\alpha}{I}(\epsilon+x)$, ou comme 1 est à $\frac{H}{I}(\epsilon+x)$; ou enfin comme I est à $H(\epsilon+x)$.

---

* On pourroit penser que cette valeur de π seroit celle de la plus grande force de percussion, puisqu'on l'obtient en y introduisant la valeur de D prise dans le cas de la plus grande impression, qui concourt avec celui de la plus grande force de percussion (308). Mais il faut remarquer qu'ayant supposé la dureté D constante, on auroit la même valeur pour π, en substituant une valeur de D prise dans une autre circonstance que celle de la plus grande impression, en ayant attention à prendre la valeur de l'impression & de sa profondeur qui correspondent à ce cas. Ainsi cette valeur de π ne peut exprimer la plus grande force de percussion, que dans le cas où H & H' seroient les amplitudes de la plus grande impression.

** On voit facilement que pour avoir $\frac{D}{D'}=0$, il faut que la dureté du corps A soit infinie à l'égard de celle du corps B; alors il est évident que la plus grande impression I', & sa profondeur ζ faite dans le corps A, sont chacune $=0$.

Digitized by Google

Scolie I.

(314.) Dans les expériences du Docteur *'s Gravesande* sur l'argille, on a $H=cx(\frac{1}{4}-x)$; * & (306. *Voyez aussi la note de cet Art.*) $I=cx^2(\frac{1}{16}-\frac{1}{2}x)$: donc on aura $\frac{H}{I}=\frac{cx(\frac{1}{4}-x)}{cx^2(\frac{1}{16}-\frac{1}{2}x)}=\frac{\frac{1}{4}-x}{x(\frac{1}{16}-\frac{1}{2}x)}$; d'où il suit que la force de la gravité est à celle de percussion, comme 1 est à $\frac{(e+x)(\frac{1}{4}-x)}{x(\frac{1}{16}-\frac{1}{2}x)}$ (313.). Dans la premiere expérience, on avoit $e=\frac{1}{4}$, & l'on a trouvé $x=\frac{1}{100}$. Donc la force de gravité étoit à celle de percussion, comme 1 est à $\frac{(\frac{1}{4}+\frac{1}{100})(\frac{1}{4}-\frac{1}{100})}{\frac{1}{100}(\frac{1}{16}-\frac{1}{100})}$; ou comme 1 est à $97\frac{11}{15}$; de sorte que la force de percussion, quoique dans un corps mou comme l'argille, & la sphere tombant seulement de 9 pouces de hauteur, étoit plus de 97 fois plus grande que celle de la gravité.

Corollaire IV.

(315.) Si $B=\infty$, $V=0$, & $D=D'$, & qu'on ait à-peu-près $H=H'$, $I=I'$, $\zeta=x$, on aura $\pi=\frac{H}{2I}(\frac{1}{4}AU^2+2ax)$; & dans la chûte des corps qui tombent par la gravité, $\pi=\frac{H_a}{2I}(e+2x)$.

Corollaire V.

(316.) La force de gravité sera donc, dans ce cas, à celle de percussion, comme 1 est à $\frac{H}{2I}(e+2x)$.

Scolie II.

(317.) Lorsque deux corps très-durs, comme le sont deux corps de fer, viennent à se choquer, l'impression I qui se fait dans chacun, est presque infiniment petite par rapport à $H(e+2x)$: donc, dans ce cas, la force de percussion est presque infinie, à l'égard de celle de gravité. Prenons pour exemple le coup d'un marteau sur une enclume. Puisque I représente la grandeur de l'impression, qui doit être comme le produit de H, qui est son amplitude, par une quantité proportionnelle à sa profondeur, que nous sçavons par l'expérience être extrêmement petite, nous pouvons supposer $I=H.\frac{1}{k}$, k exprimant un nombre quelconque, tel que $\frac{1}{k}$, soit

* H designe l'amplitude de l'impression, ou la surface du cercle qui termine l'impression (247). Or, par la note de l'*article* 306, cette surface est cy^2, qui devient $cx(\frac{1}{4}-x)$ en substituant pour y^2 sa valeur $2ax-xx$, & ensuite pour a sa valeur $\frac{1}{8}$. Le résultat des calculs de ce Scolie est encore erronné; l'Auteur fait la force de gravité à celle de percussion dans le rapport de 1 à 109 $\frac{76}{363}$. Il est visible que c'est une faute de calcul.

Digitized by Google

encore moindre que la profondeur de l'impreſſion, * qui, lorſqu'elle eſt la plus grande, ne peut gueres être que de $\frac{1}{12000}$, ou $\frac{1}{1200}$ de pied. Cette valeur de I étant donc ſubſtituée dans l'expreſſion, on trouvera que la force de gravité eſt à celle de percuſſion, comme 1 eſt à $\frac{H}{2H.\frac{1}{k}}(e+2x)=\frac{1}{2}k(e+2x)$; ou, négligeant x, comme étant très-petite, comme 1 eſt à $\frac{1}{2}ke$. Maintenant ſi la viteſſe du marteau eſt équivalente à celle qu'il prendroit en tombant librement de 10 pieds de hauteur; & ſi nous faiſons ſeulement $k=12000$, on aura la force de gravité du marteau à celle de percuſſion du même marteau, comme 1 à 60000; c'eſt-à-dire que cette derniere force ſera 60000 fois plus grande que celle de la gravité; & que l'effet du marteau équivaudra à celui que pourroit cauſer, ſur le même point où s'eſt donné le coup, un poids 60000 fois plus grand que celui du marteau. Ceci ſuffit déjà pour ne pas être étonné de l'effet prodigieux de la force de percuſſion.

SCOLIE III.

Fig. 25. (318.) Cette théorie peut auſſi s'appliquer aux cordes; car ſi l'on imagine que l'une des extrémités d'une corde ſoit attachée à un point fixe E, & qu'il y ait à l'autre extrémité un poids A; ſi on laiſſe tomber ce poids d'une hauteur quelconque, il eſt clair que l'action qu'il exerce à la fin de ſa chûte, lorſque la corde eſt étendue dans toute ſa longueur, comme en EI', eſt une véritable percuſſion. Pour appliquer les mêmes formules à ce cas, H déſignera la ſection perpendiculaire à la corde; D la qualité de la matiere dont elle eſt faite, ou ſa force; I le produit de H par la plus grande quantité dont la corde s'allonge dans l'action; & enfin x la quantité dont elle s'allonge dans un cas quelconque. On remarquera, en outre, que le point fixe E, étant celui ſur lequel s'exerce l'action, doit être conſidéré comme un corps infini: on aura donc $B=\infty$, $V=0$, $\frac{D}{D'}=0$, $I'=0$, & $\zeta=0$. Ainſi la formule qui convient à ce cas eſt (312.) $\pi=\frac{H}{I}(\frac{1}{2}AU+\alpha x)$; U déſignant la viteſſe du corps A à l'inſtant qu'il parvient au point le plus bas de ſa chûte; ou bien, en ſuppoſant $I=HX$, X marquant

* Ceci ſuppoſe que l'impreſſion eſt moins étendue dans le fond qu'à la ſurface, ce qui a toujours lieu (252 & 294). Si l'amplitude étoit la même dans toute la profondeur de l'impreſſion, ce qui ne peut avoir lieu dans les corps durs & tenaces, alors $\frac{1}{k}$ ſeroit égal à la profondeur de l'impreſſion.

Digitized by Google

toute la quantité dont la corde peut s'allonger jusqu'à ce qu'elle se rompe, ou qu'elle soit sur le point de se rompre, $\pi = \frac{1}{X}(\frac{1}{2}AU^2 + \alpha x)$; & lorsqu'il s'agit de la chûte des corps qui tombent par l'action seule de la gravité, cette équation devient $\pi = \frac{a}{X}(e+x)$.

Lorsque le corps A est seulement suspendu à la corde, pour qu'elle le soutienne, sans qu'il y ait aucune chûte, $s=0$; donc, dans ce cas, $\pi = \frac{a.x}{X}$; & si le poids du corps A étoit tel qu'il s'en fallût infiniment peu qu'il ne fît rompre la corde, on auroit $x=X$, & $\pi=a$; c'est-à-dire que la force de percussion, qui, dans ce cas, est une force de pression, est égale au poids du corps, que nous pouvons appeller P. Soit nommé p le plus grand poids dont la même corde puisse supporter l'action, en supposant qu'il tombe de la hauteur e; comme cette force de résistance dans la corde est constante, nous aurons $P = \frac{p}{X}(e+X)$ pour le point précis de sa rupture, ou pour celui où elle est infiniment près de se rompre dans la chûte du corps p *; c'est-à-dire que le poids p qui, par sa chûte de la hauteur e, auroit précisément la force nécessaire pour rompre la corde, est donné par l'équation $p = \frac{PX}{e+X}$. La quantité X est proportionnelle à la longueur de la corde, puisque chacune de ses parties s'allonge proportionnellement. Donc si nous exprimons par l la longueur de la corde, & par $\frac{1}{n}$, le rapport suivant lequel elle s'allonge relativement à sa longueur, on aura $X = \frac{l}{n}$, & $p = \frac{P.\frac{l}{n}}{e+\frac{l}{n}} = \frac{Pl}{ne+l}$.

On ne doit pas entendre ici, par l'allongement d'une corde, la quantité dont elle s'allonge effectivement aux premiers efforts qu'elle fait lorsqu'elle est neuve; mais l'allongement dont elle est susceptible, depuis l'état où elle se trouve après s'être rétablie, ayant supporté ces premiers efforts, & qu'elle vient à s'allonger de nouveau par l'action d'une puissance; cet allongement n'étant réellement que la quantité dont la corde raccourcit, en revenant dans sa longueur ordinaire, par l'effet de son élasticité naturelle.

* Cette équation suit naturellement de ce que, dans la rupture de la corde par la seule suspension du poids P, on a $\pi = a = P$; & que, dans le cas de la même rupture par la chûte du corps p de la hauteur e, on a $a = p$; ce qui donne $\pi = \frac{p}{X}(e+X)$. Or, comme la résistance dont la corde est capable jusqu'à sa rupture, est constante, de quelque maniere que cette rupture se fasse, on a la puissance π, qui produit cet effet dans le premier cas, égale à la puissance π qui le produit dans le second, ou $P = \frac{p}{X}(e+X)$.

Digitized by Google

On ſçait par l'expérience qu'une corde de chanvre, de 3 pouces de circonférence, peut ſoutenir, lorſqu'elle eſt bien faite, juſqu'à la charge de 65 quintaux, & qu'en ce cas elle s'allonge de $\frac{1}{10}$. On aura donc $P=65$, & $\frac{1}{n}=\frac{1}{10}$, ou $n=10$, ce qui donne $P=\frac{65l}{10\epsilon+l}$. Si l'on ſuppoſe donc que la corde ait 100 pieds de longueur, & qu'on laiſſe tomber le poids p qui lui eſt attaché, de cette même hauteur de 100 pieds, on aura $p=\frac{65.100}{1000+100}=\frac{65}{11}=5$ quintaux $\frac{10}{11}$; c'eſt le moindre poids qui puiſſe faire rompre la corde *. On voit, par la formule, & par tout ce que nous venons de dire, que plus la corde ſera longue, plus elle réſiſtera dans la percuſſion; ou, comme diſent les Marins Eſpagnols, dans *l'Eſtrechon*: car ſi, au lieu de 100 pieds de longueur, la corde en avoit ſeulement 50, on auroit $p=\frac{65.50}{1000+50}=\frac{65}{21}=3$ quintaux $\frac{2}{21}$; ce poids tombant de la même hauteur de 100 pieds, ſeroit ſuffiſant pour rompre la corde.

PROPOSITION XLIII.

(319.) *Trouver le temps de la durée du choc.*

Ayant vu (258.) que $dt=\frac{dx+d\zeta}{u-v}$, & (277.) que $u-v=\ldots \pm\left((U-V)^2+\frac{(\alpha B-\beta A)(x+\zeta)}{\frac{1}{2}AB}-\frac{(A+B)DfHdx}{\frac{1}{2}AB}\right)^{\frac{1}{2}}$, on aura, en ſubſtituant cette valeur dans l'équation précédente, ... $dt=\frac{dx+d\zeta}{\pm\left((U-V)^2+\frac{(\alpha B-\beta A)(x+\zeta)}{\frac{1}{2}AB}-\frac{(A+B)DfHdx}{\frac{1}{2}AB}\right)^{\frac{1}{2}}}$; ou en multipliant le numérateur & le dénominateur par $\left(\frac{\frac{1}{2}AB}{(A+B)D}\right)^{\frac{1}{2}}$, ... $dt=\frac{\left(\frac{AB}{2D(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}(dx+d\zeta)}{\pm\left(\frac{AB(U-V)^2}{2D(A+B)}+\frac{(\alpha B-\beta A)(x+\zeta)}{D(A+B)}-fHdx\right)^{\frac{1}{2}}}$.

COROLLAIRE I.

(320.) Dans le cas où l'on auroit à très-peu près $\zeta=0$, & $d\zeta=0$, on auroit $dt=\frac{\left(\frac{AB}{2D(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}dx}{\pm\left(\frac{AB(U-V)^2}{2D(A+B)}+\frac{(\alpha B-\beta A)x}{D(A+B)}-fHdx\right)^{\frac{1}{2}}}$.

* Ce poids eſt le moindre qui puiſſe faire rompre la corde lorſqu'on le fait tomber de la hauteur de 100 pieds; mais ſi on le faiſoit tomber d'une hauteur plus conſidérable, ce qui pourroit avoir lieu, dans la ſuppoſition préſente, en diſpoſant le point de ſuſpenſion de maniere qu'il ne gênât pas le corps dans ſa chûte; alors ϵ pourroit être $=2l$, & il eſt évident que p pourroit alors n'être que de 3 quintaux $\frac{2}{21}$: c'eſt le moindre poids poſſible qui puiſſe faire rompre la corde.

Digitized by Google

Corollaire II.

(321.) Dans le cas où $\zeta = x$, & $d\zeta = dx$, on a . . . . . :

$$dt = \frac{\left(\frac{2AB}{D(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}} dx}{\pm \left(\frac{AB(U-V)^2}{2D(A+B)} + \frac{2(\alpha B - \beta A)x}{D(A+B)} - \int H dx\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Corollaire III.

(322.) Pour déduire de ce second cas le précédent, il ne sera donc nécessaire que de diviser par 2 le terme dans lequel se trouve $\alpha B - \beta A$, & de diviser ensuite toute l'expression du temps, pareillement par 2.

Scolie.

(323.) Il ne reste donc qu'à intégrer pour avoir la valeur de t. Cette opération dépend de la valeur qu'on donnera à H, & celle-ci dépend de la figure, de la disposition, & de la dureté réciproque des deux corps choqués. Pour cela nous pouvons supposer $\int H dx$ égale à une fonction quelconque de x avec des constantes; car quoiqu'il ne soit pas possible que cette supposition convienne à tous les corps, il s'en trouvera toujours un, ou quelques-uns auxquels elle correspondra.

Proposition XLIV.

(324.) *Trouver la valeur de la durée du choc, en supposant* $\int H dx = Qx^z$, $z = x$, & $dz = dx$; Q *étant une constante.*

L'équation de *l'Art.* 319 se réduit, dans ce cas, à . . . . . :

$$dt = \frac{\left(\frac{2AB}{D(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}} dx}{\pm \left(\frac{AB(U-V)^2}{2D(A+B)} + \frac{2(\alpha B - \beta A)x}{D(A+B)} - Qx^z\right)^{\frac{1}{2}}}$$: ou, en divisant le numérateur & le dénominateur par $Q^{\frac{1}{2}}$, à $dt = \frac{\left(\frac{2AB}{QD(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}} dx}{\pm \left(\frac{AB(U-V)^2}{2QD(A+B)} + \frac{2(\alpha B - \beta A)x}{QD(A+B)} - x^z\right)^{\frac{1}{2}}}$.

Faisant, dans cette expression, $\frac{AB(U-V)^2}{2QD(A+B)} + \frac{(\alpha B - \beta A)^2}{Q^2 D^2 (A+B)^2} = R^2$, on aura $dt = \frac{\left(\frac{2AB}{R^2 QD(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}} R dx}{\left(R^2 - \left(x - \frac{(B-\beta A)}{QD(A+B)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$; & en intégrant, on trouvera $t = \left(\frac{2AB}{D(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(Arc\ sin\ \frac{\alpha B - \beta A}{RDQ(A+B)} + Arc\ sin\left(\frac{x}{R} - \frac{\alpha B - \beta A}{RDQ(A+B)}\right)\right)$, pour le temps dans lequel se forme, ou augmente, l'impression; &. . . .

Digitized by Google

$t=\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(C+Arc\,sin\,\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}-Arc\,sin\left(\frac{x}{R}-\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}\right)\right)$, pour le temps dans lequel l'impreſſion va en diminuant, en comptant pareillement depuis le commencement du choc, C marquant la demi-circonférence d'un cercle, dont le rayon eſt l'unité. *

COROLLAIRE I.

(325.) Ces deux temps doivent être égaux à l'inſtant où s'acheve la plus grande impreſſion, puiſque ce cas correſpond à l'un & à l'autre: donc au moment de la plus grande impreſſion, on aura $Arc\,sin\left(\frac{x}{R}-\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}\right)=C-Arc\,sin\left(\frac{x}{R}-\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}\right)$ . . . . . ou $Arc\,sin\left(\frac{x}{R}-\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}\right)=\frac{1}{2}C$. Subſtituant cette valeur dans l'une quelconque des deux expreſſions du temps, on aura, pour tout le

* Comme les calculs de cette Propoſition pourroient embarraſſer quelques Lecteurs, nous allons les développer un peu plus que l'Auteur ne l'a fait.

Le dénominateur de l'expreſſion $dt=\frac{\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}dx}{\pm\left(\frac{AB(U-V)^2}{2QD(A+B)}+\frac{2(\alpha B-\beta A)x}{DQ(A+B)}-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$ contient le quarré de x, & un autre terme affecté de x au premier degré. Si l'on ajoute, & ſi l'on retranche de ce dénominateur le quarré de la moitié du multiplicateur de x, on n'en changera point la valeur, & il contiendra alors un quarré parfait; c'eſt-à-dire que ce dénominateur ſera $\pm\left(\frac{AB(U-V)^2}{2QD(A+B)}+\left(\frac{\alpha B-\beta A}{QD(A+B)}\right)^2-\left(\frac{\alpha B-\beta A}{QD(A+B)}\right)^2+\frac{2(\alpha B-\beta A)x}{DQ(A+B)}-x^2\right)^{\frac{1}{2}}=$ $\pm\left(\frac{AB(U-V)^2}{2QD(A+B)}+\left(\frac{\alpha B-\beta A}{QD(A+B)}\right)^2-\left(x-\frac{\alpha B-\beta A}{QD(A+B)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Faiſant maintenant . . . . $\frac{AB(U-V)^2}{2QD(A+B)}+\left(\frac{\alpha B-\beta A}{QD(A+B)}\right)^2=R^2$, & ſubſtituant dans la valeur de dt, on aura . . . $dt=\frac{\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}dx}{\pm\left(R^2-\left(x-\frac{\alpha B-\beta A}{DQ(A+B)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$.

Ceci poſé, ſuppoſons que EI repréſente un arc quelconque, CI ſon ſinus, & l'arc infiniment petit Ii ſa différencielle; ſi nous menons ir parallele à CI, & la perpendiculaire Ir, ainſi que le rayon IL, le triangle Iri pourra être conſidéré comme rectiligne, & ſemblable au triangle ICL, ce qui donnera $CL:IL::ri:Ii$. Faiſant donc $CI=u$, $IL=r$, l'arc $EI=a$, nous aurons $Ii=da$, $ri=du$, $CL=(IL^2-CI^2)^{\frac{1}{2}}=(r^2-u^2)^{\frac{1}{2}}$; par conſéquent la proportion précédente ſe change en celle-ci $(r^2-u^2)^{\frac{1}{2}}:r::du:da=\frac{rdu}{(r^2-u^2)^{\frac{1}{2}}}$; expreſſion générale de l'élément d'un arc de cercle, dont le ſinus $=u$, & le rayon $=r$. Remarquons maintenant que da eſt également la différencielle de l'arc FI ſupplément de EI, & que pour cet arc ſupplémentaire, le ſinus CI augmentant de du, l'arc diminue de da; donc da eſt alors négative: par conſéquent $\frac{rdu}{\pm(r^2-u^2)^{\frac{1}{2}}}$ eſt l'élément d'un arc de cercle, ou de ſon ſupplément.

Si l'on multiplie par R un des facteurs du numérateur de la valeur de dt, & ſi l'on diviſe

temps

Digitized by Google

temps que les corps emploient à former le plus grande impreſſion, FRANÇ. A. $t=\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}C+Arc\,\sin\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}\right)$.

---

en même temps l'autre facteur auſſi par R, cela n'en changera point la valeur, & donnera FIG. 2.

$$dt=\frac{\left(\frac{2AB}{R^2DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}Rdx}{\pm\left(R^2-\left(x-\frac{\alpha B-\beta A}{DQ(A+B)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}=\left(\frac{2AB}{R^2DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{Rdx}{\pm\left(R^2-\left(x-\frac{\alpha B-\beta A}{DQ(A+B)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right);$$

expreſſion dont le ſecond facteur eſt abſolument identique avec $\frac{rdu}{\pm(r^2-u^2)^{\frac{1}{2}}}$, & par conſéquent ce ſecond facteur repréſente l'élément d'un arc de cercle, dont le ſinus eſt $=x-\frac{\alpha B-\beta A}{DQ(A+B)}$ & le rayon $=R$; ou bien l'élément de ſon ſupplément à 180°.

Pour réduire l'expreſſion de cet élément à ce qu'elle ſeroit, ſi le rayon du cercle étoit l'unité, il eſt évident qu'il ne s'agit que de la diviſer par R; ou, ce qui revient au même, de diviſer ſon numérateur par R^2, & ſon dénominateur par R, afin que l'expreſſion du ſinus ſe trouvant auſſi diviſée par R, la forme néceſſaire à l'intégration ſoit conſervée. Faiſant donc cette diviſion, & multipliant en même temps le premier facteur de dt par la même quantité R, pour que la valeur de dt ne ſoit pas changée, nous aurons . . . . . .

$$dt=\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\frac{dx}{R}}{\left(1-\left(\frac{x}{R}-\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right);$$ quantité dont le ſecond facteur repréſente l'élément d'un arc de cercle, dont le rayon $=1$, & le ſinus $=\frac{x}{R}-\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}$.

Donc, ſi l'on integre cette équation, on aura $t=\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(Arc\,\sin\left(\frac{x}{R}-\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}\right)\right)+M$. ($M$ repréſentant la conſtante qui complette l'intégrale).

Maintenant ſi l'on conſidere que cette quantité doit être zéro au commencement du choc; c'eſt-à-dire, lorſque $x=0$, & qu'alors $\sin\left(\frac{x}{R}-\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}\right)$ devient $-\sin\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}$, on aura $\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-Arc\,\sin\frac{(\alpha B-\beta A)}{RDQ(A+B)}\right)+M=0$, & par conſéquent $M=\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(Arc\,\sin\frac{\alpha B-\beta A}{RQD(A+B)}\right)$. Subſtituant cette quantité dans la valeur de t, on aura enfin $t=\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(Arc\,\sin\left(\frac{x}{R}-\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}\right)+Arc\,\sin\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}\right)$; c'eſt la premiere valeur donnée par l'Auteur. Pour trouver la ſeconde, on ſe rappellera ce que nous venons de dire, ſçavoir, que le ſecond facteur de la valeur de dt, conſidéré comme affecté du ſigne $-$, repréſente l'élément du ſupplément d'un arc de cercle dont le ſinus $=\frac{x}{R}-\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}$; or cet arc a pour expreſſion $C-Arc\,\sin\left(\frac{x}{R}-\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}\right)$, C déſignant la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon $=1$. Intégrant donc l'équation précédente ſous ce dernier point de vue, & ajoutant la même conſtante pour compléter l'intégrale, on aura . . . . .

$$t=\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(C+Arc\,\sin\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}-Arc\,\sin\left(\frac{x}{R}-\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}\right)\right).$$

On remarquera qu'on a ajouté la même conſtante dans cette ſeconde intégration que dans la premiere, afin que le temps t ſoit toujours compté depuis le commencement du choc, c'eſt-à-dire, avant qu'il y eût aucune impreſſion de formée. Si l'on avoit cherché une conſtante

Digitized by Google

COROLLAIRE II.

(326.) Dans les corps parfaitement élastiques l'impression diminue au point que x devient $=0$: donc, en substituant cette valeur de x dans la seconde équation du temps, on aura, pour l'expression de toute la durée du choc, lorsque les corps sont parfaitement élastiques, $t=\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(C+2\,Arc\,sin\,\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}\right)$.

COROLLAIRE III.

(327.) Il suit des deux Corollaires précédents, que pour les corps parfaitement élastiques, le temps de toute la durée du choc est double de celui qu'ils emploient à former la plus grande impression; ou, ce qui est la même chose, le temps qui s'écoule depuis le commencement du choc, jusqu'à ce que la plus grande impression soit achevée, est égal à celui qui s'écoule depuis le moment de cette plus grande impression, jusqu'à la fin du choc.

COROLLAIRE IV.

(328) Comme les corps qui n'ont que peu, ou point d'élasticité sensible, terminent leur choc au moment de la plus grande impression, le temps de la durée du choc de ces corps sera donc .... $t=\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}C+Arc\,sin\,\frac{\alpha B-\beta A}{RQD(A+B)}\right)$.

COROLLAIRE V.

(329.) Si l'on avoit $\alpha=0$ & $\beta=0$, on auroit pour le temps dans lequel se forme la plus grande impression, ou pour le temps de la durée du choc des corps qui n'ont aucune élasticité sensible, $t=\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{2}C$; & pour celui de la durée du choc des corps d'une élasticité parfaite, ou à très-peu près parfaite, $t=\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}.C$.

COROLLAIRE VI.

(330.) On voit que la quantité R, qui est l'unique qui contienne

particulière à ce second cas, qui n'a lieu qu'après que la plus grande impression est formée, c'est-à-dire, dans la rétrogradation (277.), on auroit trouvé la même expression que la précédente, mais avec des signes contraires, comme cela doit être; alors t auroit marqué, dans ce second cas, le temps écoulé depuis l'instant où la plus grande impression est achevée jusqu'à la fin du choc; ce qui auroit fait voir aussi que ce temps est le même que celui qui s'écoule depuis le commencement du choc, jusqu'à ce que la plus grande impression soit tout-à-fait formée; vérité que l'Auteur démontre plus bas, *Art.* 327. On voit encore clairement que le second temps que nous avons trouvé est plus grand que le premier, comme cela doit être, d'après la théorie de la percussion.

Digitized by Google

les vîteſſes primitives U & V, ne ſe trouve point dans ces expreſſions du temps ; il faut en conclure que dans les corps qui ſe choquent, ſans être animés par des puiſſances, la durée du choc ne dépend en aucune maniere des vîteſſes avec leſquelles ils ſe choquent ; & cette durée ſera toujours la même, quelles que ſoient ces vîteſſes.

Corollaire VII.

(331.) Si l'impreſſion ſe formoit par la ſeule preſſion, ou action des puiſſances α & β, les vîteſſes U & V étant $=0$, comme il arrive dans les corps peſants, lorſqu'un corps eſt poſé ſur un autre, & le preſſe ſeulement par ſon poids, on auroit $R=\frac{(\alpha B-\beta A)}{DQ(A+B)}$. Cette valeur de R étant ſubſtituée dans les expreſſions du temps $t=\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}C+Arc\ sin\ \frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}\right)$, & $t=\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(C+2\,Arc\ sin\ \frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}\right)$, on aura le temps dans lequel ſe forme la plus grande impreſſion, & ſon double, qui eſt celui de toute la durée du choc dans les corps d'une élaſticité parfaite, ou à peu près, lorſque U & $V=0$; & ces expreſſions ſont $t=\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}.C$, & $t=\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}.2\,C$.

Corollaire VIII.

(332.) Les temps de la durée du choc des corps, lorſqu'ils ne ſont animés que par les puiſſances, ſans le concours d'aucune vîteſſe primitive, ſont donc doubles des temps de la durée du choc des mêmes corps, lorſqu'aucune puiſſance ne les anime, & que ce ſont ſeulement les vîteſſes primitives qui produiſent le choc.

Corollaire IX.

(333.) Comme les expreſſions du temps, dans le cas où les corps ne ſont animés que par l'action des puiſſances, ne renferment point ces puiſſances, il eſt évident que ce temps ſera le même, quelles que ſoient ces puiſſances.

Corollaire X.

(334.) Si nous ſuppoſons la profondeur de la plus grande impreſſion $=X$, on aura $QX^2=I$ (286, 287 & 324.), ce qui donne $Q=\frac{I}{X^2}$; & par conſéquent (304.) $D=\frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)2X}{(A+B)I}$ * ; d'où

* On ne doit pas perdre de vue la ſuppoſition qui a été faite, *Art.* 321, & au commencement de cette Propoſition, *Art.* 324, qui eſt que $x=z$, & par conſéquent que $x+z=2x$, ou que $X+Z=2X$, lorſqu'il s'agit des plus grandes impreſſions.

Digitized by Google

il réſulte $DQ(A+B)=\frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)2X}{X^2}$. Cela poſé, prenons l'équation $R^2=\frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2}{DQ(A+B)}+\frac{(\alpha B-\beta A)^2}{D^2Q^2(A+B)^2}$, & nous en déduirons $R^2D^2Q^2(A+B)^2=\frac{1}{2}ABDQ(A+B)(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)^2=\frac{1}{4}A^2B^2(U-V)^4+AB(U-V)^2(\alpha B-\beta A)X+(\alpha B-\beta A)^2X^2$*, d'où l'on tire $RDQ(A+B)=\frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)X}{X}$. Subſtituant ces valeurs de $DQ(A+B)$, & de $RDQ(A+B)$, dans les expreſſions du temps $t=\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}C+Arc\,ſin\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}\right)$; . . . . . & $t=\left(\frac{2AB}{DQ(A+B)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(C+2Arc\,ſin\frac{\alpha B-\beta A}{RDQ(A+B)}\right)$, elles deviendront . . . . $t=\left(\frac{2ABX^2}{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+2(\alpha B-\beta A)X}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}C+Arc\,ſin\frac{(\alpha B-\beta A)X}{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)X}\right)$: & $t=\left(\frac{2ABX^2}{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+2(\alpha B-\beta A)X}\right)^{\frac{1}{2}}\left(C+2Arc\,ſin\frac{(\alpha B-\beta A)X}{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)X}\right)$.

COROLLAIRE XI.

(335.) Si l'on avoit $\alpha=0$ & $\beta=0$, le temps dans lequel ſe forme la plus grande impreſſion, ſeroit $t=\left(\frac{4X^2}{(U-V)^2}\right)^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{2}C=\frac{CX}{U-V}$.

SCOLIE.

(336.) Soit, par exemple, la viteſſe reſpective $U-V$, avec laquelle ſe choquent deux corps ſphériques, d'un pied par ſeconde. Puiſque $C=3{,}14$, on aura $t=3{,}14.X$: & ſi l'on ſuppoſe que la profondeur de l'impreſſion faite en eux pendant le choc, ſoit de $\frac{1}{144}$ de pied, ou d'un peu moins d'une demi-ligne, t ſera $=\frac{1}{144}$ de ſeconde $=36^{tv}$; temps véritablement beaucoup trop court pour qu'il puiſſe jamais être ſenſible. Si la dureté des deux corps étoit plus grande, l'impreſſion ſeroit alors moins profonde, & par conſéquent le temps plus court; enſorte que ſi la dureté étoit preſque infinie, le temps ſeroit preſque infiniment petit.

COROLLAIRE XII.

(337.) Si les corps agiſſoient ſeulement par la preſſion, c'eſt-à-dire, ſeulement par l'action des puiſſances, on auroit $U=0$ & $V=0$, ou $U-V=0$; ce qui réduit le temps dans lequel ſe forme la plus grande impreſſion, à $t=\left(\frac{ABX}{\alpha B-\beta A}\right)^{\frac{1}{2}}.C$**. Si, outre cela, on avoit $B=\infty$,

* Il eſt très-aiſé de voir qu'on trouve cette expreſſion, en mettant dans le ſecond membre de la précédente, pour $DQ(A+B)$ ſa valeur, & en réduiſant le tout en fraction.

** Car cette expreſſion devient $t=\left(\frac{ABX}{\alpha B-\beta A}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}C+Arc\,ſin\,(1)\right)=\left(\frac{ABX}{\alpha B-\beta A}\right)^{\frac{1}{2}}.C$, puiſque $Arc\,ſin\,(1)=\frac{1}{2}C$.

Digitized by Google

cette expreſſion ſe réduiroit à $t=(\frac{AX}{a})^{\frac{1}{2}}\cdot C$. Mais, dans les corps graves, on a (52.) $A=\frac{1}{17}a$; donc $t=(\frac{1}{17}X)^{\frac{1}{2}}C$. Si donc on ſuppoſe qu'un corps poſé ſur un autre, fait une impreſſion dont la profondeur eſt de $\frac{1}{19,7192_{\text{m}}}$*, ou d'un peu plus de $\frac{1}{10}$ de ligne $=\frac{1}{144\cdot 2\cdot 3,14\cdot 3,14}$ de pied, le temps dans lequel ſe formera la plus grande impreſſion ſera $=(\frac{1}{32\cdot 2\cdot 144\cdot 3,14\cdot 3,14})^{\frac{1}{2}}\cdot 3,14=(\frac{1}{8\cdot 12})$de ſeconde, $=37^{\text{iv}}\frac{1}{2}$.

Corollaire XIII.

(338.) Si $B=\infty$, & $V=0$, l'expreſſion du temps dans lequel ſe formera la plus grande impreſſion, ſera . . . . . $t=(\frac{2AX^2}{\frac{1}{2}AU^2+aX})^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}C+Arc\,\text{ſin}\,\frac{aX}{\frac{1}{2}AU^2+aX})$: ou, s'il s'agit des corps graves dans leſquels $A=\frac{1}{17}a$, & $\frac{1}{2}AU^2=ae$ (46.), e exprimant la hauteur d'où doit tomber le corps pour acquérir la viteſſe U, on aura $t=(\frac{X^2}{16(e+2X)})^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}C+Arc\,\text{ſin}\,\frac{X}{e+X})$.

Corollaire XIV.

(339.) Si X étoit ſuſceptible d'être négligée à l'égard de e, cette expreſſion du temps ſe réduiroit à $t=\frac{CX}{8\sqrt{e}}$. Si donc un corps de fer faiſoit, en tombant ſur une enclume, une impreſſion dont la profondeur fût de $\frac{1}{100}$ de pied, ou d'un peu moins d'une demi-ligne, le temps qu'il emploiroit à faire cette impreſſion, ſeroit $t=\frac{1}{800\sqrt{e}}$: de ſorte que ſi ce corps étoit tombé de 36 pieds de hauteur, on auroit $t=\frac{1}{4800}=45^{\text{v}}$.

Corollaire XV.

(340.) On peut trouver de la même maniere les temps dans leſquels ſe forment les plus grandes impreſſions, dans la ſuppoſition de $\zeta=0$, & $d\zeta=0$; c'eſt-à-dire, dans le cas où l'un des corps ſeroit infiniment dur par rapport à l'autre; car, par ce qui a été dit (322.), l'expreſſion donnée, *Art.* 334, ſe réduit, pour ce cas, à $t=(\frac{ABX^2}{AB(U-V)^2+2(aB-\beta A)X})^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}C+Arc\,\text{ſin}\,\frac{(aB-\beta A)X}{AB(U-V)^2+(aB-\beta A)X})$. Il en ſera de même pour tout autre cas, en intégrant l'expreſſion générale donnée dans l'*Art.* 319.

* Le dénominateur de cette fraction eſt le double du quarré de 3,14; c'eſt-à-dire qu'il eſt $=2\cdot 3,14\cdot 3,14$.

Digitized by Google

PLANC. I.

PROPOSITION XLV.

(341.) *Trouver le temps de la durée du choc, dans le cas où la force de percuſſion π ſeroit conſtante.*

Ayant trouvé ci-deſſus (269.) $(\alpha B-\beta A-\pi(A+B))dt=AB(du-dv)$: en intégrant cette équation (260, *note.*), & diviſant par $\alpha B-\beta A-\pi(A+B)$, il en réſultera $t=\frac{AB((u-v)-(U-V))}{\alpha B-\beta A-\pi(A+B)}$.

COROLLAIRE I.

(342.) Dans le cas de la plus grande impreſſion, on aura... $t=\frac{-AB(U-V)}{\alpha B-\beta A-\pi(A+B)}=\frac{AB(U-V)}{\pi(A+B)-(\alpha B-\beta A)}$.

COROLLAIRE II.

(343.) Si l'on avoit $V=0$, & $B=\infty$, il en réſulteroit $t=\frac{A(u-U)}{\alpha-\pi}$; & dans le cas de la plus grande impreſſion, $t=\frac{AU}{\pi-\alpha}$.

PROPOSITION XLVI.

(344.) *Trouver le centre de percuſſion.*

Suppoſons le corps diviſé en un nombre infini de petits corps, ou conſidérons-le comme un ſyſtême compoſé d'un nombre infini de petits corps A, B, C, &c. liés entre eux, lequel tourne ſur un axe quelconque donné & fixe E, avec une viteſſe angulaire déterminée. Suppoſons encore qu'à chacun des petits corps A, B, C, &c., il y ait une puiſſance α, β, γ, &c. qui retarde ſon mouvement, & que toutes ces puiſſances agiſſent ſuivant des directions paralleles DA, FB, GC, &c. Soit de plus P la diſtance de l'axe au plan parallele au plan directeur qui paſſe par le centre de gravité; u la viteſſe que perdroit ce centre; A', B', C', &c. les diſtances EA, EB, EC, &c. de chacun des corps A, B, C, &c. à l'axe; & δ, ϵ, ξ, &c., les angles EAD, EBF, ECG, que ces diſtances forment avec les directions ſuivant leſquelles les puiſſances agiſſent. FIG. 26.

Cela poſé, nous aurons $P:u::A':\frac{A'u}{P}$, viteſſe que perdra le corps A dans le ſens de la perpendiculaire à EA : par la même raiſon, $\frac{B'u}{P}$ & $\frac{C'u}{P}$, &c. ſeront celles que perdront les autres corps ſelon les perpendiculaires à EB, EC, &c. ; & par conſéquent $\frac{A'u}{P\,\text{ſin}\,\delta}$, $\frac{B'u}{P\,\text{ſin}\,\epsilon}$, $\frac{C'u}{P\,\text{ſin}\,\xi}$, &c. ſont les viteſſes que doivent imprimer

Digitized by Google

les puissaces α, β, γ, *&c.*, pour qu'il en résulte les premieres *. Nous aurons donc (32.) $\alpha t = \frac{AA'u}{P \sin \delta}$, $\beta t = \frac{BB'u}{P \sin \epsilon}$, $\gamma t = \frac{CC'u}{P \sin \xi}$, *&c.* d'où l'on déduit $\alpha = \frac{AA'u}{Pt \sin \delta}$, $\beta = \frac{BB'u}{Pt \sin \epsilon}$, $\gamma = \frac{CC'u}{Pt \sin \xi}$, *&c.*

Supposons maintenant que x soit la distance de l'axe au plan parallele au plan directeur dans lequel se trouve le centre de percussion. Par cette supposition, $x - A' \sin \delta$, $x - B' \sin \epsilon$, $x - C' \sin \xi$, *&c.* seront les distances de chacunes des puissances à ce même plan; par conséquent les moments de chaque puissance, relativement au centre de percussion, seront $\frac{AA'u(x - A' \sin \delta)}{Pt \sin \delta}$, $\frac{BB'u(x - B' \sin \epsilon)}{Pt \sin \epsilon}$, $\frac{CC'u(x - C' \sin \xi)}{Pt \sin \xi}$, *&c.*: & pour qu'il n'y ait point de rotation sur ce centre, il faut (138.) que la somme de ces moments soit égale à zéro; ou en divisant par $\frac{u}{Pt}$, il faut qu'on ait $\frac{AA'(x - A' \sin \delta)}{\sin \delta} + \ldots\ldots$ $\frac{BB'(x - B' \sin \epsilon)}{\sin \epsilon} + \frac{CC'(x - C' \sin \xi}{\sin \xi} +$ *&c.* $= 0$; d'où l'on tire $\ldots\ldots$ $\frac{AA'x}{\sin \delta} + \frac{BB'x}{\sin \epsilon} + \frac{CC'x}{\sin \xi} +$ *&c.* $= AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 +$ *&c.*; & par conséquent $x = \frac{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 + \&c.}{\frac{AA'}{\sin \delta} + \frac{BB'}{\sin \epsilon} + \frac{CC'}{\sin \xi} + \&c.}$, distance du centre de percussion au plan directeur qui coïncide avec l'axe.

Corollaire I.

(345.) Le dénominateur $\frac{AA'}{\sin \delta} + \frac{BB'}{\sin \epsilon} + \frac{CC'}{\sin \xi} +$ *&c.* est comme la somme des puissances $\alpha = \frac{AA'u}{Pt \sin \delta}$, $\beta = \frac{BB'u}{Pt \sin \epsilon}$, *&c.*, & le numérateur est comme la somme de leurs moments: donc x sera la distance de l'axe au centre desdites puissances, & par conséquent (104 & 154.) une puissance égale à la somme de toutes les autres, placée au centre de percussion fera le même effet: ensorte que s'il y avoit un obstacle placé au point où se trouve le centre de percussion, la percussion se feroit entiérement sur lui, & l'équilibre requis auroit lieu.

Corollaire II.

(346.) Si le corps qui tourne étoit un plan coïncidant avec l'axe,

* Car la viteſſe que peut produire la puiſſance α, qui tend à retarder le mouvement du corps A ſuivant la direction DA (75 & 129, *premiere note*), eſt à la viteſſe perpendiculaire à EA qui en réſulte :: 1 : $\sin \delta$. Or cette viteſſe perdue perpendiculairement à EA, eſt $\frac{A'u}{t}$: donc celle que doit imprimer la puiſſance α, pour que celle-ci ait lieu $= \frac{AA'u}{P \sin \delta}$; & ainſi des autres.

Digitized by Google

PLANC. I. on auroit $\sin \delta = \sin \epsilon = \sin \xi = \&c.$; & par conséquent . . . . . $x = \frac{\sin \delta (AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 + \&c.}{AA' + BB' + CC' + \&c.}$, ou $\frac{x}{\sin \delta} = \frac{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 + \&c.}{AA' + BB' + CC' + \&c.} = (157.)$ $\frac{S}{PM}$, P exprimant la distance de l'axe au centre des masses : donc, dans ce cas (189.), le centre de percussion & celui d'oscillation sont à la même distance de l'axe *.

COROLLAIRE III.

(347.) Si on suppose l'axe à une distance infinie, ce qui est la même chose que de supposer que le corps ne tourne point, comme il arrive dans les corps qui tombent par la seule action de la gravité ; dans ce cas les deux centres coïncideront ensemble, & avec le centre de gravité : car, dans cette supposition, tous les angles δ, ϵ, ξ, &c. sont égaux, & ce cas se réduit à celui qui est donné dans le Corollaire précédent **.

COROLLAIRE IV.

(348.) Dans tout autre cas où les angles δ, ϵ, ξ, &c. ne seroient pas égaux, on n'auroit pas $PM = \frac{AA'}{\sin \delta} + \frac{BB'}{\sin \epsilon} + \frac{CC'}{\sin \xi} + \&c.$ Donc les deux centres d'oscillation & de percussion ne seroient pas alors à la même distance de l'axe.

COROLLAIRE V.

(349.) Si le corps, au lieu de choquer l'obstacle par son centre de percussion, le choquoit dans un point plus proche de l'axe ; comme si le levier EB, au lieu de choquer l'obstacle par le point F, où l'on suppose qu'est le centre de percussion, le choquoit par le point A ; dans ce cas l'obstacle ne souffriroit que la percussion résultante des moments d'inertie de EA, & autant de la partie AB. L'excès des
FIG. 27. moments de la partie AB sera supporté entiérement par les fibres du levier, de la maniere que nous l'avons expliqué (208.), avec cette seule différence que, dans l'endroit cité, il ne s'agit que de

* Il faut faire attention que $\frac{x}{\sin \delta}$ est la distance du centre de percussion à l'axe fixe, puisque cette distance est l'hypothénuse d'un triangle rectangle, dont un des angles $= \delta$, & le côté opposé à cet angle $= x$. Donc $\sin \delta : 1 :: x : \frac{x}{\sin \delta}$.

** D'ailleurs ceci se déduit immédiatement de la formule ; car, dans le cas présent, toutes les distances étant $= A'$, le numérateur & le dénominateur peuvent se diviser par A' : par conséquent la formule se réduit à celle qu'on a trouvée (96.) pour la distance du centre de gravité à un axe quelconque. On voit encore que tous les angles δ, ϵ, ξ sont égaux ; car les lignes AE, BE, CF sont censées paralleles.

l'effet

l'effet d'une ſeule preſſion, au lieu qu'il s'agit ici de celui d'une percuſſion qui, ſelon les circonſtances, peut être beaucoup plus grande, comme on l'a déjà vu. PLANC. A.

SCOLIE.

(350.) Tous les Auteurs (1) qui ont traité cette matiere, ont enſeigné, juſqu'à préſent, que les centres d'oſcillation & de percuſſion ſont toujours les mêmes. Il faut cependant en excepter *Jean Bernoulli*, qui a donné quelques idées qui annoncent qu'il penſoit que cette propoſition pouvoit n'être pas généralement vraie.

Pour être abſolument convaincu ſur ce point, il ſuffit de conſidérer que le centre d'oſcillation d'un triangle iſocelle, qui tourne latéralement autour de ſon ſommet, eſt éloigné de ce ſommet de la quantité $\frac{3}{4}a+\frac{b^2}{4a}$, a marquant la hauteur du triangle, & b ſa baſe, tandis que le centre de percuſſion en eſt ſeulement éloigné de $\frac{3}{4}a$*.

---

(1) *Chriſtiani Wolfii Elementa Matheſeos*, Tom. I. *Elementa Mechanicæ*, Ch. XII, Theor. LXXXI.

Analyſe des infiniment petits, par M. Stone, Sect. VII.

Phyſices Elementa Mathematica, par le Dr. 'sGraveſande, T. I, L 2, Ch. 5, N°. 1080.

Johannis Bernoulli opera omnia, Tom. 4. *Remarques ſur l'Analyſe des infiniment petits.*

* La formule pour trouver la diſtance du centre d'oſcillation d'un corps quelconque à l'axe fixe, eſt $\frac{S}{PM}$ (189.), S marquant la ſomme des moments d'inertie; c'eſt-à-dire, la ſomme des produits de chaque particule du corps par le quarré de ſa diſtance à l'axe fixe: P la diſtance du centre de gravité du corps au même axe; & M la maſſe du corps. Pour appliquer cette formule à l'exemple que l'Auteur propoſe, ſoit le triangle iſocelle ABC, tournant latéralement autour de ſon ſommet, c'eſt-à-dire, autour d'un axe qui paſſant par ſon ſommet, eſt perpendiculaire à ſon plan; & ſoit nommé a la hauteur BD de ce triangle, & b ſa baſe AC. Pour trouver S, je conſidere que le moment d'inertie d'une particule quelconque m de ce triangle, c'eſt-à-dire, de la différencielle dM de ſa maſſe, eſt $=dM.mB^2$, & par conſéquent $\int dM.mB^2=S$. Maintenant, ſi, par l'axe fixe, on conçoit deux plans EF, BD perpendiculaires entre eux, & ſi de chaque point m de la maſſe du corps, ou, dans le cas préſent, de la ſurface du triangle, on abaiſſe des perpendiculaires mt, mr ſur chacun de ces deux plans, il eſt évident que $mB^2=mr^2+mt^2=mt^2+rB^2$, & que $dM.mB^2=dM.mr^2+dM.rB^2$, & par conſéquent $S=\int dM.mr^2+\int dM.rB^2$; c'eſt-à-dire que, pour avoir S, il faut prendre la ſomme de tous les moments d'inertie par rapport au plan, ou à l'axe BD, plus, la ſomme des mêmes moments par rapport au plan, ou à l'axe EF perpendiculaire à BD. FIG. 3.

Pour trouver la premiere ſomme de moments, ſoit mené deux lignes infiniment voiſines gh, ik, paralleles à BD, ſoit fait $ik=y$, & $kD=x$: alors $hk=dx$, & ydx repréſentera la ſomme de toutes les particules dM compriſes dans l'eſpace différencié $gh\,ik$, & par conſéquent $x^2.ydx$ ſera la ſomme de leurs moments d'inertie; & en intégrant, $\int x^2.ydx$ ſera la ſomme des moments d'inertie du triangle rectangle ADB. Les triangles ſemblables Aki & ADB donnent $AD:BD::Ak:ki=\frac{BD.Ak}{AD}$. Subſtituant à la place de ces lignes leurs valeurs algébriques, on a ki, ou $y=a-\frac{2ax}{b}$, & par conſéquent $\int x^2.ydx=\int\left(ax^2dx-\frac{2ax^3dx}{b}\right)=\frac{ax^3}{3}-\frac{ax^4}{4b}$. Cette intégrale ſe réduiſant à zéro, lorſque $x=0$, il n'y a point de conſtante à

Ainſi on voit que ſi b eſt plus grand que a, le centre d'oſcillation tombe hors du triangle, & que par conſéquent il eſt impoſſible qu'il

---

ajouter ; faiſant donc $x=\frac{1}{2}b$, afin d'avoir tous les moments du triangle ALB, on a $\frac{ab^3}{96}$ pour la ſomme des momens d'inertie de ce triangle.

Si dans la même expreſſion on fait $x=-\frac{1}{2}b$, il eſt évident qu'on aura la ſomme des moments d'inertie du ſecond triangle DBC, & cette ſomme ſera $=-\frac{2ab^3}{96}$. Cette derniere ſomme étant retranchée de la précédente, puiſqu'elle appartient à un corps ſitué de l'autre côté de l'axe BD, on aura la ſomme totale des moments du triangle ABC par rapport à l'axe BD, ou $\int dM.mr^2=\frac{ab^3}{12}$.

Pour avoir maintenant la même ſomme par rapport au plan, ou à l'axe EF, je mene les lignes qf, ps infiniment proches, je fais $qf=y'$, $BO=x'$, en conſéquence la ſomme des particules comprifes dans l'eſpace différentiel $pqfs$ ſera $=y'dx'$; & $x'^2.y'dx'$ ſera la ſomme des moments d'inertie de toutes les particules compriſes dans cet eſpace ; & l'intégrale $\int x'^2.y'dx'$ ſera la ſomme des moments d'inertie pour tout le triangle ABC. Les paralleles AC, qf, donnent $BD:BO::AC:qf$, ou $a.x'::b:y'=\frac{bx'}{a}$; ſubſtituant cette valeur de y' dans l'expreſſion précédente, elle devient $\int\frac{bx'^3dx'}{a}=\frac{bx'^4}{4a}$. Faiſant $x'=a$, on a $\frac{ba^3}{4}$, pour la ſomme des moments d'inertie de tout le triangle ABC, par rapport au plan, ou à l'axe EF, ou $\int dM.rB^2=\frac{ba^3}{4}$. Ajoutant donc cette ſomme de moments avec la précédente, on a $S=\frac{ba^3}{4}+\frac{ab^3}{12}=\frac{3ba^3+ab^3}{12}$.

Chacun ſçait que $P=\frac{1}{2}a$; on peut d'ailleurs le déduire aiſément de ce qui a été dit dans l'*Art.* 124. $M=\frac{1}{2}ab$; ainſi $PM=\frac{a^2b}{3}=\frac{4a^2b}{12}$. Donc $\frac{S}{PM}=\frac{3b.a^2+ab^2}{4a^2b}=\frac{1}{4}a+\frac{b}{4a}$; quantité que l'Auteur donne pour la diſtance du centre d'oſcillation du triangle iſocelle ABC à l'axe fixe.

On trouvera, par des procédés abſolument ſemblables, que la diſtance du centre de percuſſion au ſommet du triangle eſt de $\frac{1}{2}a$, lorſque la percuſſion eſt un *maximum* ; ce qui juſtifie la remarque de notre Auteur. On voit combien il eſt important, dans la recherche de ces ſortes de centres de diſtinguer les plans mus, ou balancés, ſur un axe qui leur eſt parallele, de ceux qui ſont mus ou balancés, ſur un axe qui leur eſt perpendiculaire, *in situ*, comme dit *Huygens*. Si l'on avoit cherché le centre d'oſcillation du triangle autour d'un axe parallele à ſon plan, tel que l'axe EF, le centre d'oſcillation auroit été confondu avec celui de percuſſion (346.) ; car alors $S=\frac{ba^3}{4}$ & $\frac{S}{PM}=\frac{1}{4}a$. On remarquera, en paſſant, que *Deſcartes* avoit, long-temps auparavant *Huygens*, diſtingué ces deux ſortes d'oſcillations. Voyez *ſes Lettres* 85, 86 *& ſuiv. Tome III.*

La principale, & même la ſeule difficulté de ces ſortes de recherches, conſiſte à trouver la ſomme des moments d'inertie. Or cette détermination devient très-aiſée, lorſque la nature du corps peut être exprimée par des équations. Il faut toujours ſuivre un procédé analogue à celui que nous venons d'expoſer. Les deux formules $fx^2.ydx$, & $fx'^2.y'dx'$ ſont générales pour tous ces corps, en faiſant attention que y & y' ne repréſentent pas des lignes, lorſqu'il s'agit des ſolides, mais les ſurfaces produites par les plans ik, qf paralleles aux plans perpendiculaires ED, EB, qui paſſent par l'axe de rotation, & que x & x' ſont les diſtances de ces ſurfaces aux mêmes plans. Appellant donc Y & Y' ces ſurfaces, les formules générales ſeront $fxxYdx$ & $fx'x'Y'dx'$. Si le corps n'eſt pas ſuſceptible d'être exprimé par des équations, on pourra le diviſer en parties, comme des pyramides, des parallélipipedes, &c. & chercher ſéparément la ſomme des moments d'inertie de chaque partie ; la réunion de ces différentes ſommes ſera la valeur de S. On remarquera encore que le calcul ne donne pour S qu'une quantité relative au volume, & non à la maſſe du corps : ainſi lorſqu'il s'agira de comparer enſemble pluſieurs mouvements de rotation de corps d'une denſité différente, il faudra multiplier la valeur de S trouvée pour chaque corps par la denſité de ce corps, qui eſt toujours relative à celle d'un autre corps (12.)

Digitized by Google

coïncide avec le centre de percussion ; puisque le triangle ne peut toucher, & par conséquent choquer un obstacle, par un point qui est hors de lui-même. Si nous réduisons le triangle à une moindre hauteur, relativement à sa base, à mesure que cette hauteur diminuera, le centre d'oscillation s'éloignera de plus en plus de l'axe ; tandis que ce sera le contraire du centre de percussion : ensorte que, si la hauteur du triangle devenoit infiniment petite, le centre d'oscillation seroit à une distance infinie de l'axe, tandis que le centre de percussion resteroit toujours à $\frac{1}{4}a$, & par conséquent dans la disposition qui convient pour l'équilibre des moments autour du point où se fait le choc. PLANC. I.

CHAPITRE VII.

Du Mouvement des Corps posés sur des surfaces.

(351.) Nous ferons abstraction, dans ce Chapitre, des impressions qui doivent se former dans les corps, par l'action des puissances qui les compriment, afin que les calculs soient, pour ce moment, plus faciles. Nous supposerons, pour la même raison, que les corps sont également denses, & que les puissances sont appliquées à leurs centres de gravité.

PROPOSITION XLVII.

(352.) *Trouver les espaces que parcourent deux spheres poussées par une puissance.*

Si deux spheres A & B se touchent en D, & que l'une A soit poussée dans la direction AC par la puissance α appliquée à son centre de gravité A, cette sphere ne tournera point (138.), & la puissance α peut être décomposée en deux autres, l'une qui agisse suivant la tangente DE, & l'autre suivant la perpendiculaire AD qui passe par les centres des deux spheres A & B. Nommant Σ l'angle DAE, la puissance qui agit suivant DE sera $= \alpha \sin \Sigma$, & celle qui agit suivant $AD = \alpha \cos \Sigma$. En vertu de cette puissance, dont la direction passe par les centres A & B, la sphere A doit se mouvoir dans la direction AD ; mais elle ne peut le faire sans pousser l'autre sphere B dans la même direction, laquelle passant par son centre B, ne produira, dans cette sphere, aucun mouvement de rotation, mais seulement un mouvement dans la même direction. Les deux spheres suivront donc précisément la direction AB, en vertu FIG. 28.

Digitized by Google

PLANC. I. de la puiſſance $\alpha \, cof \, \Sigma$, ſans pouvoir ſe déranger d'aucun côté, & doivent parcourir l'une & l'autre l'eſpace différenciel $\frac{dtfdt\alpha \, cof \, \Sigma}{A+B}$ (35.). Quant à l'autre puiſſance $\alpha \, ſin \, \Sigma$, elle ne peut agir que ſur la ſphere A, à cauſe de ſa direction parallele à la tangente DE, ſuivant laquelle elle ne peut avoir d'action ſur la ſphere B. Donc l'eſpace différenciel que parcourra le centre de gravité de la ſphere A, ſuivant cette direction, ſera $= \frac{dtfadt \, ſin \, \Sigma}{A}$.

COROLLAIRE I.

FIG. 29. (353.) Si la ſphere B eſt d'une grandeur infinie, ſa ſurface dans le point du contact coïncide avec le plan tangent DE: dans ce cas, l'eſpace différenciel que parcourront les centres de gravité des deux ſpheres, ſuivant la perpendiculaire AD, ſera, comme auparavant, $\frac{dtfadt \, cof \, \Sigma}{A+B}$; & celui que parcourra la ſphere A, ſuivant la direction de la tangente, ou du plan DE, ſera $= \frac{dtfadt \, ſin \, \Sigma}{A}$.

COROLLAIRE II.

(354.) Si l'on ſuppoſe la ſphere B, non-ſeulement d'une grandeur infinie, mais encore d'une quantité de matiere, ou d'une maſſe infinie, l'eſpace parcouru par ſon centre de gravité ſera $\frac{dtfdt\alpha \, cof \, \Sigma}{A+\infty} = 0$; d'où l'on voit que, dans ce cas, la ſurface de la ſphere B, ou le plan tangent DE demeurera immobile; la ſphere A n'aura de même aucun mouvement ſuivant la direction AD, & il lui reſtera ſeulement le mouvement ſuivant la tangente, lequel lui fera parcourir l'eſpace différenciel $= \frac{dtfadt \, ſin \, \Sigma}{A}$.

COROLLAIRE III.

(355.) Suppoſant que la ſphere A étant poſée ſur une ſurface quelconque immobile, plane, ou courbe BC, ſoit animée par la puiſſance α, appliquée à ſon centre de gravité, & agiſſant ſuivant la
PLANC. II. FIG. 30. direction EA; ſi l'on mene la tangente, ou le plan tangent FG par le point de contact C, on peut ſuppoſer que ce plan eſt la ſurface d'une ſphere infinie en grandeur & en maſſe, ſur laquelle eſt poſée l'autre ſphere A: par conſéquent cette derniere ſphere n'aura d'autre mouvement que celui ſuivant la tangente FG, en vertu de la puiſſance $\alpha \, ſin \, \Sigma$, Σ exprimant l'angle AEH que forme la direction EA, avec la perpendiculaire EH à la tangente.

Digitized by Google

Corollaire IV.

(356.) On démontrera la même chose de tout autre point de la surface courbe sur laquelle se trouve la sphere. Ainsi, prenant le point B de la courbe pour l'origine, & les abscisses x sur la ligne BL parallele à la direction EA; & nommant a la longueur de la courbe BC, on aura $CM = dx$; $CN = da$, & le sinus de l'angle $AEH = CNM = \sin \Sigma = \frac{dx}{da}$; d'où il suit que la puissance qui anime la sphere A, suivant la direction de la tangente dans tous les points de la surface courbe sur laquelle elle est posée, ou suivant les espaces différenciels sur lesquels elle se trouve, sera $= \frac{adx}{da}$.

Corollaire V.

(357.) Supposons que u soit la vîtesse qu'acquiert la sphere dans un point quelconque de la surface; nous aurons (19.) $\frac{adxdt}{Ada} = du$; mais (29.) $u = \frac{ds}{dt}$: donc, en multipliant les deux équations, on aura $\frac{adx}{A} = udu$, & en intégrant $u^2 - U^2 = \frac{2\int adx}{A}$; ou $u^2 = \frac{2\int adx}{A} + U^2$. U marquant la vîtesse qu'avoit la sphere à l'origine B.

Corollaire VI.

(358.) Si a est constante, comme l'est la gravité à de petites distances de la surface de la terre, on aura $u^2 = \frac{2ax}{A} + U^2$; ou, en substituant la valeur de $a = 32A$ (52.), $u^2 = 64x + U^2$: c'est-à-dire que les vîtesses avec lesquelles les corps graves tombent le long des surfaces, ne dépendent en aucune maniere de la nature de ces surfaces, de leur plus ou moins grande courbure, ni de leur plus ou moins grande inclinaison par rapport à l'horison, mais seulement de la hauteur x d'où ils tombent, & de la vîtesse initiale U, avec laquelle ils commencent leur chûte.

Corollaire VII.

(359.) Si cette vîtesse primitive U étoit zéro, ou si la sphere commençoit à tomber depuis le repos, on auroit, dans ce cas, $u^2 = 64x$, ou $u = 8\sqrt{x}$, comme on l'a vu, *Art.* 52.

Corollaire VIII.

(360.) Si B étant l'origine, la sphere, ou le corps grave, avoit à descendre le long de différentes surfaces planes ou courbes,

Digitized by Google

PLANC. II. FIG. 31. BL, BC, BD, BE, avec la même viteſſe initiale; la viteſſe qu'auroit ce corps en arrivant à l'horiſontale LE, ſeroit toujours la même, & dans tous les cas $= \sqrt{64x + U^2}$; ou, lorſque $U = 0$, $= 8\sqrt{x} = 8\sqrt{BL}$.

COROLLAIRE IX.

(361.) Si la ſphere avoit à parcourir le plan DE, l'angle DBE FIG. 31. étant droit, on auroit $\frac{dx}{da} = \frac{DB}{DE}$; & l'équation $\frac{adxdt}{Ada} = du$ ſe réduiroit à $\frac{a.dt.DB}{A.DE} = du$; & en intégrant, dans le cas des corps graves, à $\frac{32t.DB}{DE} = u - U$: enſorte que les différences des viteſſes qu'acquerra la ſphere dans ſa chûte par le plan DE, ſur ſa viteſſe initiale, BE étant horiſontale, ſeront en raiſon compoſée du temps, & de la quantité $\frac{DB}{DE}$, ou du ſinus de l'angle DEB que forme le plan avec l'horiſontale.

COROLLAIRE X.

(362.) Si l'on ſubſtitue dans l'équation $u = \frac{da}{dt}$, ou $udt = da$, la valeur de u trouvée ci-deſſus (357.), qui eſt $u = \left(\frac{2\int adx}{A} + U^2\right)^{\frac{1}{2}}$, on aura $da = dt\left(\frac{2\int adx}{A} + U^2\right)^{\frac{1}{2}}$; ou ſi l'on ſuppoſe $U = 0$, $da = dt\left(\frac{2\int adx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$. Et l'on trouve enſuite pour les corps graves, qui tombent librement depuis le repos, $da = 8dt\sqrt{x}$; & s'ils tomboient par le plan DE, comme dans ce cas, $\frac{DB}{DE} = \frac{x}{a}$, ou $x = \frac{a.DB}{DE}$, on auroit $\frac{da}{\sqrt{a}} = 8dt\left(\frac{DB}{DE}\right)^{\frac{1}{2}}$; d'où l'on tire, en intégrant, $2\sqrt{a} = 8t\left(\frac{DB}{DE}\right)^{\frac{1}{2}}$, ce qui donne $a = \frac{16t^2.DB}{DE}$; c'eſt-à-dire que les eſpaces parcourus par un corps grave qui deſcend, depuis le repos, ſur un plan incliné, ſont en raiſon compoſée des quarrés des temps, & de la quantité $\frac{DB}{DE}$, ou du ſinus de l'angle DEB que forme le plan avec l'horiſon.

COROLLAIRE XI.

(363.) De l'équation précedente $da = dt\left(\frac{2\int adt}{A} + U^2\right)^{\frac{1}{2}}$ on déduit auſſi $dt = \frac{da}{\left(\frac{2\int adx}{A} + U^2\right)^{\frac{1}{2}}}$; ou ſi l'on avoit $U = 0$, $dt = \frac{da}{\left(\frac{2\int adx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}}$, équation qui, dans le cas des corps graves, devient $dt = \frac{da}{8\sqrt{x}}$; & ſi c'eſt par

Digitized by Google

le plan *DE* que la sphere fait sa chûte, on aura $dt = \frac{ds}{8\sqrt{\frac{a.DB}{DE}}}$; & en intégrant, $t = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{a.DE}{DB}}$. PLANC. II.

COROLLAIRE XII.

(364.) Si la sphere, ou le corps pesant, tomboit librement, ou verticalement, on auroit $a = x$, & $dt = \frac{dx}{8\sqrt{x}}$; ou, en intégrant, $t = \frac{1}{4}\sqrt{x}$: c'est aussi ce qu'on a vu à *l'Art.* 52.

PROPOSITION XLVIII.

(365.) *Trouver la durée de la chûte des corps graves par la Cycloïde.* FIG. 33.

Supposons que ce soit la Cycloïde *DABE*, que la sphere, ou le corps grave, doit parcourir en tombant, *FHIE* étant son cercle générateur, dont $FE = D$ est le diametre. Soit *A* le point d'où le corps commence à tomber depuis le repos ; & soit enfin $FG = b$, & $GC = x$. Par la propriété de la Cycloïde, son arc $BE = 2IE$; c'est-à-dire que l'arc *BE* de la Cycloïde est égal à deux fois la corde *IE* de son cercle générateur *. Mais, par la propriété du cercle, on

* Chacun sçait que la *Cycloïde*, autrement dite *Trochoïde*, ou *Roulette*, est la courbe *DMBE*, décrite par un point *D* de la circonférence d'un cercle *DTS* qui roule sur une droite *DF*. Chaque clou des roues des voitures décrit en l'air une Cycloïde, lorsque la voiture se meut en roulant sur une même ligne. On voit, par cette génération, que la ligne *DF*, qui est la *demi-base* de la Cycloïde, est égale à la demi-circonférence du cercle générateur, puisque tous les points de la demi-circonférence *DBS* se sont appliqués sur la ligne *DF*, tandis que le point décrivant *D* a tracé la demi-Cycloïde *DMBF*. Le point *E* s'appelle le *point culminant*, & la ligne *FE* l'*axe* de la Cycloïde. On voit encore que, par différents points *M*, *B* de la courbe, on mene des ordonnées *MO*, *FC* perpendiculaires sur l'axe, les parties *MP*, *BI* de ces ordonnées comprises entre la Cycloïde & la circonférence du cercle générateur décrit sur l'axe comme diametre, sont respectivement égales aux arcs *EP*, *EI* compris entre le point culminant & ces ordonnées. Car si l'on suppose le cercle générateur *DTS* parvenu en *N*, dans la position *NMR*, le point décrivant *D* sera parvenu en *M*, tous les points de l'arc *NM* se seront appliqués sur *DN*, & l'on aura $DN = Arc\ NM = Arc\ FP$, par conséquent $FN = Arc\ EP$. Mais $FN = OQ = OP + PQ = QM + PQ = MP$: donc $MP = Arc\ EP$. On démontrera la même chose pour tous les autres points. Venons à la démonstration de la propriété dont notre Auteur fait usage. PLANC. A. FIG. 2.

Soit mené les deux ordonnées *BC*, *bc*, infiniment voisines, qui coupent la circonférence du cercle générateur aux points *I*, *i* ; par les points *I*, *I* soit abaissé sur *bc* les perpendiculaires *Bq*, *Ir*, & par le point *B* soit mené la parallele *Bs* au petit arc *Ii* ; les triangles *Iri*, *Bqb* pourront être regardés comme rectilignes, & l'espace *IiBs* sera un parallélogramme. Cela posé, si l'on fait le sinus verse de l'arc *EI*, sçavoir, $EC = x$, $CI = y$, $EF = D$; on aura $FC = D - x$, $Cc = Ir = Bq = dx$, $ri = qs = dy$, & l'équation du cercle générateur sera $yy = Dx - xx$. Par la nature de la Cycloïde nous venons de voir que $BI = Arc\ FI$, & que $bi = Arc\ Ii$; donc $bi - BI = Arc\ Ei - Arc\ EI$, ou $bi - Ii$, ou $sb = Ii$, & par conséquent $qb = qs + sb = ri + Ii = dy + Ii = dy + da$, en nommant *a* l'arc *EI*. Si, par le centre *L*, on mene le rayon *LI*, les triangles semblables *CLI*, *riI* donnent *IC*, ou $(Dx - xx)^{\frac{1}{2}} : IL$, ou $\frac{1}{2}D ::$

PLANC. II. FIG. 38.

a $IE = \sqrt{D(D-b-x)}$: donc l'arc $BE = 2\sqrt{D(D-b-x)}$; & sa différencielle $da = \frac{-dx\sqrt{D}}{\sqrt{D-b-x}}$, qui donne celle de l'arc $BA = da = \frac{dx\sqrt{D}}{\sqrt{D-b-x}}$ *. On aura donc, dans la Cycloïde (363.), lorsque le corps grave commence à tomber depuis le repos, $dt = \frac{dx\sqrt{D}}{8\sqrt{Dx-bx-x^2}}$: ou, en multipliant le numérateur & le dénominateur par $\frac{1}{2}(D-b)$, $dt = \frac{\sqrt{D}}{4(D-b)} \cdot \frac{\frac{1}{2}(D-b)dx}{\sqrt{Dx-bx-x^2}}$; & en intégrant $t = \frac{\sqrt{D}}{4(D-b)} \int \frac{\frac{1}{2}(D-b)dx}{\sqrt{Dx-bx-x^2}}$. Mais $\int \frac{\frac{1}{2}(D-b)dx}{\sqrt{Dx-bx-x^2}}$, est l'arc de cercle dont le diametre est $D-b = GE$, & x le sinus verse (*Voyez la premiere note de cet Article.*). Donc, si sur le diametre GE on décrit le cercle GKE, on aura l'*Arc* $GK = \int \frac{\frac{1}{2}(D-b)dx}{\sqrt{Dx-bx-x^2}}$; & par conséquent dans la Cycloïde on aura $t = \frac{\sqrt{D} \cdot (Arc\ GK)}{4(D-b)}$.

COROLLAIRE I.

(366.) Si le corps parcouroit dans sa chûte tout l'arc ABE, l'arc GK deviendroit le demi-cercle entier GKE, & $\frac{GKE}{D-b} = \frac{GKE}{GE}$, fera le rapport de la demi-circonférence au diametre. Appellant

---

Ir, ou $dx : Ii = da' = \frac{\frac{1}{2}Ddx}{(Dx-xx)^{\frac{1}{2}}}$; expression générale de l'élément d'un arc de cercle dont x est le sinus verse, & D le diametre. Substituant cette valeur de da' dans celle de bq, on aura $bq = dy + \frac{\frac{1}{2}Ddx}{(Dx-xx)^{\frac{1}{2}}}$; mais, en différenciant l'équation du cercle, on a $dy = \frac{\frac{1}{2}Ddx - xdx}{(Dx-xx)^{\frac{1}{2}}}$; donc $qb = \frac{\frac{1}{2}Ddx-xdx}{(Dx-xx)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\frac{1}{2}Ddx}{(Dx-xx)^{\frac{1}{2}}} = \frac{Ddx-xdx}{(Dx-xx)^{\frac{1}{2}}}$. Par la propriété du triangle rectangle $Bb^2 = Bq^2 + qb^2$; nommant donc a l'arc EB, & mettant à la place des lignes leurs valeurs algébriques, on a $da^2 = dx^2 + \frac{D^2dx^2 - 2Ddx^2 + x^2dx^2}{Dx-xx} = \frac{D^2dx^2 - Ddx^2}{Dx-xx} = \frac{Ddx^2}{x}$, en divisant le numérateur & le dénominateur par $D-x$. Donc $da = dx\sqrt{\frac{D}{x}}$; expression générale de l'élément d'un arc de Cycloïde, d'où l'on tire, en intégrant, $a = 2\sqrt{Dx}$: c'est la valeur de l'arc EB de la Cycloïde. Mais, par la propriété du cercle EF, ou $D : EI :: EI : CE$, ou x ; donc $EI^2 = Dx$, & $EI = \sqrt{Dx}$; donc l'arc BE est double de la corde EI.

Il suit de là, que la longueur de la demi Cycloïde DE est double du diametre EF du cercle générateur, ou que la longueur entiere de la Cycloïde est quadruple du diametre EF. Cette courbe qui a fixé l'attention des plus célebres Géometres, a une foule de très-belles propriétés, par exemple, la tangente qu'on menera par le point B, est toujours parallele à la corde EI, & l'aire de l'espace Cycloïdal compris entre la courbe & sa base, est triple de l'aire du cercle générateur, &c. &c. Nous n'entrerons point dans ces détails, qui ne sont pas immédiatement de notre objet. Nous nous contentons d'avoir démontré les propriétés sur lesquelles notre Auteur s'appuie, & dont il paroît supposer la connoissance à ses Lecteurs.

* La différencielle de l'arc BE est égale à celle de l'arc BA, à cette différence près, que la premiere est négative, & l'autre positive : car x ou GC augmentant, l'arc BE diminue de dx, & l'arc AB augmente de la même quantité da.

donc

donc C la circonférence du cercle dont le rayon eſt l'unité, on aura $\frac{GKE}{D-b} = \frac{\frac{1}{2}C}{2} = \frac{1}{4}C$; & le temps t employé à parcourir l'arc entier ABE de la Cycloïde, ſera $= \frac{C}{16}\sqrt{D}$.

Corollaire II.

(367.) Comme la quantité b qui détermine la poſition du point A, ne ſe trouve point dans cette expreſſion, il s'enſuit que, de quelque point de la Cycloïde que le corps commence à tomber, il emploira toujours le même temps $t = \frac{C\sqrt{D}}{16}$ pour parvenir en E.

Corollaire III.

(368.) Si deux corps tomboient dans le même temps, l'un par la Cycloïde, & l'autre librement, ou verticalement, on auroit (364.) $\frac{C\sqrt{D}}{16} = \frac{1}{4}\sqrt{x}$, ou $\frac{C\sqrt{D}}{4} = \sqrt{x}$, ce qui donne $x = \frac{C^2D}{16}$; c'eſt-à-dire que l'eſpace que parcourra un corps grave, en tombant librement, ou verticalement, pendant le même temps qu'un autre corps emploie dans ſa chûte par l'arc d'une Cycloïde, dont le diametre du cercle générateur eſt D, ſera $x = \frac{C^2D}{16}$.

Corollaire IV.

(369) Si les oſcillations d'un pendule ſont fort petites, les arcs décrits par le corps oſcillant coïncident avec des arcs de Cycloïde: en conſéquence, les demi-oſcillations d'un tel pendule ſe font dans le même temps que celui qu'un corps emploiroit à tomber par l'arc de la même Cycloïde; c'eſt-à-dire que ces demi-oſcillations ſe font dans le temps $\frac{C\sqrt{D}}{16}$; & les oſcillations entieres dans le temps $\frac{C\sqrt{D}}{8}$.

Corollaire V.

(370.) Si un corps tombe librement, ou verticalement, pendant le temps que le pendule emploie à faire une oſcillation, nous aurons $\frac{C\sqrt{D}}{8} = \frac{1}{4}\sqrt{x}$, ou $\frac{C\sqrt{D}}{2} = \sqrt{x}$, ce qui donne $x = \frac{C^2D}{4}$; c'eſt-à-dire que l'eſpace que parcourt un corps grave qui tombe librement, ou verticalement, pendant la durée d'une oſcillation entiere d'un pendule qui décrit des arcs coïncidants avec ceux d'une Cycloïde, dont le diametre du cercle générateur eſt exprimé par la quantité D, eſt $= \frac{C^2D}{4}$.

Digitized by Google

COROLLAIRE VI.

(371.) Soit l la longueur du pendule, ou $2l$ le diametre du cercle dont il décrit les arcs; il eſt clair que $\sqrt{2lx}$ ſera l'une quelconque de ſes cordes, en ſuppoſant que x repréſente la hauteur verticale CE, dont deſcend le pendule dans la demi-oſcillation. Mais, puiſque nous ſuppoſons les arcs de cercle décrits par le pendule, confondus avec ceux de la Cycloïde, cette corde eſt égale à celle de la Cycloïde, & de plus, égale à ſon arc correſpondant $BE = 2\sqrt{Dx}$; à cauſe qu'ils ſont l'un & l'autre infiniment petits. Donc $2\sqrt{Dx} = \sqrt{2lx}$, ce qui donne $D = \frac{1}{2}l$: cette valeur de D étant ſubſtituée dans l'équation $x = \frac{CD}{4}$ (370.) la réduit à $x = \frac{Cl}{8}$; c'eſt-à-dire que l'eſpace que parcourra librement, ou verticalement, un corps grave, pendant le temps qu'un pendule, dont la longueur $= l$, fait une petite oſcillation entiere, eſt $= \frac{Cl}{8}$.

COROLLAIRE VII.

(372.) Si dans l'équation $t = \frac{C}{16}\sqrt{D}$ (366.) on ſubſtitue la valeur de $D = \frac{1}{2}l$, on aura $t = \frac{C}{16}\sqrt{\frac{1}{2}l}$, ou en quarrant $t^2 = \frac{C^2 l}{16^2 \cdot 2}$; c'eſt-à-dire que les longueurs des pendules ſont entre elles comme les quarrés des durées de leurs oſcillations.

SCOLIE.

(373.) Le rapport de la circonférence au diametre, ou $\frac{C}{2}$ eſt $= 3{,}1416$ *&c.* : donc $\frac{C}{8}$ ſera $= 4{,}93482528$ *&c.*; ce qui donne l'eſpace que le corps parcourroit librement, ou verticalement, dans le temps que le pendule de la longueur l feroit une oſcillation entiere, c'eſt-à-dire, $x = l.4{,}9348$ *&c.*

La longueur du pendule ſimple qui bat les ſecondes au niveau de la mer, varie ſelon les différentes Latitudes des lieux. Sous l'équateur elle eſt à très-peu près de 439 lignes du pied de Paris, & ſous le pôle elle eſt à peu près de 442. Si nous prenons une longueur moyenne, elle ſera de 440 lignes, longueur qui eſt fort peu moindre que celle du pendule ſimple qui bat les ſecondes en Eſpagne, au bord de la mer, & nous aurons, pour l'eſpace que les corps parcourent en Eſpagne, en tombant librement, ou verticalement, pendant la premiere ſeconde de leur chûte, $\frac{440.49348}{10000}$ lig. du pied de Paris, ou 15 pieds, 0 p. 11 l. $\frac{3.13}{1000}$, ce qui fait 16 p. 0 p. 9 l. $\frac{31}{100}$ du pied anglais.

Digitized by Google

Sous l'équateur, où la longueur du pendule ſimple eſt de 439 lignes, les corps peſants parcourent, pendant la premiere ſeconde de leur chûte, 16 pieds 0 p. 3 l. $\frac{913}{1000}$, & ſous le pôle, 16 pieds 1 p. 7 l. $\frac{785}{1000}$; d'où l'on voit que la différence des eſpaces parcourus dans la chûte des corps graves pour les différentes latitudes, eſt extrêmement petite, puiſque, lorſqu'elle eſt la plus grande, elle n'excede pas un pouce 4 lignes: c'eſt pour cette raiſon que nous l'avons établie (57.) de 16 pieds juſte. Ce nombre étant quarré, eſt très-commode pour les calculs dont nous avons beſoin. * PLYNE. II.

PROPOSITION XLIX.

(374.) *Trouver les puiſſances perpendiculaire & parallele à la tangente, qui agiſſent ſur un corps quelconque placé ſur une ſurface.*

Soit A un corps quelconque placé ſur la ſurface BCG, & α la puiſſance qui agit ſur lui ſuivant la direction AD. On peut décompoſer cette puiſſance en deux autres, l'une ſuivant AC, qui aura pour expreſſion $\frac{AC.\alpha}{AD}$, & l'autre ſuivant la tangente FG, qui ſera exprimée par $\frac{CD.\alpha}{AD}$. La premiere de ces deux puiſſances $\frac{AC.\alpha}{AD}$ peut encore ſe décompoſer en deux autres, l'une ſuivant AH, ayant pour expreſſion $\frac{AH.\alpha}{AD}$, & l'autre ſuivant la tangente FG, exprimée par $\frac{HC.\alpha}{AD}$. Le plan FG ne pouvant détruire, ou empêcher, l'action des forces qui lui ſont paralleles, la ſomme $\frac{CD.\alpha}{AD} \pm \frac{HC.\alpha}{AD} = \frac{HD.\alpha}{AD}$ ſera la puiſſance qui agit ſur le corps ſuivant la direction de la tangente. Nom- FIG. 34 & 35.

* Cette différence dans la longueur du pendule qui bat les ſecondes par différentes Latitudes, vient de ce que la peſanteur varie à différentes diſtances du centre de la terre. La premiere obſervation de ce genre eſt due à M. *Richer*, qui étant allé à Cayenne en 1672 pour y faire des obſervations aſtronomiques, s'apperçut que le pendule à ſecondes qu'il avoit apporté de Paris, retardoit très-ſenſiblement: il fut obligé de remonter la lentille de 1 ligne $\frac{1}{4}$ pour lui faire battre de nouveau les ſecondes. Cayenne eſt par 4° 56′ de Latitude boréale. Il conjectura d'après l'examen des différentes cauſes qui pouvoient produire cet effet, que Cayenne étoit plus éloigné du centre de la terre que Paris, qu'en conſéquence la terre étoit applatie vers les pôle. Cette conjecture s'eſt complettement verifiée par les obſervations des Académiciens faites au pôle & à l'équateur. (*Voyez* la relation de leur voyage, & ſur-tout le *Traité de la figure de la Terre* par le celebre M. *Bouguer*, qui étoit un de ceux que l'Académie envoya au Pérou en 1735). *D. Georges Juan* étoit de cette entrepriſe, avec *D. Antonio de Ulloa*, & a publié une relation très-intéreſſante de ſes obſervations, intitulée: *Obſervaciones Aſtronomicas, &c.*).

D'après les obſervations de ce genre qui ont été répétées pluſieurs fois, il reſulte qu'à Quito (Latitude méridionale 0° 25). La longueur du pendule à ſeconde eſt de 438,83 lignes. A Portobello (Latitude boréale 9° 33′) de 439, 12. Au Petit Goave dans l'Iſle de Saint-Domingue, (18° 27′ Latitude boréale) 439,33. Au Caire (30° 2′ de Latitude boréale) 440,25. A Rome (41° 44′) 440,28. A Paris (48° 51′) 440,57. A Londres (51° 31′) 440,65 A Archangel (64° 35′) 441,13. A Pello (65° 48′) 441,17. Par 79° 50′ de Lat. bor. 441,38.

Digitized by Google

PLANC. II. mant donc, comme ci-devant, Σ l'angle que forme la direction AD avec la perpendiculaire AH à la tangente, cette puiſſance ſera auſſi $= \alpha \, \mathit{ſin}\, \Sigma$. L'autre puiſſance ſuivant la perpendiculaire AH, ſera $= \frac{HA.\alpha}{AD} = \alpha \, \mathit{coſ}\, \Sigma$.

COROLLAIRE I.

(375.) Puiſque la puiſſance qui anime le corps ſuivant la direction de la tangente, eſt la même que lorſque le corps eſt ſphérique, il s'enſuit que les propriétés qui concernent la viteſſe & l'eſpace parcouru par un corps quelconque placé ſur une ſuperficie plane ou courbe, ſeront les mêmes que celles qu'on a trouvées pour les corps ſphériques.

COROLLAIRE II.

(376.) En vertu de la puiſſance $\frac{AH.\alpha}{AD} = \alpha \, \mathit{coſ}\, \Sigma$, le corps doit tourner, l'angle giratoire étant $= \frac{\pm \, dt \mathit{ſ} CH . \alpha \, dt \, \mathit{coſ}\, \Sigma}{S}$; car la réaction de la puiſſance $\alpha \, \mathit{coſ}\, \Sigma$ dans le point C, eſt égale & contraire à cette puiſſance, & agit à la diſtance perpendiculaire $p = \pm CH$. Donc (142.) elle doit produire l'angle giratoire $= \frac{+ \, dt \mathit{ſ} CH . \alpha \, dt \, \mathit{coſ}\, \Sigma}{S}$, le ſigne $+$ étant pour le cas où le point H tombe du côté de D par rapport à C, & le ſigne $-$ pour celui où il tombe du côté oppoſé : dans le premier cas, le mouvement de rotation du corps ſe fera vers D; & dans le ſecond, il ſe fera du côté oppoſé.

COROLLAIRE III.

(377.) Si donc on avoit $CH = 0$; c'eſt-à-dire, ſi l'angle ACH étoit droit, ou ſi la ligne AH coïncidoit avec AC, le corps ne tourneroit pas.

COROLLAIRE IV.

(378.) Si le corps A étoit appuyé ſur la ſuperficie dans deux points C & F, la puiſſance $\alpha \, \mathit{coſ}\, \Sigma$, ſe diſtribueroit entre ces deux
FIG. 36. points, de façon que la partie de cette puiſſance qui appartient au point C, ſeroit, par la propriété du centre de gravité, à celle qui appartient au point F, comme HF eſt à HC. La partie de la puiſſance α qui agit en C, ſera donc $= \frac{\alpha . FH . \mathit{coſ}\, \Sigma}{FC}$, & celle qui agit en $F = \frac{\alpha . CH . \mathit{coſ}\, \Sigma}{FC}$, d'où il ſuit que l'angle giratoire qu'elles produiront toutes deux ſera $dt \mathit{ſ} \left(\frac{CH . \alpha . FH - FH . \alpha . CH}{S . FC} \right) dt \, \mathit{coſ}\, \Sigma = 0$.

Digitized by Google

COROLLAIRE V.

(379.) On démontrera encore la même chose, quel que soit le nombre de points par lesquels le corps porte sur la surface, pourvu cependant que le point *H* tombe entre ces points, afin que les différentes rotations soient les unes positives, & les autres négatives.

COROLLAIRE VI.

(380.) Quoique la rotation soit zéro, la puissance $\alpha \, sin \, \Sigma$, dont l'action est dirigée suivant *DE*, demeure toujours pour faire mouvoir le corps suivant le plan; mouvement qui doit avoir son effet, quelque petite que soit cette puissance, ou l'angle Σ.

SCOLIE.

(381.) Telles sont les loix, ou regles générales que tous les Auteurs donnent pour le mouvement des corps sur les surfaces; mais, comme nous l'avons vu, ces loix sont fondées sur l'abstraction qu'on a faite des impressions que doit former, sur les mêmes surfaces, la puissance perpendiculaire $\alpha \, cos \, \Sigma$. Lorsqu'on veut avoir égard à ces impressions, les choses sont bien différentes, comme on va le voir dans le Chapitre suivant.

CHAPITRE VIII.

Du Frottement, & de l'altération qu'il produit dans le le mouvement des corps placés sur des surfaces.

DÉFINITION XLV.

(382.) ON appelle *Frottement* cette résistance qu'éprouvent les corps pour se mouvoir parallélement aux surfaces sur lesquelles ils sont posés, lorsqu'ils sont poussés, ou tirés, par une ou plusieurs puissances.

SCOLIE.

(383.) Le parallélipipede *A* animé par une puissance quelconque α, dont la direction *AD* est oblique au plan *BE*, doit, suivant ce qui a été dit dans le Chapitre précédent, se mettre en mouvement, quelque petit que puisse être l'angle *HAD*, que nous nommons Σ : mais, en établissant cette théorie, on a fait abstraction de l'impression que doit faire, sur le plan, la puissance $\alpha \, cos \, \Sigma$, dont l'action Fig. 37.

Digitized by Google

PLANC. II. FIG. 38.

est dirigée suivant *AH*. Cette puissance comprime le parallélipipede & le plan, & forme dans celui-ci l'impression *GCFI*, & l'obstacle *FI*, que la puissance $\alpha \sin \Sigma$, qui est dirigée parallélement au plan *BE*, doit vaincre nécessairement, pour que le mouvement du parallalélipipede puisse avoir son effet. En outre, il est certain, par l'expérience, que quelque soin qu'on prenne pour rendre lisses & polies les surfaces du parallélipipede & du plan, elles restent toujours hérissées d'un grand nombre de petites aspérités qu'on apperçoit très-distinctement avec un microscope. Or ces inégalités doivent former, dans la base, autant de petites impressions, en vertu de la puissance $\alpha \cos \Sigma$; & ces impressions, ainsi que l'obstacle *FI*, doivent produire une résistance au mouvement suivant le plan *BE*.

Si l'on considere ces effets avec attention, on verra qu'ils ne different en rien de ceux que nous avons expliqués (254.), & qui ont puissamment lieu dans le choc de deux corps, lorsque les premieres particules se rompant, les corps demeurent, pour ainsi dire, cloués l'un à l'autre. La puissance $\alpha \cos \Sigma$ fait ici le même effet que l'élasticité latérale, dans le cas des corps qui se choquent, & produit, dans le plan & dans le parallélipipede, des impressions réciproques qui correspondent à celles que nous avons nommées alors petites impressions latérales. La puissance $\alpha \sin \Sigma$ équivaut ici à celle que nous avions représentée par α, & qui produisoit l'impression totale. Il manque seulement ici, pour la parfaite ressemblance de ces deux cas, les petites impressions dans la partie supérieure du parallélipipede, & que tout le côté *FK* ne rencontre un corps qui lui résiste. Au lieu de ce corps, on a seulement l'élevation, ou l'obstacle, *FI*; mais ceci n'altere pas les loix de la résistance, qui se trouve seulement diminuée: ensorte que cette même résistance que la pratique a manifestée dès qu'on a fait les premieres expériences, & qu'on nomme communément *Frottement*, ne differe en rien de la force de percussion, & est identiquement la même chose.

Nous distinguerons deux cas dans le Frottement; l'un dans lequel le parallélipipede ne fait seulement que forcer les aspérités, & l'obstacle *FI*, sans les vaincre entiérement, & sans se déterminer au mouvement; & l'autre, dans lequel ces aspérités étant forcées, vaincues, ou rompues, le corps commence à se mouvoir. Dans le premier cas, la force des aspérités & de l'obstacle sera plus grande que la plus grande force de percussion, que nous nommons maintenant de *Frottement*; ensorte qu'il est nécessaire que le parallélipipede prenne son mouvement; que celui-ci arrive au

Digitized by Google

maximum ; qu'il diminue enſuite juſqu'à ce que u devienne $=0$; qu'il ſoit enſuite négatif, & qu'enfin le cas de l'équilibre entre la puiſſance & le Frottement, ou dans lequel le mouvement ceſſe entiérement, ait lieu ; c'eſt-à-dire que le Frottement ſoit égal à la puiſſance $\theta \mathit{fin}\,\Sigma$, celle-ci étant compoſée comme on voudra. Dans le ſecond cas, la force des aſpérités & de l'obſtacle eſt moindre que la plus grande force de percuſſion ou de Frottement. Le parallélipipede ſurmontera donc cette derniere force ; il ſe mettra donc en mouvement, & continuera de ſe mouvoir tant qu'on aura $\alpha \mathit{fin}\,\Sigma >$, ou $=\pi$, & il s'arrêtera lorſqu'on aura $\alpha \mathit{fin}\,\Sigma < \pi$, comme on l'a démontré, *Art.* 302 & 303, lorſqu'on a ſuppoſé conſtante la force de percuſſion, ou de Frottement.

PROPOSITION L.

(384.) *Trouver la force, ou la réſiſtance réunie de l'obſtacle & des aſpérités.*

La force de percuſſion eſt (309.) $\pi = \frac{HH'}{HI'+H'I}\left(\frac{\frac{1}{2}AB(U-V)^2+(\alpha B-\beta A)(X+Z)}{A+B}\right)$. Qu'on faſſe dans cette expreſſion $B=\infty$, & $V=0$, à cauſe que le plan BE eſt immobile ; & qu'on mette enſuite $\alpha \mathit{cof}\,\Sigma$, pour la puiſſance qui eſt dirigée ſuivant AH. Après cela, ſi l'on ſubſtitue en place de U ſeul, la quantité $U \mathit{cof}\,\Sigma$ pour la viteſſe qui demeure ſuivant AH, on aura, pour l'expreſſion de la force de percuſſion dont le parallélipipede ſupporte l'effet ſur ſa baſe CF, $\pi = \ldots\ldots$ $\frac{HH'}{HI'+H'I}\left(\frac{1}{2}AU^2\mathit{cof}\,\Sigma^2+\alpha \mathit{fin}\,\Sigma(X+Z)\right)$. Nommant maintenant h l'amplitude de l'obſtacle & des aſpérités ; i l'impreſſion qui ſe fait ſur l'un & ſur l'autre ; & φ la force de percuſſion dont ils ſupportent l'effort, celle-ci ſera (309.) $\frac{D^2.ih'}{hI'+h'I}$: mais ayant pareillement $\frac{DH.IH'}{HI'+H'I} = \pi$, nous aurons cette analogie $\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{HH'}{HI'+H'I} : \frac{hh'}{hI'+h'I} :: \frac{HH'}{HI'+H'I}\left(\frac{1}{2}AU^2\mathit{cof}\,\Sigma^2+\alpha\mathit{cof}\,\Sigma(X+Z)\right) : \varphi$; d'où l'on tire la percuſſion, la force, ou la réſiſtance réunie de l'obſtacle & des aſpérités, c'eſt-à-dire, $\varphi = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{i(hh')}{I(hI'+h'I)}\left(\frac{1}{2}AU^2\mathit{cof}\,\Sigma^2+\alpha\mathit{cof}\,\Sigma(X+Z)\right)$.

SCOLIE.

(385.) Il n'y a, dans cette équation, comme on l'a dit, *Art.* 310. (*Voyez auſſi la note de l'Art.* 309.) que les quantités h & h' qui ſoient variables, toutes les autres quantités ſont cenſées avoir leur plus grande

Digitized by Google

PLANC. II. valeur : de ſorte qu'en ſubſtituant, ou en conſidérant les quantités h & h' comme l'expreſſion des plus grandes amplitudes, on aura auſſi la plus grande valeur de φ.

COROLLAIRE.

(386.) Cette quantité eſt donc le Frottement que doit vaincre la puiſſance $\theta \, fin \, \Sigma$, pour mettre le parallélipede en mouvement. Car la plus grande réſiſtance étant une fois ſurmontée, & l'amplitude h de l'obſtacle & des aſpérités ne variant point, la réſiſtance demeure auſſi conſtante, & le parallélipipede continue de ſe mouvoir avec la viteſſe qui lui demeure après avoir ſurmonté le Frottement : & cette viteſſe ſera conſidérée comme la viteſſe primitive pour la continuation du mouvement, qui ſe fera ſuivant les regles établies dans *l'Art. 299* ; puiſque le Frottement, ou la percuſſion, demeure conſtant.

PROPOSITION LI.

(387.) *Trouver la force de Percuſſion que produit, ou peut produire la puiſſance $\alpha \, fin \, \Sigma$.*

FIG. 38. La viteſſe avec laquelle le parallélipipede eſt dirigé ſuivant CF, étant $= U \, fin \, \Sigma$; la puiſſance qui l'anime ſuivant la même direction, étant $= \alpha \, fin \, \Sigma$; les plus grandes profondeurs des impreſſions étant $= x$ & ζ * ; & les quantités h, i déſignant l'amplitude & la grandeur des mêmes impreſſions, à quelque inſtant que ce ſoit du choc : en ſubſtituant ces valeurs dans l'expreſſion de la Percuſſion (309.) ; faiſant de plus $B = \infty$, $V = 0$, & nommant Φ la force de Percuſſion que peut produire la puiſſance $\alpha \, fin \, \Sigma$, on aura $\Phi = \ldots\ldots\ldots$ $\frac{hh'}{hi'+h'i}\left(\frac{1}{2}AU^2 \, fin \, \Sigma^2 + \alpha \, fin \, \Sigma(x+\zeta)\right)$.

COROLLAIRE I.

(388.) Ayant donc $\Phi < \varphi$, le parallélipipede ne pourra commencer ſon mouvement le long du plan ; il parviendra ſeulement à former ſur l'obſtacle & les aſpérités ſa plus grande impreſſion i ; la force d'élaſticité le fera enſuite retourner en arriere avec une viteſſe négative, juſqu'à ce que cette viteſſe devenant auſſi $= 0$, le paral-

* On ne doit pas perdre de vue que x & ζ ſont les profondeurs des plus grandes impreſſions faites dans l'obſtacle FI, & le parallélipipede, ſuivant la direction CF du mouvement, en vertu de la puiſſance $\alpha \, fin \, \Sigma$, & de la viteſſe primitive $U \, fin \, \Sigma$; tandis que X & Z repréſentent les profondeurs des plus grandes impreſſions dans le plan & le parallélipipede, dans la direction AH, en vertu de la puiſſance $\alpha \, cof \, \Sigma$, & de la viteſſe $U \, cof \, \Sigma$ qui demeure dans cette direction. On fera la même remarque pour les quantités h, i & h', i', relativement aux quantités H, I & H', I'.

lélipipede

lélipipede revienne à prendre la vîteſſe poſitive ; & il continuera ainſi d'aller & venir par des oſcillations répétées, qui doivent diminuer continuellement, à meſure que l'élaſticité va en diminuant, & par conſéquent il doit arriver que le parallélipipede ceſſe entiérement de ſe mouvoir, comme on l'a dit, *Art.* 383.

Corollaire II.

(389.) Au contraire, ſi l'on avoit $\Phi > \varphi$, le parallélipipede commenceroit à ſe mouvoir le long du plan, & il continueroit, ſans s'arrêter, ſi l'on avoit $\theta \, fin \, \Sigma =$, ou $> \varphi$.

Corollaire III.

(390.) Le terme auquel le parallélipipede, ceſſant déjà de pouvoir ſe ſoutenir ſur le plan ſans ſe mouvoir, eſt près de ſe déterminer au mouvement, ſera celui dans lequel $\Phi = \varphi$, ou $\frac{i(hh')}{I(hi'+h'i)}\left(\frac{1}{i}AU^2 \, cof\Sigma^2 + \alpha \, cof\Sigma\,(X+Z)\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{hh'}{hi'+h'i}\left(\frac{1}{i}AU^2 \, fin\,\Sigma^2 + \alpha \, fin\,\Sigma\,(x+z)\right)$; équation d'où l'on tire, en diviſant par $\frac{i(hh')}{hi'+h'i}$, $\frac{1}{I}\left(\frac{1}{i}AU^2 \, cof\Sigma^2 + \alpha \, cof\Sigma\,(X+Z)\right) = \ldots\ldots$ $\frac{1}{i}\left(AU^2 \, fin\,\Sigma^2 \alpha + fin\,\Sigma\,(x+z)\right)$.

Corollaire IV.

(391.) Les variables h & h' ne ſe trouvant plus dans cette équation, il s'enſuit qu'à quelque inſtant que ce ſoit du choc, on aura l'égalité des deux forces Φ & φ, & par conſéquent l'effet qu'on ſe propoſe.

Corollaire V.

(392.) Si l'on avoit $U = 0$, cette équation deviendroit $\frac{\alpha \, cof\Sigma\,(X+Z)}{I} = \frac{\alpha \, fin\,\Sigma\,(x+z)}{i}$; mais à cauſe de la ſimilitude des impreſſions faites par les mêmes corps, on a $\frac{X+Z}{I}$ eſt à $\frac{x+z}{i}$ comme $\frac{1}{H}$ eſt à $\frac{1}{h}$: ſubſtituant ces valeurs, on aura $\alpha \, fin\,\Sigma = \frac{h \, cof\Sigma}{H}$; c'eſt-à-dire que la puiſſance $\alpha \, cof\Sigma$, qui preſſe le parallélipipede perpendiculairement ſur le plan, eſt à la puiſſance $\alpha \, fin\,\Sigma$, qui ſurmonte le Frottement, comme l'amplitude H de l'impreſſion, eſt à l'amplitude h de l'obſtacle & des aſpérités.

Corollaire VI.

(393.) Plus le nombre & la grandeur des aſpérités ſera grand, plus la puiſſance $\theta \, fin\,\Sigma$, qui doit vaincre le Frottement, doit être grande ; & réciproquement, &c.

Digitized by Google

COROLLAIRE VII.

(394.) Le nombre des aſpérités ſuivant une certaine régularité dans ſes augmentations & ſes diminutions, nous pouvons le ſuppoſer proportionnel à l'amplitude H de l'impreſſion, particuliérement dans les corps qui ne ſont pas beaucoup élaſtiques; l'amplitude des aſpérités ſera donc, dans ce cas, $= nH$, n marquant un nombre quelconque dépendant de la grandeur des mêmes aſpérités. Suppoſant en outre que l exprime la longueur de l'impreſſion, & k ſa largeur, on aura $H = lk$, ce qui donne $h = nlk + kX$, kX exprimant l'amplitude de l'obſtacle *. Nous aurons donc, d'après cela, $\alpha \, cof\, \Sigma : \alpha \, fin\, \Sigma :: lk : nlk + kX$, ou $:: l : nl + X$, & par conſéquent $\alpha \, fin\, \Sigma = \frac{(nl+X)\alpha \, cof\, \Sigma}{l}$.

COROLLAIRE VIII.

(395.) Plus l'impreſſion aura de longueur, moins il faudra de force à la puiſſance $\alpha \, fin\, \Sigma$ qui doit vaincre le Frottement.

COROLLAIRE IX.

(396.) Si on ſuppoſe les corps extrêmement liſſes, & que par conſéquent on puiſſe faire abſtraction des aſpérités, on aura $n = 0$, & par conſéquent $\alpha \, cof\, \Sigma : \alpha \, fin\, \Sigma :: l : X$; ou $\alpha \, fin\, \Sigma = \frac{X \alpha \, cof\, \Sigma}{l}$.

SCOLIE I.

(397.) De l'équation $\alpha \, fin\, \Sigma = \frac{h \alpha \, cof\, \Sigma}{H}$, ou, en diviſant par α, de $fin\, \Sigma = \frac{h \, cof\, \Sigma}{H}$, on peut tirer, d'après l'expérience, la valeur de $fin\, \Sigma$, ou bien celle de h; mais, comme il eſt difficile, dans la pratique, de ſe procurer une valeur exacte de h, ce qui n'a pas lieu pour celle de Σ, qui peut ſe meſurer avec une grande facilité, on déduira la valeur de h par cette équation $h = \frac{H \, fin\, \Sigma}{cof\, \Sigma}$. Pour avoir la valeur de Σ, on n'a qu'à élever le plan peu à peu & très-doucement, par une de ſes extrémités, depuis la ſituation horiſontale, juſqu'à ce que le parallélipipede commence ſon mouvement; & meſurer l'angle que forme le plan avec l'horiſon dans cette derniere ſituation, ce ſera la valeur de Σ, d'où dépend celle de $h = \frac{H \, fin\, \Sigma}{cof\, \Sigma}$. La valeur de H étant celle de l'amplitude de l'impreſſion, on peut la meſurer à très-peu près. En procédant de cette maniere, on pourra trouver la valeur de h, non-

* Ceci eſt évident, puiſque X, qui marque la profondeur de la plus grande impreſſion faite dans le plan, eſt égale à la hauteur de l'obſtacle, & que k en repréſente la largeur.

Digitized by Google

ſeulement celle qui correſpondra à différentes puiſſances, mais encore à différentes dimenſions, tant en longueur qu'en largeur, du parallélipipede, & on en pourra former des Tables qui ſeront d'un grand uſage dans la pratique. Si l'on met un corps mou entre le plan & le parallélipipede, de ſorte que ce corps, en rempliſſant la capacité de l'impreſſion, empêche que le parallélipipede ne touche au plan; dans ce cas, l'obſtacle, ainſi que les aſpérités qu'il faut vaincre, ſe formeront des parties du corps mou, dont la réſiſtance eſt beaucoup moindre, & par conſéquent il faudra une moindre puiſſance pour la ſurmonter. Ceci eſt une conſéquence que l'expérience juſtifie journellement; & avec d'autant plus de préciſion, qu'on ſçait mieux choiſir & varier le corps mou qu'on interpoſe, relativement aux deux corps qui ſe frottent, ſelon l'eſpece & la variété de ceux-ci. Tout cela vient de ce que le corps mou interpoſé doit ſeul empêcher le contact des deux corps qui ſe frottent. Pour les corps légers & polis, l'huile ſuffit; mais pour les corps fort peſants & raboteux, il eſt néceſſaire d'employer de la graiſſe, ou du ſuif, & encore doit-on allier ces ſubſtances, & leur donner différentes préparations, ſelon la nature des différents corps.

Corollaire X.

(398.) L'action peut procéder de deux puiſſances dont il réſulte un mouvement compoſé dans le parallélipipéde, l'une étant perpendiculaire au plan, & l'autre lui étant parallele. Suppoſons que la puiſſance α ſoit celle qui agit perpendiculairement au plan, avec la viteſſe primitive U, & que la puiſſance θ agiſſe parallélement au même plan, avec la viteſſe primitive V; ſi l'on ſubſtitue, dans l'équation de *l'Art.* 384, α en place de $\alpha \, cof \, \Sigma$, & ſi l'on fait $\Sigma = 0$, on aura $\varphi = \frac{i(hh')}{I(hi'+h'i)}\left(\frac{1}{2}AU^2+\alpha(X+Z)\right)$. Faiſant de même, dans l'équation de *l'Article* 387, $\theta = \alpha$, $ſin\ \Sigma = 1$, & $U = V$, on aura $\varphi = \ldots \frac{hh'}{hi'+h'i}\left(\frac{1}{2}AV^2+\theta(x+\zeta)\right)$.

Corollaire XI.

(399.) Le parallélipipede ſera donc au point de commencer ſa marche, lorſque $\frac{1}{I}\left(\frac{1}{2}AU^2+\alpha(X+Z)\right) = \frac{1}{i}\left(\frac{1}{2}AV^2+\theta(x+\zeta)\right)$: ou à cauſe que $I : i :: H(X+Z) : h(x+\zeta)$, lorſque $\frac{\frac{1}{2}AU^2+\alpha(X+Z)}{H(X+Z)} = \ldots \frac{\frac{1}{2}AV^2+\theta(x+\zeta)}{h(x+\zeta)}$.

Digitized by Google

COROLLAIRE XII.

(400.) Si l'on avoit $U=0$, & $V=0$, l'équation deviendroit $\frac{\alpha}{H}=\frac{\theta}{h}$, ou $\theta=\frac{h\alpha}{H}$; c'eſt-à-dire que la puiſſance α qui agit ſur le parallélipipede perpendiculairement au plan, eſt à la puiſſance θ qui ſurmonte le Frottement, comme l'amplitude H de l'impreſſion, eſt à l'amplitude h de l'obſtacle & des aſpérités: c'eſt le même réſultat que celui qu'on a trouvé ci-deſſus (392.).

COROLLAIRE XIII.

(401.) Si l'on avoit ſeulement $U=0$, on auroit $\frac{\alpha}{H}=\frac{\frac{1}{2}AV^2+\theta(x+1)}{h(x+1)}$ ou $\frac{h\alpha}{H}-\frac{AV^2}{2(x+1)}=\theta$, d'où l'on voit combien, dans ce cas, la puiſſance θ, qui doit vaincre le Frottement, peut être diminuée.

COROLLAIRE XIV.

(402.) Si l'on avoit donc $\frac{h\alpha}{H}-\frac{AV^2}{2(x+1)}=0$, on auroit auſſi $\theta=0$; c'eſt-à-dire que le parallélipipede n'auroit pas beſoin, pour vaincre le Frottement, de l'action d'une puiſſance qui agît ſur lui parallélement au plan; il le ſurmonteroit par l'action que produit la viteſſe V.

COROLLAIRE XV.

(403.) Pour que le Frottement ſoit vaincu, & que le parallélipipede commence à ſe mouvoir, il faut donc ſeulement avoir $\frac{h\alpha}{H}<\frac{AV^2}{2(x+1)}+\theta$.

COROLLAIRE XVI.

(404.) Si le plan étoit horiſontal, & ſi α étoit la gravité de la maſſe A, il ſeroit néceſſaire, pour vaincre le Frottement, qu'on eût $\frac{h}{H}<\frac{V^2}{64(x+1)}+\frac{\theta}{\alpha}$, (52.); ou ſi l'on avoit $\theta=0$, il faudroit avoir $\frac{h}{H}<\frac{V^2}{64(x+1)}$; ou bien, en prenant e pour la hauteur d'où devroit tomber le corps pour acquérir la viteſſe V, il faudroit avoit $\frac{h}{H}<\frac{e}{x+1}$: ou $\frac{h(x+1)}{H}<e$, (52.).

COROLLAIRE XVII.

(405.) Dans les corps durs, la quantité $h(x+1)$ étant extrêmement petite à l'égard de H, on voit qu'il ne faut au parallélipipede qu'une viteſſe primitive très-petite, pour vaincre le Frottement, & ſe mettre en mouvement.

Digitized by Google

Corollaire XVIII.

(406.) Si l'on avoit $V=0$, la puiſſance α étant toujours ſuppoſée l'action de la gravité ſur la maſſe A, il ſeroit néceſſaire d'avoir $\frac{h}{H} < \frac{\theta}{\alpha}$ pour que le parallélipipede ſurmontât le Frottement; ou ce qui revient au même, il faudroit que la raiſon de la gravité à la puiſſance θ qui doit vaincre le Frottement, fût moindre que $\frac{H}{h}$.

Scolie II.

(407.) Si on conſulte les Auteurs qui ont écrit, juſqu'à préſent, ſur ce ſujet, on verra qu'on a généralement cru, & qu'on croit encore que le Frottement eſt ſeulement proportionnel à la puiſſance qui agit ſur le parallélipipede perpendiculairement au plan, abſtraction faite des aſpérités. Cette opinion eſt fondée ſur quelques expériences faites par différents Auteurs, particuliérement par M. *Amontons*, de l'Académie des Sciences de Paris, & par M. *Bilfinger*. Le premier dit avoir toujours trouvé la puiſſance θ, qui eſt ſur le point de vaincre la réſiſtance du Frottement, égale à la troiſieme partie de α, ou de la puiſſance qui agit ſur le parallélipipede perpendiculairement au plan; c'eſt-à-dire, $\theta = \frac{1}{3}\alpha$; mais le ſecond fait ſeulement $\theta = \frac{1}{4}\alpha$. Cette différence dans les réſultats auroit dû faire douter que la réſiſtance du Frottement fût ſeulement proportionnelle à la puiſſance α; mais conſidérant que les aſpérités plus ou moins grandes des plans dont on s'eſt ſervi pour faire les expériences, pouvoient être la cauſe de ces différences, on adopta facilement cette opinion: de ſorte qu'il paroit certain que ces déterminations ont été établies en faiſant abſtraction des aſpérités. Mais, dans cette ſuppoſition même, ces déterminations ne s'accordent point avec nos formules. Selon ces formules (396.), $\theta = \frac{X\alpha}{l}$: par conſéquent, ſelon M. *Amontons*, on devroit toujours avoir $\frac{X}{l} = \frac{1}{3}$; ou, ſelon M. *Bilfinger*, $\frac{X}{l} = \frac{1}{4}$; c'eſt-à-dire que la profondeur de l'impreſſion devroit être, dans tous les cas, ſuivant le premier Auteur, la troiſieme partie de la longueur du parallélipipede; & la quatrieme partie, ſuivant le ſecond; conſéquence dont l'abſurdité eſt tellement évidente, qu'il n'eſt pas néceſſaire de s'arrêter à la démontrer.

Nous ne devons cependant pas révoquer en doute les expériences faites par ces deux célebres Auteurs. Tout peut ſe concilier, en ſuppoſant qu'ils ne ſe ſoient pas étendus juſqu'à les faire avec différents corps d'une même peſanteur & d'une même amplitude dans leur baſe,

Digitized by Google

mais de différentes dimensions en longueur & largeur, & de différentes duretés. Ce soupçon ne paroîtra pas sans fondement, si l'on se rappelle une expérience très-commune. Si un couteau, par exemple, porte sur un plan par son tranchant, & qu'en appuyant sur lui, on veuille le faire mouvoir, dans cette situation, perpendiculairement à son plan, il tend plutôt à s'incliner qu'à se mouvoir, & on a de la peine à le maintenir droit sur le plan. Mais si, au contraire, on veut le faire mouvoir directement dans le sens de son plan, il marche avec très-peu d'effort : ce qui fait voir clairement combien le Frottement est moindre dans ce second cas que dans le premier *.

Pour nous approcher de ce que les deux Auteurs cités ont établi, d'après leurs expériences, nous devons, au contraire, admettre qu'il existe toujours des aspérités, quelque lisses & polis que puissent être les corps ; & que l'obstacle, sur-tout dans les corps durs, est insensible, ou est presque susceptible d'être négligé. Dans ce cas, on aura (400.) $\theta = \frac{h\alpha}{H}$; ou en substituant (394.) les valeurs de $H = lk$, & de $h = nlk + kx$, on aura $\theta = \frac{\alpha k(nl+X)}{lk} = \frac{\alpha(nl+X)}{l}$: de sorte qu'en négligeant la quantité X qui provient de l'obstacle, comme étant infiniment petite, par rapport à nl, qui provient des aspérités, on aura $\theta = n\alpha$; c'est-à-dire, selon M. *Amontons*, $n = \frac{1}{3}$, & selon M. *Bilfinger*, $n = \frac{1}{4}$: différence qui n'implique alors aucune contradiction, puisque n exprime la grandeur des aspérités. Ceci prouve combien notre théorie est d'accord avec les expériences ; mais il faut observer que si l'on peut regarder l'obstacle

* On peut expliquer en cette maniere pourquoi le couteau se meut sur le plan, avec plus de facilité, dans la direction de son tranchant, que dans une direction perpendiculaire au plan de sa lame.

La puissance qui surmonte le Frottement, est, d'après ce qui a été dit précédemment, $\theta = \frac{\alpha(nl+X)}{l}$ (394 & 398) ; & comme, dans l'impression que forme le tranchant du couteau sur le plan, les aspérités sont nulles à l'égard de l'obstacle qui en résulte, on a $n = 0$, & par conséquent $\theta = \frac{\alpha X}{l}$: donc plus la longueur l de l'impression sera grande, plus la quantité $\frac{\alpha X}{l}$, ou son égale θ, sera petite. Mais lorsqu'on veut que le couteau se meuve perpendiculairement au plan de sa lame, la longueur de l'impression est alors $= k$ (394.) ; quantité plus petite que l, qui en exprime la largeur : donc, dans ce cas, on a $\frac{\alpha X}{k} > \frac{\alpha X}{l}$, qui est la puissance nécessaire pour surmonter le frottement dans le premier cas. Donc la puissance nécessaire pour faire mouvoir le couteau dans une direction perpendiculaire au plan de sa lame, doit être plus grande que celle qu'il faut employer pour le faire mouvoir dans la direction de son tranchant.

On remarquera que quand on parle ici de la longueur de l'impression, on n'entend pas parler de la quantité X, mais de la quantité l, qui est la longueur de l'amplitude de l'impression, prise dans la direction du mouvement du corps sur le plan, suivant ce que l'Auteur a établi, *Art.* 394.

Digitized by Google

comme nul dans les corps très-durs, on ne peut faire cette supposition lorsqu'il s'agit de corps mous, ou qui ne sont pas extrêmement durs. Dans ces cas, loin que cette supposition soit légitime, ce sont, au contraire, les aspérités qu'on doit supposer comme nulles, par rapport à l'obstacle, & par conséquent le parallélipipede éprouvera moins de résistance, en se mouvant dans une direction perpendiculaire à son plus petit côté, que s'il se meut dans une direction perpendiculaire à son plus grand côté.

DES EFFETS qui ont lieu après que la résistance du Frottement est vaincue.

PROPOSITION LII.

(408.) *Trouver la relation entre la vîtesse* u, *& l'espace parcouru par le corps* Λ.

On a déjà vu (389.) que toutes les fois qu'on aura $\Phi > \varphi$, le parallélipipede se mettra en mouvement. On a encore vu (383.), que, si dans le même temps, la puissance θ, ou $\alpha \, sin \, \Sigma$ qui agit sur le parallélipipede parallélement au plan, est plus grande que la force de résistance de l'obstacle & des aspérités, il continuera de se mouvoir, sans qu'il y ait aucune limite à son mouvement; & que le Frottement sera constant pendant la durée du mouvement, à cause que l'amplitude de l'obstacle & des aspérités ne reçoit aucune augmentation (391.)*. D'après tout ceci, la vîtesse correspondante sera (278.) $u = \left(U^2 + \frac{\alpha(x+\zeta)}{\frac{1}{2}A} - \frac{fDHdx}{\frac{1}{2}A} \right)^{\frac{1}{2}}$, ou, en substituant θ pour α, & h pour H, on aura $u = \left(U^2 + \frac{2\theta(x+\zeta)}{A} - \frac{2Dhx}{A} \right)^{\frac{1}{2}}$; mais, dans le cas présent, $\zeta = 0$ par rapport à x, cette expression devient donc $u = \left(U^2 + \frac{2\theta x}{A} - \frac{2Dhx}{A} \right)^{\frac{1}{2}}$, U désignant la vîtesse primitive qu'avoit le corps lorsqu'il a surmonté le Frottement.

COROLLAIRE I.

(409.) S'il n'y avoit qu'une seule & unique puissance α, qui animât le parallélipipede, il seroit nécessaire de mettre $\alpha \, sin \, \Sigma$ pour θ, & l'on auroit $u = \left(U^2 + \frac{2\alpha x \, sin \, \Sigma}{A} - \frac{2Dhx}{A} \right)^{\frac{1}{2}}$.

* Puisque (391.) les quantités h & h' disparoissent dans la supposition de $\Phi = \varphi$, elles disparoîtront également lorsque $\Phi > \varphi$; ce qui fait voir que ces quantités h & h' sont constantes. En outre, il ne faut pas oublier que l'Auteur a supposé la dureté constante dans les formules de la percussion, qu'il applique ici à la théorie du Frottement.

Digitized by Google

COROLLAIRE II.

(410.) Comme de la supposition de $\zeta = 0$, il résulte que D' doit être comme infini par rapport à D, on aura (253.) la force de l'obstacle & des aspérités $\varphi = \frac{DhD'h'}{Dh+D'h'} = Dh$: on pourra donc substituer φ à la place de Dh, & on aura encore . . . . . , $u = \left(U^2 + \frac{2\theta x}{A} - \frac{2\varphi x}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$; & dans le cas où il n'y auroit que la puissance α qui animât le parallélipipede, on auroit $u = \left(U^2 + \frac{2\alpha x \sin z}{A} - \frac{2\varphi x}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$.

COROLLAIRE III.

(411.) Pour que le parallélipipede s'arrête dans le cours de son mouvement, il faut que $u = 0$: donc, pour ce cas, on aura $U^2 + \frac{2\theta x}{A} - \frac{2Dhx}{A} = 0$; ou $U^2 = \frac{2x}{A}(Dh - \theta) = \frac{2x}{A}(\varphi - \theta)$. D'où l'on voit clairement que, pour que le parallélipipede s'arrête, il faut qu'on ait $\varphi = Dh > \theta$; sans cela, $\varphi - \theta$ seroit négatif, & par conséquent U imaginaire, ce qui est contre la supposition ; ou bien $\varphi = \theta$ seroit $= 0$, & par conséquent aussi $U = 0$, ce qui est pareillement contre la supposition.

COROLLAIRE IV.

(412.) Le point dans lequel s'arrêtera le parallélipipede, sera donc celui où l'on aura $x = \frac{AU^2}{2(Dh-\theta)} = \frac{AU^2}{2(\varphi-\theta)}$.

PROPOSITION LIII.

(413.) *Trouver le rapport entre l'espace parcouru par le corps* A, *& sa vitesse.*

L'équation qui correspond à ce cas, est (300.) $x + \zeta = \frac{\frac{1}{2}A(U^2-u^2)}{\pi+\alpha}$, laquelle se réduit à $x = \frac{A(U^2-u^2)}{2(\varphi-\theta)} = \frac{A(U^2-u^2)}{2(Dh-\theta)}$, en substituant φ à la place de π, & θ à celle de α, & faisant de plus $\zeta = 0$; & si l'on avoit $\theta > \varphi$, cette équation seroit $x = \frac{A(u^2-U^2)}{2(\theta-\varphi)} = \frac{A(u^2-U^2)}{2(\theta-Dh)}$. *

* Ces secondes expressions que l'Auteur donne pour le cas où la puissance θ qui anime le corps sur le plan, est plus grande que la résistance φ qu'il doit vaincre, ne nous paroissent pas absolument essentiel'es ; les premieres nous semblent suffisantes pour ce qu'il a dessein d'exprimer dans ce moment. Car puisque le corps éprouve, dans son mouvement sur la surface, une résistance moindre que la puissance qui l'anime, sa viteffe ira en augmentant ; & à quelque instant que ce soit de la marche du corps, sa viteffe u sera plus grande que la viteffe primitive U ; & alors $U^2 - u^2$ est une quantité négative. Mais, dans ce même cas, $\varphi - \theta$ est aussi négative : donc x sera positive, & aura la même valeur que celle qu'on obtient des secondes expressions ; les premieres

COROLLAIRE

COROLLAIRE.

(414.) Dans le cas où x parvient à sa plus grande valeur; c'est-à-dire, lorsqu'il représente le plus grand espace; on aura $u=0$ *, & par conséquent $x=\frac{AU^2}{2(\varphi-\delta)}=\frac{AU^2}{2(Dh-\delta)}$, comme on l'a trouvé ci-devant (412.).

PROPOSITION LIV.

(415.) *Trouver la relation entre le temps* t *de la durée du mouvement du corps* A, *& l'espace qu'il a parcouru.*

L'équation (258.) $dt=\frac{dx+dz}{u-v}$ se réduit, dans ce cas où $z=0$, & $v=0$, à $dt=\frac{dx}{u}$; substituant, dans cette équation, la valeur de u trouvée, (408.), on aura $dt=\frac{dx}{\left(U^2+\frac{2\delta x}{A}-\frac{2Dhx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}}$; d'où l'on tire, en intégrant, $t=\frac{(A^2U^2+2Ax(\delta-Dh))^{\frac{1}{2}}-AU}{\delta-Dh}=\frac{(A^2U^2+2Ax(\delta-\varphi))^{\frac{1}{2}}-AU}{\delta-\varphi}$**.

conviennent donc aussi bien au cas où $\delta>\varphi$, qu'à ceux où δ est $=$, ou $<\varphi$ (383.). On ne doit pas perdre de vue ce qui a été dit dans *l'Art.* 387, *& sa note*, que, dans cette Proposition, aussi bien que dans la précédente, x marque la profondeur de l'impression faite dans l'obstacle, & par conséquent l'espace parcouru par le parallélipipede le long du plan, puisque z est supposé $=0$.

* Cela s'appercevra facilement, si l'on fait attention que, pour que x soit le plus grand qu'il est possible, il faut que sa valeur $\frac{A(U^2-u^2)}{2(\varphi-\delta)}$ soit aussi la plus grande qu'il est possible; mais, pour cela, il faut que $u=0$, puisque toutes les autres quantités qui entrent dans cette expression, sont constantes (386.). On remarquera qu'il faut, pour ce cas, que $\varphi>\delta$; car autrement il n'y auroit point de limite pour x (302 & 303.).

** Pour trouver cette intégrale, je mets la valeur de dt sous cette forme, $dt=\ldots\ldots$ $dx\left(U^2+\left(\frac{2\delta-2Dh}{A}\right)x\right)^{-\frac{1}{2}}$; je fais $U^2+\left(\frac{2\delta-2Dh}{A}\right)x=y$, d'où je tire $x=\frac{Ay-AU^2}{2\delta-2Dh}$, & par conséquent $dx=\frac{Ady}{2\delta-2Dh}$. Substituant maintenant ces quantités en place de leurs correspondantes, j'ai $dt=\frac{Ady}{2\delta-2Dh}y^{-\frac{1}{2}}=\frac{Ay^{-\frac{1}{2}}dy}{2\delta-2Dh}$, & en intégrant $t=\frac{Ay^{\frac{1}{2}}}{\delta-Dh}+C$; mettant pour $y^{\frac{1}{2}}$ sa valeur $\left(U^2+\left(\frac{2\delta-2Dh}{A}\right)x\right)^{\frac{1}{2}}$, on trouve $t=\frac{A\left(U^2+\left(\frac{2\delta-2Dh}{A}\right)x\right)^{\frac{1}{2}}}{\delta-Dh}$ $+C=\frac{(A^2U^2+2Ax(\delta-Dh))^{\frac{1}{2}}}{\delta-Dh}+C$.

Pour trouver la valeur de la constante C, je remarque que cette intégrale doit être zéro au commencement de l'action, ou lorsque $x=0$; or si l'on éleve tout le numérateur de la valeur de t à la puissance $\frac{1}{2}$, le premier terme sera AU, & tous les autres seront affectés de x; donc ils s'évanouiront tous, à l'exception du premier, par la supposition de $x=0$. On a donc $\frac{AU}{\delta-Dh}+C=0$, ou $C=\frac{-AU}{\delta-Dh}$. Substituant cette valeur de C dans celle de t, on trouve précisément l'expression donnée par l'Auteur.

Digitized by Google

COROLLAIRE.

(416.) Pour le cas du plus grand espace parcouru, dans lequel on a $Dh > \theta$, ou $\varphi > \theta$, nous avons trouvé (412 & 414.) $x = \ldots \frac{AU^2}{2(Dh-\theta)} = \frac{AU^2}{2(\varphi-\theta)}$: cette valeur étant substituée dans l'équation précédente, donnera, pour le temps dans lequel le corps parcourt le plus grand espace, $t = \frac{AU}{Dh-\theta} = \frac{AU}{\varphi-\theta}$.

PROPOSITION LV.

(417.) *Trouver la relation entre l'espace* x *que parcourra le corps* A, *& le temps* t.

Multipliant l'équation précédente $t = \frac{(A^2U^2+2Ax(\theta-\varphi))^{\frac{1}{2}}-AU}{\theta-\varphi}$ par $\theta-\varphi$, ajoutant AU de part & d'autre, & quarrant, il en résulte $A^2U^2+2AUt(\theta-\varphi)+t^2(\theta-\varphi)^2 = A^2U^2+2Ax(\theta-\varphi)$: d'où l'on tire, en soustrayant de part & d'autre A^2U^2, & en divisant par $2A(\theta-\varphi)$, $x = Ut + \frac{t^2(\theta-\varphi)}{2A} = Ut + \frac{t^2(\theta-Dh)}{2A}$.

PROPOSITION LVI.

(418.) *Trouver le temps* t *qu'emploie le corps* A *dans son mouvement, par sa relation avec la vîtesse.*

L'équation qui correspond à ce cas est (343.) $t = \frac{A(u-U)}{\alpha-\varphi}$. Substituant θ pour α, & φ pour π, elle devient $t = \frac{A(u-U)}{\theta-\varphi}$.

COROLLAIRE.

(419.) Dans le cas de la plus grande impression, ou du plus grand espace parcouru, on aura $t = \frac{AU}{\varphi-\theta}$.

PROPOSITION LVII.

(420.) *Trouver la vîtesse qu'aura le corps* A, *par sa relation avec le temps de la durée du mouvement.*

Multipliant par $\theta-\varphi$, l'équation $t = \frac{A(u-U)}{\theta-\varphi}$, divisant par A, & ajoutant U de part & d'autre, on aura $u = U + \frac{t(\theta-\varphi)}{A}$.

COROLLAIRE.

(421.) Supposons que le parallélipipede A descende le long du plan, par la seule action de la gravité α; que n soit un nombre quelconque, de sorte qu'on ait $\alpha \sin \Sigma - \varphi = \theta - \varphi = n\alpha$; nous aurons

Digitized by Google

$u = U \pm \frac{n\alpha t}{A}$: mais (52.) $A = \frac{1}{11}\alpha$; donc $u = U \pm 32nt$ *.

SCOLIE.

(422.) Dans le volume des *Mémoires de l'Académie Royale de Berlin*, de l'année 1748, on trouve un Mémoire de *Léonard Euler*, sur la maniere dont on peut concevoir la réſiſtance du Frottement. Ce Sçavant conclud que cette réſiſtance eſt moindre dans le cas du mouvement que dans celui de l'équilibre; ce qui eſt abſolument contraire à nos réſultats. Pour concevoir & rendre raiſon de cette différence, il ſuffira de dire que ce ſçavant Auteur ne développe point, dans la théorie qu'il expoſe, ce en quoi il fait conſiſter le Frottement; il dit ſeulement ce qui peut ſervir à en concevoir les effets. Il ſuppoſe qu'il provient uniquement des aſpérités du plan & du parallélipipede; & en aucune maniere de l'obſtacle *FI*, que nous avons déjà vu avoir néceſſairement lieu, en vertu de la puiſſance perpendiculaire $\alpha \, cof\Sigma$, ſur le même parallélipipede. Il ſuppoſe encore que les aſpérités du parallélipipede & du plan ſont autant de petits plans inclinés, ou autant de dents ſemblables, afin que les dents du plan puiſſent s'engrener, ou s'ajuſter parfaitement, avec celles du parallélipipede. Dans cette ſuppoſition, il eſt clair que la puiſſance qui agit ſur le parallélipipede, étant d'une grandeur ſuffiſante, obligera ce corps, ou ſes petites dents à ramper le long de celles du plan, juſqu'à ce qu'elles ſe ſoutiennent ſommets contre ſommets. Ce point étant paſſé, elles s'engreneront de nouveau, par la chûte du parallélipipede, avec les dents ſuivantes, chacune avec ſa correſpondante: après quoi elles recommenceront à s'élever; & continuant ainſi, le Frottement ſe fera, comme on voit, par ſauts d'une dent à l'autre; de ſorte que la premiere fois que les dents du parallélipipede montent le long de celles du plan, c'eſt alors qu'on éprouve le Frottement total; & les chûtes étant une action oppoſée, ou négative, le premier Frottement, qui eſt celui qui a lieu dans le cas d'équilibre, eſt diminué. Cette façon de conſidérer le Frottement peut être propre à en faire concevoir facilement les effets; mais on apperçoit en même temps ſes inconvénients, & les fortes objec-

* Pluſieurs Lecteurs n'appercevront peut-être pas tout d'un coup pourquoi l'Auteur emploie ici le double ſigne dans l'équation $u = U \pm \frac{n\alpha t}{A}$; mais la difficulté diſparoîtra, ſi l'on conſidere qu'il a voulu réunir dans cette équation le cas où la force φ de l'obſtacle & des aſpérités excede la puiſſance agiſſante θ, cas où la quantité $\theta - \varphi$ qu'il a repréſentée par $n\alpha$, eſt négative. Ainſi, ſous cette forme, l'équation convient à tous les cas; on voit que u peut être poſitif, puis égal à zéro, & enſuite négatif (383.).

Digitized by Google

PLYNC. II. tions qu'on peut élever contre elle. Les dents du parallélipipede ne peuvent abſolument point monter le long de celles du plan, & parvenir au point d'être ſommets contre ſommets, ni même proches de cette ſituation, ſans qu'il ne ſe ſoit fait une impreſſion réciproque dans ces mêmes dents, & par conſéquent qu'il ne ſe ſoit formé un nouvel obſtacle à vaincre, ſans que jamais il puiſſe arriver que cet obſtacle ſoit nul, & qu'il puiſſe y avoir de chûte; & par la même raiſon, il ne peut y avoir de diminution dans le Frottement, dans le cas du mouvement.

Une expérience, dit le même ſçavant Auteur, favoriſe cette détermination; la voici. Il ne peut jamais arriver que le parallélipipede ſe meuve ſur le plan, avec beaucoup de lenteur, quelque ſoin qu'on apporte à ne donner au plan que l'inclinaiſon néceſſaire pour mettre le parallélipipede en mouvement. Il dit, au contraire, qu'une fois qu'il a commencé à ſe mouvoir, ſon mouvement s'accélere avec une grande rapidité, & que, par conſéquent, il faut que le Frottement diminue par le mouvement; mais on va voir qu'il n'eſt point d'expérience qui s'accorde plus parfaitement avec notre théorie.

L'équation $u = U \pm 3nt$, eſt celle qui correſpond préciſément au cas dont il eſt ici queſtion. Si nous faiſons $n = \frac{1}{3}$, elle deviendra $u = U \pm t$; & ſi l'on éleve le plan avec toute la lenteur poſſible, & qu'on faſſe, en conſéquence, $U = 0$, il reſtera cependant encore $u = t$; c'eſt-à-dire que la viteſſe u que prendra le corps A, lors même qu'on ne donne au plan que l'inclinaiſon néceſſaire pour qu'il le mette en mouvement, ſera encore d'autant de pieds par ſeconde, qu'il y a de ſecondes dans le temps t: enſorte qu'à la fin de la premiere ſeconde de temps, il marchera déjà avec une viteſſe d'un pied par ſeconde; & à la fin des deux premieres ſecondes de temps, ſa viteſſe ſera de deux pieds par ſeconde, & ainſi de ſuite.

FIG. 37. Il ne faut maintenant que faire voir qu'en ſuppoſant $n = \frac{1}{3}$, on ne ſuppoſe dans le plan BE qu'un mouvement très-petit, c'eſt-à-dire que l'angle $BEL = \Sigma$ n'eſt augmenté que d'une très-petite quantité, l'inclinaiſon du plan étant déjà ſuppoſée telle que le corps ſoit ſur le point de ſe mettre en mouvement; auquel cas on a $\alpha \, \mathit{ſin}\, \Sigma = \varphi$.

Suppoſons maintenant qu'on augmente l'angle BEL d'inclinaiſon d'une différencielle $d\Sigma$; c'eſt-à-dire qu'il deviennne $= \Sigma + d\Sigma$: le ſinus de cet angle BEL ſera $= \mathit{ſin}\, \Sigma + d\Sigma \, \mathit{coſ}\, \Sigma$, & ſon coſinus $= \mathit{coſ}\, \Sigma - d\Sigma \, \mathit{ſin}\, \Sigma$. La puiſſance qui anime le corps parallélement au plan ſera, dans ce ſecond cas, $= \alpha \, \mathit{ſin}\, \Sigma + \alpha d\Sigma \, \mathit{coſ}\, \Sigma$; par conſéquent plus grande que celle du premier cas de $\alpha d\Sigma \, \mathit{coſ}\, \Sigma$. On aura

Digitized by Google

pareillement la puiſſance qui l'anime perpendiculairement $= a\,cof\Sigma - ad\Sigma\,ſin\,\Sigma$. La puiſſance capable de vaincre le Frottement dans ce ſecond cas, eſt (392.) $= \frac{h\,a\,cof\Sigma}{H} - \frac{h\,ad\Sigma\,ſin\,\Sigma}{H}$. L'amplitude h eſt comme la largeur du parallélipipede, multipliée par la profondeur de l'impreſſion : mais la premiere quantité étant conſtante, h ſera comme la profondeur de l'impreſſion ; c'eſt-à-dire (398 & 400.) comme la puiſſance $a\,cof\Sigma - ad\Sigma\,ſin\,\Sigma$. Donc la puiſſance, qui eſt capable de vaincre le Frottement dans ce ſecond cas, ſera comme . . . . . $\frac{a^2}{H}\,(cof\Sigma - d\Sigma\,ſin\,\Sigma)^2$, ou comme $\frac{a^2}{H}\,(cof\Sigma^2 - 2d\Sigma\,cof\Sigma\,ſin\,\Sigma)$; & dans le premier cas, ou $d\Sigma = 0$, comme $\frac{a^2}{H}cof\Sigma^2$. La puiſſance du ſecond cas ſera donc moindre que celle du premier de . . . $\frac{a^2}{H}\,(2d\Sigma\,cof\Sigma\,ſin\,\Sigma)$; & la puiſſance totale du premier cas, ſera à cette différence, comme $cof\Sigma^2$ eſt à $2d\Sigma\,cof\Sigma\,ſin\,\Sigma$. Or la puiſſance primitive totale eſt $= a\,ſin\,\Sigma$: donc la différence ſera $= \frac{2ad\Sigma\,ſin\,\Sigma^2}{cof\Sigma}$. L'augmentation de la puiſſance qui anime le corps parallélement au plan, eſt $= ad\Sigma\,cof\,\Sigma$, & la diminution de celle qui ſurmonte le Frottement, $= \frac{2ad\Sigma\,ſin\,\Sigma^2}{cof\Sigma}$: donc on aura, pour le ſecond cas, $a\,ſin\,\Sigma - \varphi = na = ad\Sigma\,cof\Sigma + \frac{2ad\Sigma\,ſin\,\Sigma^2}{cof\Sigma}$, ou $n = \frac{1}{14} = \frac{d\Sigma}{cof\Sigma}(1 + ſin\,\Sigma^2)$ *. Subſtituant maintenant, d'après M. *Bilfinger* $\frac{ſin\,\Sigma}{cof\Sigma} = \frac{1}{4}$, on aura $\frac{1}{14} = \frac{d\Sigma(1+\frac{1}{17})}{4\sqrt{\frac{1}{17}}}$, & $d\Sigma = \frac{\sqrt{17}}{144}$. Or le rayon d'un cercle étant égal à l'unité, la demi-

* La puiſſance primitive totale qui animoit le corps parallélement au plan, étoit $= a\,ſin\,\Sigma$; mais ayant reçu une augmentation de $ad\Sigma\,cof\Sigma$, elle eſt donc maintenant $= a\,ſin\,\Sigma + ad\Sigma\,cof\Sigma = \theta$. Pareillement, puiſque la puiſſance φ, qui ſurmonte le frottement, a reçu une diminution de $\frac{2ad\Sigma\,ſin\,\Sigma^2}{cof\Sigma}$, & que, dans le premier cas, $\varphi = a\,ſin\,\Sigma$, par l'hypotheſe, on aura donc, dans le ſecond, $\varphi = a\,ſin\,\Sigma - \frac{2ad\Sigma\,ſin\,\Sigma^2}{cof\Sigma}$; & par conſéquent $\theta - \varphi = na$ (421.) $= ad\Sigma\,cof\Sigma + \frac{2ad\Sigma\,ſin\,\Sigma^2}{cof\Sigma}$, d'où l'on tire $n = d\Sigma\left(cof\Sigma + \frac{2\,ſin\,\Sigma^2}{cof\Sigma}\right)$. Multipliant le ſecond facteur par $cof\Sigma$, & diviſant le premier par la même quantité, on a $n = \frac{d\Sigma}{cof\Sigma}(cof\Sigma^2 + 2\,ſin\,\Sigma^2) = \frac{d\Sigma}{cof\Sigma}(cof\Sigma^2 + ſin\,\Sigma^2 + ſin\,\Sigma^2)$: mais $cof\Sigma^2 + ſin\,\Sigma^2 = 1$. Donc $n = \frac{d\Sigma}{cof\Sigma}(1 + ſin\,\Sigma^2)$. Quant aux ſubſtitutions numériques, il ne peut y avoir de difficulté ; car puiſque $\frac{ſin\,\Sigma}{cof\Sigma} = \frac{1}{4}$, il s'enſuit que $ſin\,\Sigma = \frac{cof\,\Sigma}{4}$, & $ſin\,\Sigma^2 = \frac{cof\,\Sigma^2}{16}$; mais $cof\,\Sigma^2 = 1 - ſin\,\Sigma^2$: donc $ſin\,\Sigma^2 = \frac{1 - ſin\,\Sigma^2}{16}$, d'où l'on tire $ſin\,\Sigma^2 = \frac{1}{17}$, & par conſéquent $ſin\,\Sigma = \sqrt{\frac{1}{17}}$, & $cof\,\Sigma = 4\sqrt{\frac{1}{17}}$. Subſtituant ces quantités dans la valeur de n, on a l'expreſſion même de l'Auteur : d'où l'on conclura la valeur de $d\Sigma$ par les regles ordinaires de l'Algebre & de l'Arithmétique.

Digitized by Google

circonférence est $= 3,14$, le degré $= \frac{3,14}{180}$, & la minute $= \frac{3,14}{60.180}$. Nommant donc m le nombre des minutes contenu dans $d\Sigma$, nous aurons $\frac{3,14.m}{60.180} = \frac{\sqrt{17}}{144}$, & $m = \frac{75\sqrt{17}}{3,14} = 98'\frac{1}{2}$; c'est-à-dire que le nombre m de minutes, qui exprime le mouvement qu'il faut donner au plan, est de $98'\frac{1}{2}$. Donc, en augmentant l'inclinaison du plan seulement de $1°\,38'\frac{1}{2}$ en sus de celle qu'il a, lorsque le corps A se maintient encore sur le plan sans se mouvoir, alors il commencera sa course, en accélérant sa vitesse de maniere qu'on ait au moins $u=t$: ce qui prouve, comme nous l'avons dit, la conformité de notre théorie avec la pratique.

CHAPITRE IX.

De l'effet du Frottement dans les Machines simples.

DÉFINITION XLVI.

(423.) ON appelle Machine tout instrument propre à faciliter le mouvement des corps.

DÉFINITION XLVII.

(424.) Les Machines se divisent en simples & en composées; les Machines composées sont celles dans la composition desquelles il entre deux, ou un plus grand nombre de machines simples. Les simples sont le *Levier*, le *Plan incliné*, le *Coin*, la *Vis*, le *Treuil*, ou *Cabestan*, & *la Poulie*.

SCOLIE.

(425.) On a déjà parlé du Levier à la fin du Chapitre IV. Il n'y a point de Frottement dans cette Machine, parce qu'elle n'a aucune de ses parties qui se meuve étant posée sur une surface. Tout le Chapitre VII a été presque employé au Plan incliné, & il nous a servi d'exemple pour déterminer le Frottement: mais, comme nous avons seulement considéré le cas où le corps A est déterminé à descendre, il nous reste à présent à résoudre celui dans lequel il monte, & à examiner le mouvement de rotation qui peut avoir lieu, à cause du Frottement.

DU PLAN INCLINÉ.

DÉFINITION XLVIII.

(426.) On appelle *Plan incliné*, un Plan qui n'est ni perpendicu-

Digitized by Google

laire, ni parallele à l'horiſon : ſi *LE* repréſente l'horiſon, *BE* ſera un Plan incliné. PLANC. II. FIG. 37.

Scolie.

(427.) Le corps *A* qui eſt placé ſur un Plan incliné, eſt déjà animé par une puiſſance qui agit ſur lui ; cette puiſſance eſt la gravité qui agit ſuivant la direction verticale *AD*. L'action de cette puiſſance peut bien, comme nous l'avons déjà dit, faire deſcendre le corps, mais elle ne peut le faire monter. Pour produire ce dernier effet, il faut une autre puiſſance qui agiſſe ſur le corps dans la direction *EB*, & qui ſoit non-ſeulement plus grande que la puiſſance $\alpha \, fin \, \Sigma$, qui eſt dirigée ſuivant *BE*, mais plus grande que cette puiſſance jointe à la réſiſtance du Frottement ; puiſque toutes les deux s'oppoſent au mouvement du corps ſuivant *EB*. Dans le Chapitre précédent, nous avons exprimé les puiſſances qui doivent vaincre le Frottement par $\alpha \, fin \, \Sigma$ & par θ, la premiere expreſſion pour le cas où il n'y a pas d'autre puiſſance qui agiſſe ſur le corps *A*, ſuivant la direction *AD*, que la puiſſance α ; & la ſeconde pour déſigner la réſultante quelconque qui agit pour mouvoir le parallélipipede ſuivant *BE*, laquelle eſt la même que $\alpha \, fin \, \Sigma$ dans le premier cas. Enſorte que connoiſſant, de quelque maniere que ce ſoit, la réſultante de la puiſſance, ou des puiſſances, dont l'action eſt dirigée ſuivant *BE*, ou *EB* ; & celle de la puiſſance, ou des puiſſances qui agiſſent dans la direction *AH* ; les valeurs de ces réſultantes étant ſubſtituées, dans les formules, en place de celles dont on a fait uſage dans les exemples où il s'agiſſoit de ſurmonter le Frottement ; on réſoudra tous les cas du mouvement du corps *A* ſuivant *EE*.

Proposition LVIII.

(428.) *Trouver la puiſſance néceſſaire pour vaincre le Frottement, & faire monter un parallélipipede ſur un Plan incliné.*

Nous avons déjà vu (392.), que, pour vaincre le Frottement ſur un Plan incliné, dans le cas où U eſt $= o$, il faut avoir $\alpha \, fin \, \Sigma = \frac{\alpha h \, cof \, \Sigma}{H}$, Σ déſignant l'angle *HAD*, ou *BEL* ; α la puiſſance unique qui anime le parallélipipede ſuivant *AD* ; $\alpha \, fin \, \Sigma$, celle qui l'anime ſuivant *BE* ; & $\alpha \, cof \, \Sigma$, celle qui l'anime ſuivant *AH*. Qu'une puiſſance θ agiſſe maintenant ſur le parallélipipede ſuivant *EB*, nous aurons $\theta - \alpha \, fin \, \Sigma$ pour l'expreſſion de la puiſſance réſultante ſuivant *EB*, laquelle étant ſubſtituée, dans l'équation précédente, en

Digitized by Google

place de $\alpha \, fin \, \Sigma$, nous aurons, pour le cas du Frottement surmonté, ou pour le cas où le parallélipipede est sur le point de monter le long du Plan incliné, $\theta = \alpha \, fin \, \Sigma = \frac{\alpha h \, cof \, \Sigma}{H}$; d'où l'on tire $\theta = \frac{\alpha (H \, fin \, \Sigma + h \, cof \, \Sigma)}{H}$.

COROLLAIRE I.

(429.) Si l'on avoit $fin \, \Sigma + \frac{h}{H} cof \, \Sigma < 1$, on auroit aussi $\theta < \alpha$, & par conséquent il ne seroit pas nécessaire d'une si grande force pour faire monter le parallélipipede le long du plan, que pour l'élever verticalement : le Plan incliné facilitera, dans ce cas, l'opération ; & c'est pour cela qu'il est compté au nombre des Machines.

COROLLAIRE II.

(430.) Si l'on avoit $fin \, \Sigma = 0$; ou, ce qui revient au même, si le plan étoit horisontal, il resteroit $\theta = \frac{\alpha h}{H}$, ou $\frac{\theta}{\alpha} = \frac{h}{H}$: ensorte que plus h sera petit par rapport à H, plus θ sera petit par rapport à α.

COROLLAIRE III.

(431.) Comme on peut faire h presque infiniment moindre que H, soit en diminuant la grandeur & le nombre des aspérités, soit en interposant un corps étranger entre le plan & le parallélipipede, la puissance nécessaire pour mouvoir le parallélipipede horisontalement, peut être presque infiniment plus petite que α ; mais elle ne peut jamais devenir égale à zéro, à moins qu'on n'ait $h = 0$: ce qui est impossible dans la pratique.

COROLLAIRE IV.

(432.) Si l'on avoit $fin \, \Sigma = 1$; ou, ce qui est la même chose, si le plan étoit vertical, ou s'il s'agissoit d'élever le parallélipipede sans le secours du Plan incliné, il resteroit $\theta = \alpha$: de sorte qu'il est toujours nécessaire, dans ce cas, d'employer une puissance égale au poids du corps qu'on veut élever.

COROLLAIRE V.

(433.) Si nous substituons dans la formule $\theta = \frac{\alpha (H \, fin \, \Sigma + h \, cof \, \Sigma)}{H}$, les valeurs de $H = lk$, de $h = nlk + kX$, trouvées, *Art.* 394, il en résultera $\theta = \alpha \left(fin \, \Sigma + n \, cof \, \Sigma + \frac{X}{l} cof \, \Sigma \right)$; n marquant un nombre quelconque qui dépend de la grandeur des aspérités ; l la longueur du parallélipipede, & X la profondeur de l'impression que celui-ci fait dans le plan.

COROLLAIRE

Digitized by Google

Corollaire VI.

(434.) Si l'on avoit $X=0$; ou, ce qui est la même chose, si le plan étoit très-dur, de sorte qu'il ne se fît en lui aucune impression sensible, on auroit $\theta=\alpha(\sin\Sigma+n\cos\Sigma)$.

Corollaire VII.

(435.) Dans le cas où θ a sa plus grande valeur, on est un *maximum*, on a $d\theta=\alpha(d\Sigma\cos\Sigma-nd\Sigma\sin\Sigma)=0$; ou $\sin\Sigma=\left(\frac{1}{1+n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$:* d'où l'on appercoit une singularité qui pourra paroître assez étrange, qui est que la force qu'on doit employer pour élever le corps verticalement, ne soit pas la plus grande; mais celle qu'il faudroit employer pour l'élever le long d'un Plan incliné, dans lequel on auroit $\sin\Sigma=\left(\frac{1}{1+n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Corollaire VIII.

(436.) Si l'on substitue cette valeur dans $\theta=\alpha(\sin\Sigma+n\cos\Sigma)$, on aura la plus grande force $\theta=\alpha\sqrt{(1+n^2)}$; force qui est d'autant plus grande que α, à proportion que n, ou les aspérités sont plus grandes.

Corollaire IX.

(437.) La formule ne donne pas la moindre valeur θ, à moins que $\sin\Sigma$ ne soit négatif: de sorte que la puissance θ diminue toujours à mesure que $\sin\Sigma$ diminue; & ce sinus devenant ensuite négatif, on a $\alpha\left(-\sin\Sigma+n\sqrt{(1-\sin\Sigma^2)}\right)=0$, ou $-\sin\Sigma=n\left(\frac{1}{1+n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, lorsque θ est zéro.

Proposition LIX.

(438.) *Trouver la relation entre la puissance* λ *& la vîtesse* u *avec*

* Car de l'équation $\alpha(d\Sigma\cos\Sigma-nd\Sigma\sin\Sigma)=0$, on tire, en divisant par $\alpha d\Sigma$, & en transposant $n\sin\Sigma=\cos\Sigma=(1-\sin\Sigma^2)^{\frac{1}{2}}$; donc, en quarrant, $n^2\sin\Sigma^2=1-\sin\Sigma^2$, & par conséquent $\sin\Sigma=\left(\frac{1}{1+n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. En substituant cette valeur de $\sin\Sigma$ dans celle de $\cos\Sigma$, on trouvera $\cos\Sigma=n\left(\frac{1}{1+n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Quant à la conséquence que ce Corollaire fournit, nous ne connoissons aucune expérience qui puisse la justifier: cependant on se convaincra aisément de son évidence, en considérant que lorsque le Plan incliné est très-proche de la situation verticale, la puissance θ qui tire le corps parallélement au plan est à très-peu près égale à la puissance α qu'il faudroit employer pour l'élever verticalement; & que si, dans ce cas, n est d'une grandeur sensible; c'est-à-dire, si la grandeur des aspérités n'est pas susceptible d'être négligée, il peut arriver que θ doive être alors plus grand que α. Si l'on pouvoit avoir $n=0$, ce qui auroit lieu, si le plan & le parallélipipede étoient infiniment lisses, on auroit alors $\sin\Sigma=1$, & $\theta=\alpha$ (432.).

laquelle on veut que le parallélipipede s'éleve par le Plan incliné.

Par ce que nous avons démontré (409.), on a trouvé . . . . . $u=\left(U^2+\frac{2xf\sin\Sigma}{A}-\frac{2Dhx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$: $f\sin\Sigma$ marquant la puiſſance qui anime le parallélipipede parallélement au plan. Subſtituant maintenant à la place de $f\sin\Sigma$, l'expreſſion $\lambda-f\sin\Sigma$, on aura $u=$ . . . . . $\left(U^2+\frac{2x(\lambda-f\sin\Sigma)}{A}-\frac{2Dhx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$, U exprimant la vîteſſe acquiſe par le parallélipipede, au moment qu'il eſt ſur le point de vaincre la force φ de l'obſtacle & des aſpérités.

COROLLAIRE I.

(439.) Cette force φ a été trouvée (410.) $=Dh$; on aura donc auſſi $u=\left(U^2+\frac{2x(\lambda-f\sin\Sigma)}{A}-\frac{2\varphi x}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$.

COROLLAIRE II.

(440.) Si la vîteſſe U étoit tellement petite, qu'on pût, ſans erreur ſenſible, faire $U=0$, il reſteroit $u=\left(\frac{2x}{A}(\lambda-f\sin\Sigma-Dh)\right)^{\frac{1}{2}}$, ou $u=\left(\frac{2x}{A}(\lambda-f\sin\Sigma-\varphi)\right)^{\frac{1}{2}}$: ou bien à cauſe que, dans ce cas, (392.) $\varphi=\frac{h}{H}(\cos\Sigma)$*, $u=\left(\frac{2x}{A}(\lambda-f\sin\Sigma-\frac{h}{H}\cos\Sigma)\right)^{\frac{1}{2}}$.

COROLLAIRE III.

(441.) En quarrant ces équations, & en ordonnant, on trouvera $\lambda=f\sin\Sigma+Dh+\frac{Au^2}{2x}=f\sin\Sigma+\varphi+\frac{Au^2}{2x}=f\sin\Sigma+\frac{h}{H}\cos\Sigma+\frac{Au^2}{2x}$.

PROPOSITION LX.

(442.) *Trouver l'eſpace parcouru en montant par le parallélipipede par ſa relation avec la vîteſſe.*

Par ce qui a été démontré (413.), on a trouvé $x=\frac{A(u^2-U^2)}{2(\lambda-Dh)}$,

* Il nous paroît difficile de concevoir ce paſſage : l'Auteur renvoie à *l'Article* 392 pour la ſubſtitution de la valeur de φ; mais d'après cet Article, il nous ſemble que $\varphi=\frac{h}{H}f\cos\Sigma$, & non $\frac{h}{H}\cos\Sigma$, comme on le trouve dans l'original. Le réſultat de la ſubſtitution que fait l'Auteur, nous indique bien qu'il y a une faute d'impreſſion, qu'on a mis $\cos\Sigma$ pour $f\cos\Sigma$; mais il reſte toujours à ſçavoir pourquoi f ne ſe trouve pas dans la valeur de φ, comme paroît l'exiger l'Article auquel l'Auteur renvoie. Si notre remarque eſt juſte, on doit avoir $u=$ . . . . . $\left(\frac{2x}{A}\left(\lambda-f\left(f\sin\Sigma+\frac{h}{H}\cos\Sigma\right)\right)\right)^{\frac{1}{2}}$, ou $=\left(\frac{2x}{A}\left(\lambda-f\sin\Sigma-\frac{h}{H}f\cos\Sigma\right)\right)^{\frac{1}{2}}$, & non pas $u=\left(\frac{2x}{A}(\lambda-f\sin\Sigma-\frac{h}{H}\cos\Sigma)\right)^{\frac{1}{2}}$. Il faut appliquer ceci à tous les endroits ſuivants, où l'Auteur emploie la valeur de u, après y avoir ſubſtitué la valeur de φ.

Digitized by Google

θ exprimant la puiſſance qui anime le parallélipipede parallélement au plan. Subſtituant maintenant à la place de θ l'expreſſion $\lambda - \alpha \, \mathit{ſin}\, \Sigma$, on aura $x = \frac{A(u^2 - U^2)}{2(\lambda - \alpha \, \mathit{ſin}\, \Sigma - Dh)}$, ou $x = \frac{A(u^2 - U^2)}{2(\lambda - \alpha \, \mathit{ſin}\, \Sigma - \varphi)}$. PLANC. II.

COROLLAIRE.

(443.) Si la viteſſe U étoit tellement petite, qu'on pût, ſans erreur ſenſible, ſuppoſer $U = 0$, on auroit $x = \frac{Au^2}{2(\lambda - \alpha \, \mathit{ſin}\, \Sigma - Dh)}$; ou $x = \frac{Au^2}{2(\lambda - \alpha \, \mathit{ſin}\, \Sigma - \varphi)} = \frac{Au^2}{2(\lambda - \alpha \, \mathit{ſin}\, \Sigma - \frac{h}{H} \, \mathit{cof}\, \Sigma)}$.

PROPOSITION LXI.

(444.) *Trouver l'eſpace parcouru en montant par le parallélipipede, par ſa relation avec le temps employé à le parcourir.*

Par ce qui a été démontré (417.), on a trouvé $x = Ut + \frac{t^2(1 - Dh)}{2A}$; θ exprimant la puiſſance qui anime le parallélipipede parallélement au plan. Subſtituant donc à la place de θ l'expreſſion $\lambda - \alpha \, \mathit{ſin}\, \Sigma$, on aura $x = Ut + \frac{t^2(\lambda - \alpha \, \mathit{ſin}\, \Sigma - Dh)}{2A}$, ou $x = Ut + \frac{t^2(\lambda - \alpha \, \mathit{ſin}\, \Sigma - \varphi)}{2A}$.

COROLLAIRE.

(445.) Si la viteſſe U étoit aſſez petite pour qu'on pût, ſans erreur ſenſible, ſuppoſer $U = 0$, il reſteroit $x = \frac{t^2}{2A}(\lambda - \alpha \, \mathit{ſin}\, \Sigma - Dh) = \frac{t^2}{2A}(\lambda - \alpha \, \mathit{ſin}\, \Sigma - \varphi) = \frac{t^2}{2A}(\lambda - \alpha \, \mathit{ſin}\, \Sigma - \frac{h}{H} \, \mathit{cof}\, \Sigma)$.

PROPOSITION LXII.

(446.) *Trouver le mouvement de rotation que doivent prendre les corps placés ſur un Plan incliné, lorſqu'ils ſont ſans mouvement progreſſif.* FIG. 34 & 35.

Quelles que ſoient les puiſſances qui animent le corps A, qui poſe, ſeulement par un point C, ſur le Plan incliné FG; elles peuvent ſe décompoſer en deux autres, l'une qui agiſſe parallélement, & l'autre perpendiculairement au plan : toutes les deux s'exerceront par réaction dans le point C, & aux diſtances AH, CH du centre de gravité A du corps. La gravité α qui agit dans la direction de la verticale AD, ſe décompoſera dans les deux puiſſances $\alpha \, \mathit{ſin}\, \Sigma$, & $\alpha \, \mathit{cof}\, \Sigma$: & s'il ſe joint à la premiere une autre puiſſance λ, poſitive, ou négative, qui agiſſe au centre de gravité, la réaction de ces puiſſances, qui eſt la réſiſtance du Frottement, équivaudra à la ſomme $\alpha \, \mathit{ſin}\, \Sigma \pm \lambda$ de ces deux puiſſances. La différencielle

Digitized by Google

de l'angle de rotation qu'elles produiront, ſera donc (129 & *ſuiv. juſqu'à* 159) $= \frac{dtſdt(\alpha \, ſin\, \Sigma \pm \lambda)AH \pm dtſdt\alpha \, coſ\, \Sigma.CH}{S}$; le ſigne + du ſecond terme ayant lieu, lorſque la perpendiculaire AH tombe au-deſſous de l'appui C; & le ſigne —, quand elle tombe au-deſſus : enſorte que cette quantité étant poſitive, le corps tournera vers la partie qui eſt au-deſſous de l'appui C; & au contraire, ſi elle eſt négative.

COROLLAIRE I.

(447.) Si l'on ſuppoſe que $\lambda = n\alpha \, ſin\, \Sigma$, n marquant un nombre quelconque plus grand ou plus petit que l'unité, en ſubſtituant cette valeur dans l'expreſſion de l'angle de rotation, elle deviendra . . . $\frac{dtſdt(1 \pm n)\alpha \, ſin\, \Sigma.HA \pm dtſdt\alpha \, coſ\, \Sigma.CH}{S}$.

COROLLAIRE II.

(448.) Puiſque $ſin\, \Sigma : coſ\, \Sigma :: DH.AH$, on a $AH.ſin\, \Sigma = DH\, coſ\, \Sigma$: ſubſtituant cette valeur dans la derniere expreſſion de l'angle de rotation, elle ſe changera en celle-ci, $\frac{dtſdt\, coſ\, \Sigma(DH(1 \pm n) + CH)}{S} = \ldots \frac{dtſdt\, coſ\, \Sigma(DC \pm n.DH)}{S}$.

COROLLAIRE III.

(449.) Si, dès le commencement de l'action, on avoit $DC - n.DH = 0$; ou, ce qui revient au même, ſi $\alpha \, ſin\, \Sigma : n\alpha \, ſin\, \Sigma = \lambda :: DH : DC$, le corps ne tourneroit pas.

COROLLAIRE IV.

(450.) Si la gravité eſt la ſeule puiſſance qui agiſſe ſur le corps, on aura $n = 0$, & l'expreſſion de l'angle de rotation deviendra $= \frac{dtſdt\, coſ\, \Sigma \, DC}{S}$.

COROLLAIRE V.

(451.) Si l'on avoit $DC = 0$ dès le commencement de l'action, le corps ne tourneroit point : mais ſi DC a une valeur quelconque, ou, comme on s'exprime généralement dans la Méchanique, ſi la verticale AD, qui paſſe par le centre de gravité A, tombe au-dehors de l'appui C, le corps tournera.

PROPOSITION LXIII.

(452.) *Trouver la rotation que doivent prendre les corps placés ſur un Plan incliné, lorſque le Frottement étant vaincu, le point d'appui eſt déjà en mouvement.*

Digitized by Google

La force, ou la réſiſtance réunie de l'obſtacle & des aſpérités, eſt (384.) $\varphi = \frac{i(hk')}{i(hi'+ki)}\left(\frac{1}{2}AU^2\cos\Sigma^2 + \alpha\cos\Sigma(X+Z)\right)$; & elle eſt dirigée ſuivant CH parallélement au plan GF, & paſſe à la diſtance AH du centre de gravité du corps A: l'angle de rotation ſera donc (129 *& ſuiv.*) $= \frac{dt}{S}\int\frac{i(hk')dt.AH}{i(hi'+ki)}\left(\frac{1}{2}AU^2\cos\Sigma^2 + \alpha\cos\Sigma(X+Z)\right) \pm \frac{dt}{S}\int\lambda dt\cos\Sigma.CH$.

Corollaire I.

(453.) La force, ou la réſiſtance $\varphi = \frac{i(hk')}{i(hi'+ki)}\left(\frac{1}{2}AU^2\cos\Sigma^2 + \alpha\cos\Sigma(X+Z)\right)$ eſt (383.) moindre que la puiſſance $\alpha\sin\Sigma$, qui réſulte de la gravité, & qui eſt dirigée parallélement au plan. Soit donc ſuppoſé $\alpha\sin\Sigma - \lambda = \varphi$; en mettant cette valeur dans l'expreſſion précédente de l'angle de rotation, elle deviendra $\frac{dt\int dt(\alpha\sin\Sigma-\lambda).AH \pm dt\int\alpha dt\cos\Sigma.CH}{S}$; ou en ſubſtituant (448.) en place de $\sin\Sigma.AH$, ſa valeur $DH.\cos\Sigma$, & réduiſant, on aura l'angle de rotation $= \frac{dt\int\alpha dt\cos\Sigma.DC - dt\int\lambda dt.AH}{S}$.

Corollaire II.

(454.) Si l'on avoit $DC = 0$; ou ſi la verticale AD, qui paſſe par le centre de gravité A, paſſoit auſſi par l'appui C, l'expreſſion de l'angle de rotation ſe réduiroit à $-\frac{dt\int\lambda dt.AH}{S}$.

Corollaire III.

(455.) Le corps tournera donc vers la partie ſupérieure du plan, lorſque l'appui C eſt en mouvement, quoique la verticale AD paſſe par le point d'appui.

Corollaire IV.

(456.) Non-ſeulement le corps tournera dans ce ſens, dans le cas où $DC = 0$, mais encore dans tous ceux où l'on a $\lambda.AH > \alpha\cos\Sigma.DC$: de maniere que, quoique DC ſoit poſitive, ou que la verticale AD tombe au-deſſous de l'appui C, le corps peut tourner négativement, ou vers la partie ſupérieure du plan.

Scolie.

(457.) Ce qu'on vient de dire fait voir l'erreur de ceux qui, n'ayant pas examiné les corps en mouvement ſur le Plan incliné, ont avancé qu'ils devoient toujours tourner vers la partie inférieure du plan, toutes les fois que la verticale AD tombe plus bas que l'appui C.

Digitized by Google

PLANC. II.

FIG. 39.

DU COIN.

DÉFINITION XLIX.

(458.) On appelle communément *Coin* un Prisme tel que *ABCD*.

SCOLIE.

(459.) Si l'on place le coin entre deux corps *A* & *B*, & qu'on
FIG. 40. l'introduise entre ces deux corps par le moyen de la percussion, ou par l'action d'une puissance qui agisse en *C*, & dans la direction *CD*; les deux corps se sépareront, quoique les puissances qui les unissent soient plus grandes que celle qui agit sur le Coin.

PROPOSITION LXIV.

(460.) *Le Coin se réduit au Plan incliné.*

Quant à ce qui regarde l'effet, c'est la même chose de considérer les deux corps *A* & *B* comme fixes, & le Coin en mouvement, ou au contraire, le Coin fixe, & les deux corps en mouvement, puisque, dans l'un & l'autre cas, l'action dépend de la vîtesse respective. Nous pouvons donc supposer le Coin fixe, & qu'une puissance quelconque est appliquée aux corps, & agit sur eux dans la direction *DC*; mais on voit que ce cas se réduit à faire monter, ou à pousser les deux corps *A* & *B* le long des deux Plans inclinés *DI*, *DL*. Donc le Coin se réduit au Plan incliné.

COROLLAIRE I.

(461.) Les mêmes formules qui ont exprimé les effets du Plan incliné, doivent par conséquent exprimer ceux du Coin.

SCOLIE I.

FIG. 41. (462.) Pour l'ordinaire les deux corps *A* & *B* ne sont qu'un seul & même corps *M*, qu'on veut séparer ou fendre en deux, par le moyen du Coin, en augmentant la fente *EKF* vers *KM*. La puissance qui résiste vient de l'union, de la cohésion, ou de la force des particules, ou fibres du corps en *K*, & c'est cette résistance, ou cette cohésion, qu'il faut vaincre, ou rompre, par le moyen des puissances qui exercent leur action en *G* & *H*. Or, comme les fibres en *K* sont élastiques, elles cedent, ou se mettent en mouvement avant de se rompre. Ceci arrive seulement à un certain nombre de fibres, & par conséquent il y a un point tel que *M*, où elles se maintiennent fermes, & sans aucun mouvement, & sur lequel tournent les deux corps *A* & *B*. Les lignes *GKM*, *HKM* agissent donc

Digitized by Google

comme deux leviers de la seconde espece, fixes en M, au moyen desquels les puissances appliquées en G & H tendent à vaincre la résistance qui agit en K. La puissance en K sera donc à la puissance en G, comme MG est à MK : & pareillement elle sera à la puissance placée en H, comme MH est à MK.

Corollaire II.

(463.) Si l'on appelle α la puissance en K, celle placée en G sera $= \frac{MK}{MG}.\alpha$; & celle placée en H sera $= \frac{MK}{MH}.\alpha$.

Corollaire III.

(464.) L'action de ces deux puissances est perpendiculaire à MG, MH ; car les corps A & B tournant sur le point M, le mouvement des points G & H est dirigé perpendiculairement aux rayons MG, MH.

Scolie II.

(465.) Les fibres qui résistent en K sont de différentes especes, & placées à différentes distances du centre immobile M : les forces qu'elles exerceront, seront, par conséquent, différentes les unes des autres ; mais nous pouvons supposer que K est le centre de toutes ces fibres, ou le considérer comme le point où elles produiroient un effet égal, si elles y étoient toutes réunies. On doit entendre la même chose des puissances qui agissent en G & en H, puisque ces points doivent se prendre comme les centres de réunion de toutes les forces qui agissent pour former les impressions que fait le Coin autour de G & H, & dont les amplitudes sont H & H'.

Proposition LXV.

(466.) *Trouver la puissance nécessaire pour mettre le Coin en mouvement, vaincre son frottement, & pour diviser les corps par son moyen.*

Puisque le Coin se réduit au Plan incliné (460), nous pouvons nous servir de l'équation $\theta = \frac{\alpha(H \sin\Sigma + h\cos\Sigma)}{H}$ (428.), dans laquelle θ marque la puissance qui est dirigée suivant DI, & qui est nécessaire pour vaincre le frottement. Ainsi tout se réduit à substituer, dans cette équation, les vraies valeurs de θ, α & Σ. Que n soit la puissance qui agit sur le Coin en C, suivant la direction CD, si l'on mene la ligne GO parallele à IC, on aura $\frac{DO}{DG}.\frac{1}{n} = \theta$, n exprimant un nombre quelconque plus grand que l'unité, afin de ne prendre de la puissance n que la partie $\frac{1}{n}$ qui surmonte le frottement du

Digitized by Google

plan *ID*. De plus, l'angle *DGM* sera $= \Sigma$, puisque, dans le Plan incliné, Σ marquoit l'angle que forme la direction de la puissance en *G*, avec la perpendiculaire à *ID* : nous aurons donc, en abaissant la perpendiculaire *DN* sur *GM*, $\frac{DN}{DG} = \sin \Sigma$, & $\frac{NG}{DG} = \cos \Sigma$. La puissance qui agit en *G* est (463.) $= \frac{MK}{MG} \cdot \alpha$; c'est l'expression qu'il faut substituer, dans la formule, à la place de α seul. Substituant donc toutes ces valeurs dans l'équation de *l'Art.* 428, nous aurons $\frac{DO}{DG} \cdot \frac{\pi}{n} = \ldots$ $\frac{\frac{MK}{MG} \cdot \alpha \left(\frac{DN.H}{DG} + \frac{NG.h}{DG} \right)}{H}$, ou $\frac{\pi}{n} = \frac{MK.\alpha}{MG.DO.H} (DN.H + NG.h.)$ On trouvera de la même maniere que l'autre partie $\frac{(n-1)\pi}{n}$ de la puissance π qui surmonte le frottement du plan *LD*, est $= \frac{MK.\alpha}{MH.DP.H'} (DQ.H' + QH.h')$. Donc $\frac{\pi}{n} + \frac{(n-1)\pi}{n} = \pi = \frac{MK.\alpha}{MG.DO.H} (DN.H + NG.h) + \ldots\ldots\ldots$ $\frac{MK.\alpha}{MH.DP.H'} (DQ.H' + QH.h')$.

COROLLAIRE. I.

(467.) Si le point *M* étoit infiniment éloigné de *K* ; & si en même temps on supposoit le frottement nul, ou $= 0$, on auroit $\pi = \frac{\alpha.DN}{DO} + \frac{\alpha.DQ}{DP}$; mais, dans ce cas, *GM* & *HM* sont paralleles à *CM*, ou $DN = GO$, & $DQ = HP$: donc $\ldots\ldots\ldots$ $\frac{\alpha.GO}{DO} + \frac{\alpha.HP}{DP} = \frac{\alpha.IC}{CD} + \frac{\alpha.CL}{CD} = \frac{\alpha.IL}{CD}$; ce qui donne $\alpha : \pi :: CD : IL$.

SCOLIE I.

(468.) Ce rapport $\frac{\pi}{\alpha} = \frac{IL}{CD}$, est celui que donnent généralement tous les Auteurs pour la relation des forces π & α qu'exerce le Coin. Cette relation n'est certaine que lorsque le frottement est zéro, & que le point *M* est à une distance infinie ; cas qui sont l'un & l'autre impossibles. Le dernier peut seulement s'admettre lorsqu'il est question d'écarter avec le Coin deux corps déjà séparés, dans une direction parallele à *IL* ; parce que, dans ce cas, le point *K* tombe sur les appuis *G* & *H* : & *M* est comme à une distance infinie, à cause que *GM* & *HM* sont paralleles à *CD*.

SCOLIE II.

(469.) On peut de même supposer que $MK = MG$, & le frottement presque nul au commencement de l'action du Coin, ou lorsque celui-ci n'est encore enfoncé dans le corps que d'une quantité infiniment

Digitized by Google

infiniment petite; car, dans ce cas, les points M, K, G & H, se confondent, & le frottement peut être peu sensible. Dans tous les autres cas, l'égalité $\frac{s}{a} = \frac{IL}{CD}$, que donnent généralement tous les Auteurs, ne peut avoir lieu, & l'erreur qui en résulte devient notable.

Corollaire II.

(470.) Si la partie IDC du Coin étoit égale & semblable à l'autre partie LDC, comme on le fait communément, on auroit $MH = MG$, $DP = DO$, $DQ = DN$, $QH = NG$, $H = H'$, & $h = h'$; ce qui réduit l'équation à $\nu = \frac{MK.2a}{MG.DO.H}(DN.H + NG.h)$.

Corollaire III.

(471.) La puissance ν, nécessaire pour mettre le Coin en mouvement, est, selon tous les Auteurs, & selon ce qu'on a dit (467.) $\nu = \frac{a.IL}{CD} = \frac{2a.IC}{CD} = \frac{2a.GO}{DO} = \frac{MG.H.2a.GO}{MG.DO.H}$; & suivant notre théorie, $\nu = \frac{MK.2a}{MG.DO.H}(DN.H + NG.h)$. La force indiquée par tous les Auteurs, sera donc à celle fournie par notre théorie, comme $MG.GO.H$, est à $MK(DN.H + NG.h)$, ou comme $\frac{MG.GO}{MK}$ est à $DN + \frac{NG.h}{H}$; d'où l'on voit que cette force peut, suivant notre théorie, être infiniment moindre que celle qu'ont donné tous les Auteurs; & l'on voit, par conséquent aussi, dans quelle erreur ils sont tombés.

Proposition LXVI.

(472.) *Déterminer dans quelle circonstance le Coin retournera en arriere, la puissance ν cessant d'agir.*

Lorsque la puissance ν cesse d'agir, ou que $\nu = 0$, le frottement devient négatif; par conséquent l'équation qui exprime le cas où le frottement est surmonté, devient $\frac{DN.H - NG.h}{MG.DO.H} + \frac{DQ.H' - QH.h'}{MH.DP.H'} = 0$; & lorsque les deux moitiés ICD, LCD du Coin sont égales & semblables, $DN.H - NG.h = 0$; ou $\frac{DN}{NG} = \frac{h}{H}$.

Corollaire I.

(473.) Il suit de là que toutes les fois qu'on aura $\frac{DN}{NG} > \frac{h}{H}$, le Coin retournera en arriere, aussi-tôt que la puissance ν cessera d'agir.

Corollaire II.

(474.) La rétrogradation du Coin ne dépend donc pas seulement

Digitized by Google

de la grandeur de l'angle IDL, comme le disent généralement tous les Auteurs, mais de cet angle, & des rapports $\frac{DN}{NG}$ & $\frac{k}{H}$.

SCOLIE.

(475.) Il y a plusieurs autres instruments qui se réduisent aussi au Coin & au Plan incliné, comme le Couteau, & la Hache avec laquelle on taille & divise les bois. L'action de la Hache dépend de la vitesse avec laquelle elle tombe, ou elle choque. Ainsi l'équation qui exprime son effet, ne dépend pas de celle qui détermine le cas dans lequel on suppose la puissance employée à vaincre le frottement; mais de celle dans laquelle on suppose le frottement déja vaincu, & que la Hache, le Coin, ou le Plan incliné, se meut avec une certaine vitesse.

PROPOSITION LXVII.

(476.) *Déterminer l'effet de la Hache.*

Comme la Hache est un instrument qui se réduit au Coin & au Plan incliné, nous pouvons faire usage de l'équation (438.) $u = \left(U^2 + \frac{2x(\lambda - \alpha \sin \Sigma)}{A} - \frac{2Dkx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$, & y substituer (466.) $\frac{DN}{DG}$ en place de $\alpha \sin \Sigma$, & $\frac{MK}{MG}.\alpha$ en place de α seul. En outre, la puissance λ est, dans ce cas, $= 0$, parce que la Hache agit par la seule vitesse U avec laquelle elle surmonte le frottement. Substituant donc toutes ces quantités, on aura $u = \left(U^2 - \frac{2x.\frac{MK.\alpha}{MG} \cdot \frac{DN}{DG}}{A} - \frac{2Dkx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$. Mais lorsque la Hache a produit tout son effet, elle s'arrête, & dans ce moment on a $u = 0$: donc, quand la Hache a produit tout son effet, nous avons $U^2 = \frac{2x}{A}\left(\frac{MK.DN.\alpha}{MG.DG} + Dh\right)$, ou $x = \frac{\frac{1}{2}A\,U^2.MG.DG}{MK.DN.\alpha + MG.DG.Dh}$. Comme la quantité x est l'espace parcouru suivant le plan DI; en nommant ζ celui parcouru suivant le plan DC, nous aurons $x : \zeta :: ID : DC$, ou $x = \frac{DI.\zeta}{DC}$: cette valeur étant substituée dans l'équation, donne l'espace parcouru par la Hache, ou son effet $\zeta = \frac{\frac{1}{2}A.U^2.MG\,DG.CD}{ID(MK.DN.\alpha + MG.DG.Dh)}$; mais, par la construction, $\frac{DG.CD}{ID} = DO$: donc $\zeta = \frac{\frac{1}{2}A.U^2.MG.DO}{MK.DN.\alpha + MG.DG.Dh}$.

COROLLAIRE.

(477.) L'effet de la Hache sera donc constamment proportionnel au produit de sa masse A, ou de sa gravité, par le quarré U^2 de la vitesse avec laquelle elle frappe le bois.

Digitized by Google

DE LA VIS.

PLANC. II. FIG. 43.

DÉFINITION L.

(478.) La *Vis* eſt un Plan incliné appliqué autour d'un Cylindre concave *ABCD*, ſur lequel tourne un autre Plan incliné ſemblable au premier qui environne un autre Cylindre convexe *AC*.

DÉFINITION LI.

(479.) Le Cylindre convexe, avec le Plan qui lui eſt appliqué, eſt ce qu'on appelle vulgairement la *Vis*, & on donne le nom d'*Ecrou* au Cylindre concave. On donne auſſi au premier le nom de *Vis mâle*, & au ſecond le nom de *Vis femelle*; ces dernieres dénominations ſont ſur-tout employées par les ouvriers.

DÉFINITION LII.

(480.) Chaque tour que font les Plans inclinés appliqués aux Cylindres, s'appelle *Spire*, *Filet*, ou *Pas de la Vis*.

SCOLIE.

(481.) S'il y a un poids Q, ou une puiſſance appliquée en F, dirigée ſuivant l'axe EF de la Vis, & une autre appliquée en P, au levier EP, agiſſant ſuivant une direction perpendiculaire au même axe; l'action de cette puiſſance fera tourner la Vis, ſon Plan incliné s'élevant le long de celui de l'écrou, & par conſéquent elle élevera le poids Q, ou ſurmontera la puiſſance appliquée en F.

COROLLAIRE.

(482.) De ceci on pourroit conclure que la Vis ne doit pas ſe compter au nombre des Machines ſimples, puiſqu'elle eſt compoſée d'un Plan incliné & d'un Levier; mais on ne peut pas conteſter qu'elle n'en ſoit toujours une, tant que la longueur du Levier n'excede pas le rayon du Cylindre.

PROPOSITION LXVIII.

(483.) *Trouver la puiſſance néceſſaire pour vaincre le Frottement, & mettre la Vis en mouvement.*

La valeur de la puiſſance qui agit parallélement aux filets de la Vis, eſt (428.) $\theta = \frac{a(H\sin\Sigma + h\cos\Sigma)}{H}$. La puiſſance qui preſſe les deux plans l'un contre l'autre eſt ſuppoſée en F, & dirigée ſuivant EF.

Digitized by Google

Suppoſons que cette puiſſance ſoit repréſentée par α; l'angle que forme ſa direction avec la perpendiculaire aux plans, ou aux filets, eſt le même que celui que forment ces mêmes filets avec la perpendiculaire à l'axe EF. On peut par conſéquent conſerver les caracteres α & Σ, ils déſigneront les mêmes choſes que dans la formule; ſçavoir, α la puiſſance appliquée en F, & dirigée ſuivant l'axe EF; & Σ l'angle que forment les filets de la Vis avec la perpendiculaire au même axe. Cela poſé, la puiſſance π qui doit vaincre le frottement, & qu'on ſuppoſe placée en P, agiſſant perpendiculairement à l'axe, & à la diſtance R de cet axe, on aura $R\pi$ pour ſon moment: & ſi nous nommons r la diſtance perpendiculaire de l'axe aux filets, ou le rayon de la Vis, on aura $r\theta = \frac{r\alpha\,(H \mathit{fin}\,\Sigma + h \mathit{cof}\,\Sigma)}{H}$ pour le moment du frottement; ce qui nous donnera pour le vaincre, $R\pi = r\theta = \frac{r\alpha(H \mathit{fin}\,\Sigma + h \mathit{cof}\,\Sigma)}{H}$, d'où l'on tire $\pi = \frac{r\alpha}{R.H}(H \mathit{fin}\,\Sigma + h \mathit{cof}\,\Sigma)$.

COROLLAIRE I.

(484.) Donc ſi la puiſſance π étoit moindre que $\frac{r\alpha}{R.H}(H \mathit{fin}\,\Sigma + h \mathit{cof}\,\Sigma)$, la Vis ne pourroit tourner, & par conſéquent elle reſteroit ſans mouvement.

COROLLAIRE II.

(485.) La vis étant une fois miſe en mouvement, & y étant maintenue avec une viteſſe conſtante, elle doit continuer de ſe mouvoir avec la même viteſſe, ſi les puiſſances qui agiſſent ſe détruiſent mutuellement; ce qui arrive tant que la puiſſance appliquée eſt ſuffiſante pour ſurmonter le frottement, qui eſt toujours le même, tant dans le cas du mouvement, qu'au moment où il eſt ſurmonté. La puiſſance néceſſaire pour maintenir la Vis en mouvement, avec une viteſſe conſtante déjà acquiſe, eſt donc auſſi $\pi = \ldots\ldots\ldots \frac{r\alpha}{R.H}(H \mathit{fin}\,\Sigma + h \mathit{cof}\,\Sigma)$.

COROLLAIRE III.

(486.) Si l'on ſuppoſe le frottement nul, ou ſi $h = 0$, l'équation qui exprime le cas où la Vis commence à ſe mettre en mouvement, ſe changera en $\pi = \frac{r.\alpha.\mathit{fin}\,\Sigma}{R}$: ou, ſi nous appellons C la circonférence qui décrira le point P où l'on applique la puiſſance π, & c la circonférence de la Vis, cette puiſſance π ſera auſſi $= \frac{c.\alpha\,\mathit{fin}\,\Sigma}{C}$. Mais le rayon eſt à $\mathit{fin}\,\Sigma$, comme la circonférence c eſt à la diſtance d'un filet de la Vis à l'autre; ou, comme on s'exprime commu-

Digitized by Google

nément, à la *hauteur du pas de la Vis* : donc, en nommant a cette hauteur, on aura $c \sin \Sigma = a$, & $\pi = \frac{a.a}{C}$; d'où l'on tire $\Sigma : \alpha :: a : C$; c'eſt-à-dire, la puiſſance qui anime la Vis eſt à celle qu'on doit vaincre par le moyen de cette machine, comme la diſtance d'un filet à l'autre, ou la hauteur du pas, eſt à la circonférence C que décrit la puiſſance π.

Corollaire IV.

(487.) Comme cette théorie eſt celle que les Auteurs enſeignent généralement, il s'enſuit que, dans leurs calculs, ils ont fait abſtraction du frottement.

Proposition LXIX.

(488.) *Trouver le cas dans lequel la Vis rétrogradera, la puiſſance π ceſſant d'agir.*

Lorſque la puiſſance π ceſſe d'agir, le frottement devient négatif, & l'équation, pour le cas où la vis rétrogradera, en ſurmontant le frottement, ſera $o = \frac{r.a}{R.H}(H \sin \Sigma - h \cos \Sigma)$, ou $\sin \Sigma = \frac{h}{H} \cos \Sigma$. Donc tant qu'on aura $\sin \Sigma > \frac{h}{H} \cos \Sigma$, la Vis rétrogradera auſſitôt que la puiſſance π ceſſera d'agir.

Proposition LXX.

(489.) *Trouver la relation entre la puiſſance appliquée à la Vis, & la viteſſe avec laquelle elle ſe mouvera après avoir ſurmonté le frottement.*

La formule qui correſpond à ce cas eſt (438.) $u = \ldots\ldots\ldots \left(U^2 + \frac{2x(\lambda - \alpha \sin \Sigma)}{A} - \frac{2Dhx}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$; ſubſtituant dans cette formule $\frac{R\lambda}{r}$, au lieu de λ ſeul, en ſuppoſant que λ ſoit la puiſſance qui qui agiſſe à l'extrémité P du levier : & ſuppoſant de plus, comme il convient, que la viteſſe U avec laquelle la Vis commence à ſurmonter le frottement, eſt négligeable, ou que $U = o$, on aura $\frac{Au^2}{2x} = \frac{R\lambda}{r} - \alpha \sin \Sigma - Dh$; ou en ſubſtituant (410.) la force φ du frottement en place de Dh, on aura $\frac{Au^2}{2x} = \frac{R\lambda}{r} - \alpha \sin \Sigma - \varphi = \frac{R\lambda}{r} - \alpha \sin \Sigma - \frac{h}{H} \cos \Sigma$.

Proposition LXXI.

(490.) *Trouver la relation entre le temps, la puiſſance appliquée à la Vis, & l'eſpace que parcourra la Vis dans la direction de ſon axe.*

Digitized by Google

PLANCH. II. La formule qui correspond à ce cas est (445.) $x = \ldots\ldots \frac{t^2}{2A}(\lambda - \alpha \sin \Sigma - Dh)$, en y substituant $\frac{R\lambda}{r}$ en place de λ seul. Mais x exprime l'espace que parcourent respectivement les deux plans, & cet espace est à celui que parcourt la Vis dans le sens de son axe, & que nous pouvons appeller ζ, comme 1 est à $\sin \Sigma$. Donc $x = \frac{\zeta}{\sin \Sigma}$, ce qui donne $\zeta = \frac{t^2 \sin \Sigma}{2A}\left(\frac{R\lambda}{r} - \alpha \sin \Sigma - Dh\right) = \ldots \frac{t^2 \sin \Sigma}{2A}\left(\frac{R\lambda}{r} - \alpha \sin \Sigma - \varphi\right) = \frac{t^2 \sin \Sigma}{2A}\left(\frac{R\lambda}{r} - \alpha \sin \Sigma - \frac{h}{H} \cos \Sigma\right)$.

DU TREUIL, ou CABESTAN.

DÉFINITION LIII.

FIG. 43. & 44. (491.) On appelle *Treuil* un Cylindre qu'on fait tourner par le moyen d'un levier qu'on y applique.

Le Treuil, ou Cylindre AB, soit qu'il soit horisontal, vertical, ou oblique, étant soutenu par les deux piliers, ou appuis C, D, tourne, par l'action d'une puissance appliquée en F sur le levier FE, qui est perpendiculaire à l'axe, & fixé dans le Cylindre; & cette puissance est dirigée perpendiculairement à l'axe & au levier. Cette machine doit, en conséquence, vaincre la puissance placée en Q, dont la direction est aussi perpendiculaire au Cylindre sur lequel elle agit, soit par une ligne flexible QG qui s'enveloppe autour du même Cylindre, à mesure qu'il tourne; soit parce que QG est un autre levier fixé aussi dans ce Cylindre.

COROLLAIRE I.

(492.) Il est indifférent qu'il y ait plusieurs leviers, ou plusieurs puissances qui agissent sur le Treuil, ou que ce soit une roue, comme $HIKL$, avec différentes puissances qui agissent dans sa circonférence: car, par ce qu'on a déjà dit, on peut toujours réduire toutes ces puissances à une seule appliquée à une distance déterminée de l'axe.

COROLLAIRE II.

(493.) Le Treuil est donc un levier de la premiere, seconde, ou troisieme espece, selon la situation & la distance de la puissance placée en Q par rapport à l'axe.

PROPOSITION LXXII.

(494.) *Trouver, dans le Treuil, la puissance nécessaire pour vaincre le frottement, & mettre la machine en mouvement.*

Digitized by Google

Soit *GEF* le Cylindre, & *C* son centre : soit supposé de plus, qu'à l'extrémité *L* du levier *CL*, on fasse agir la puissance λ dans la direction *LH* perpendiculaire à *CL*. Soit pareillement la puissance α appliquée à l'extrémité *A* du levier *CA*, dont la direction soit perpendiculaire à *CA*, & dont l'action doive surmonter la précédente. Appellant Σ l'angle sous lequel se coupent les deux directions *LH*, *AI*, soit tiré les lignes *DB*, *CD*, paralleles à ces directions, & proportionnelles aux mêmes puissances λ & α ; il est clair que *CB* sera (57 *& suiv.*) la direction de la puissance résultante des deux, & lui sera proportionnelle, ou exprimera sa valeur. PRANC. II. FIG. 45.

Cela posé, le sinus de *DCL* étant $= cof\,\Sigma$, *CB* qui est la puissance résultante des deux λ & α, sera $= \sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 \pm 2\lambda\alpha\, cof\,\Sigma}$.* Le signe supérieur de la quantité $2\lambda\alpha\, cof\,\Sigma$, est pour le cas où l'angle *BDC* est obtus, & l'inférieur pour celui où il est aigu. Or, l'effet de cette puissance est de comprimer le Cylindre, en le faisant appuyer dans le point *G* de sa direction *CB*, de la même maniere que s'il appuyoit sur un Plan tangent au Cylindre dans le point *G*, & auquel la direction *CB* de la puissance résultante seroit perpendiculaire. La puissance nécessaire pour vaincre le frottement qui s'exerce dans le point *G*, sera donc (392.) $= \frac{h}{H}\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 \pm 2\lambda\alpha\, cof\,\Sigma}$. Maintenant, la puissance qui agit pour faire tourner le Treuil, est λ, & elle est appliquée en *L* ; mais en la réduisant à une autre placée en *G*, elle sera $\frac{R}{r}\lambda$, *R* marquant la longueur du levier *CL*, & *r* le rayon *CE* du Treuil. L'autre puissance qui agit négativement est α, & elle est appliquée en *A* ; mais en la réduisant à une autre placée en *G*, elle sera $\frac{R'}{r}\alpha$, *R'* marquant la longueur du levier *CA*. Nous aurons donc, pour le cas de l'équilibre, ou pour le moment où le frottement est près d'être vaincu, $\frac{R}{r}\lambda - \frac{R'}{r}\alpha = \frac{h}{H}\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 \pm 2\lambda\alpha\, cof\,\Sigma}$; d'où l'on tire, en réduisant & en ordonnant . . . . . .

$$\lambda = \frac{\alpha(H^2RR' \pm h^2r^2\, cof\,\Sigma)}{H^2R^2 - h^2r^2} + \alpha\sqrt{\frac{(H^2RR' + h^2r^2\, cof\,\Sigma)^2}{(H^2R^2 - h^2r^2)^2} - \frac{H^2R'^2 - h^2r^2}{H^2R^2 - h^2r^2}}.$$

Corollaire I.

(495.) La puissance λ nécessaire pour vaincre le frottement, &

* Car puisque l'angle *L* est droit, *DCL* est le complément de l'angle formé par les lignes *LH* *CD*, qui est égal à celui des lignes *LH*, *AI*, c'est-à-dire, $= \Sigma$; le sinus de *DLC* est donc $cof\,\Sigma$. A cause des paralleles *ED*, *LH*, l'angle *EDH* est encore $= \Sigma$: donc, en abaissant la perpendiculaire *Br*, on a $Dr = BD\, cof\,\Sigma = \lambda\, cof\,\Sigma$. Donc, &c.

Digitized by Google

mettre la machine en mouvement, eſt donc toujours proportionnelle à la puiſſance α.

COROLLAIRE II.

(496.) En faiſant varier l'angle Σ, ou la ſituation du levier CL, la ſituation de la puiſſance λ néceſſaire pour vaincre le frottement, variera auſſi: donc il y a une plus grande & une moindre valeur de λ qui dépend de celle de Σ, ou de la ſituation du levier CL.

PROPOSITION LXXIII.

(497.) *Trouver la plus grande & la plus petite valeur de la force qui peut vaincre le frottement dans le Treuil.*

Si nous ſuppoſons λ & Σ variables, & les autres quantités conſtantes; & ſi nous différencions l'équation $\frac{R}{r}\lambda - \frac{R'}{r}\alpha = \frac{h}{H}\sqrt{\lambda^2+\alpha^2 \pm 2\lambda\alpha\, cof\,\Sigma}$, la différencielle ſera $\frac{R}{r}\,d\lambda = \frac{h}{H}\cdot\frac{\lambda\,d\lambda \pm \alpha\,d\lambda\, cof\,\Sigma \mp \lambda\alpha\, d\Sigma\, fin\,\Sigma}{\sqrt{\lambda^2+\alpha^2\pm 2\lambda\alpha\, cof\,\Sigma}}$; mais, dans le cas où il s'agit de l'action la plus grande, ou de la moindre puiſſance λ, on a $d\lambda = 0$: on aura donc, dans ce cas, $0 = \frac{\mp\lambda\alpha\, d\Sigma\, fin\,\Sigma}{\sqrt{\lambda^2+\alpha^2\pm 2\lambda\alpha\, cof\,\Sigma}}$, ou $fin\,\Sigma = 0$. Cette valeur ſubſtituée dans celle de λ, donnera la plus grande & la plus petite puiſſance λ néceſſaire pour vaincre le frottement, & l'on aura, dans ce cas, $\lambda = \frac{\alpha(H^2RR' \pm h^2rr')}{H^2R^2 - h^2r^2} + \alpha\sqrt{\frac{(H^2RR' \pm h^2rr')^2}{(H^2R^2-h^2r^2)^2} - \frac{H^2R'^2 - h^2r^2}{H^2R^2-h^2r^2}} = \frac{\alpha(H^2RR' \pm h^2rr' + Hhr(R+R'))}{H^2R^2-h^2r^2} = \frac{\alpha(HR'+hr)}{HR\mp hr}$, en diviſant le numérateur & le dénominateur par $HR \pm hr$. La plus grande puiſſance λ ſera donc $= \frac{\alpha(HR'+hr)}{HR-hr}$; elle a lieu lorſque le levier CL eſt à la partie oppoſée au levier CA, & que tous les deux ne forment qu'une même ligne: & la moindre puiſſance $\lambda = \frac{\alpha(HR'+hr)}{HR+hr}$; elle a lieu quand le levier CL coïncide avec le levier CA.

COROLLAIRE I.

(498.) Il y aura donc toujours de l'avantage à faire que les deux leviers coïncident le plus qu'il eſt poſſible; & ſi l'on emploie cette diſpoſition, la puiſſance néceſſaire pour vaincre le frottement, ſera, comme auparavant, $\lambda = \frac{\alpha(HR'+hr)}{HR+hr}$.

COROLLAIRE II.

(499.) Il eſt encore avantageux de tâcher d'avoir $R > R'$, ou que le levier CL ſoit le plus long qu'il eſt poſſible, parce qu'alors le dénominateur de l'expreſſion devient plus grand.

COROLLAIRE

Digitized by Google

Corollaire III.

(500.) Si l'on avoit $R = R'$, λ deviendroit $= \frac{\alpha(HR+hr)}{HR+hr}$, d'où l'on voit que, dans le cas où les deux leviers coïncident, la machine ne donne aucun avantage, & qu'elle produit même du désavantage dans celui où les leviers sont dans des situations opposées.

Corollaire IV.

(501.) Si l'on avoit $R < R'$, la machine seroit désavantageuse dans les deux cas, parce qu'alors on a $\lambda > \alpha$.

Corollaire V.

(502.) Pour connoître dans quel cas la machine cessera de produire aucun avantage, dans la supposition que les leviers sont dans des situations opposées, il n'y a qu'à supposer $\alpha = \lambda$ dans l'équation $\lambda = \frac{\alpha(HR'+hr)}{HR-hr}$, & l'on aura $HR - hr = HR' + hr$, ce qui donne $R = \frac{HR'+2hr}{H}$: c'est la longueur que doit avoir le levier CL, pour que, dans ce cas, la machine cesse de produire aucun avantage.

Corollaire VI.

(503.) Il y aura pareillement de l'avantage à diminuer la quantité r, non-seulement dans le cas où l'on auroit $\lambda = \frac{\alpha(HR'+hr)}{HR-hr}$, parce qu'alors le numérateur est diminué, & le dénominateur augmenté; mais aussi dans celui où l'on auroit $\lambda = \frac{\alpha(HR'+hr)}{HR+hr}$. Car, quoique, dans ce dernier cas, le dénominateur soit diminué, ainsi que le numérateur, il faut observer qu'il ne diminue pas dans une si grande raison que le numérateur, à cause qu'on suppose $R' < R$ pour obtenir de l'avantage.

Corollaire VII.

(504.) Si l'on suppose le frottement nul, alors $h = 0$, & l'expression deviendra en général $\lambda = \frac{\alpha(H^2RR'+0)}{H^2R^2-0} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\alpha\sqrt{\frac{(H^2RR'+0)^2}{(H^2R^2-0)^2} - \frac{H^2R'^2-0}{H^2R^2-0}} = \frac{\alpha R'}{R}$: expression dans laquelle la quantité Σ s'étant évanouie, il s'enfuit qu'en supposant le frottement nul, la situation du levier CL devient indifférente.

Scolie I.

(505.) On voit encore ici une erreur dans laquelle sont tombés généralement tous les Auteurs de Méchanique, en supposant que la

Digitized by Google

PART. II. situation du levier CL est absolument indifférente, & en faisant $\lambda = \frac{\alpha R'}{R}$ dans tous les cas. Quelques-uns, à la vérité, ont remarqué qu'il est nécessaire d'augmenter la puissance λ proportionnellement à ce que le frottement exige; mais toujours sans faire aucune mention de la situation du levier CL, dont cependant nous avons vu l'influence sur la valeur de λ.

COROLLAIRE VIII.

(506.) Si, au lieu d'un seul levier CL, il y en avoit deux égaux & opposés, avec des puissances égales appliquées à leurs extrémités, on auroit $DB = 0$; & la puissance qui comprime le Cylindre du Treuil, & qui produit le frottement, se réduiroit à la puissance α; & celle qui est nécessaire pour le vaincre, à $\frac{h}{H}\alpha$: on aura donc, pour le cas présent, $\frac{R}{r}\lambda - \frac{R}{r}\alpha = \frac{h}{H}\alpha$; d'où l'on tire en général $\lambda = \frac{\alpha(HR'+hr)}{HR}$; expression dans laquelle λ désigne la somme des deux puissances égales qui agissent aux extrémités des deux leviers égaux & opposés.

COROLLAIRE IX.

(507.) On doit entendre la même chose pour les cas où les leviers seroient en beaucoup plus grand nombre, pourvu qu'ils soient tous égaux, & que les puissances qu'on y applique soient aussi égales, & disposées de maniere que les positives détruisent les négatives.

COROLLAIRE X.

FIG. 43. & 44. (508.) La même chose arrivera dans la roue $HIKL$, pourvu qu'on applique des puissances égales aux extrémités de ses diametres.

COROLLAIRE XI.

(509.) Il sera donc encore avantageux, dans tous ces cas, non-seulement qu'on augmente R, mais qu'en général on diminue r.

COROLLAIRE XII.

(510.) Le Treuil étant une fois mis en mouvement, & ayant acquis une vîtesse constante, il doit continuer avec cette même vîtesse, si les puissances qui agissent se détruisent mutuellement. Or c'est ce qui arrive en surmontant continuellement le frottement, parce que la résistance du frottement est la même dans le cas du mouvement, qu'au moment où il est surmonté. La puissance nécessaire pour maintenir le Treuil en mouvement, avec une vîtesse constante déjà

Digitized by Google

PLANC. II.

acquiſe, ſera donc $\lambda = \frac{\alpha(HR'+hr)}{HR}$, dans le cas de la roue, ou dans celui de puiſſances égales, qui agiſſent à l'extrémité de leviers égaux & oppoſés ; & lorſqu'il n'y en a qu'une ſeule à agir, $\lambda = \frac{\alpha(H^2RR'+hh'\cos\Sigma)}{H^2R^2-h^2r^2} + \alpha\sqrt{\frac{(H^2RR'+hh'\cos\Sigma)^2}{(H^2R^2-h^2r^2)^2} - \frac{H^2R'^2-h^2r^2}{H^2R^2-h^2r^2}}$.

COROLLAIRE XIII.

(511.) Une puiſſance quelconque, plus grande que celle exprimée par λ, peut donner au Treuil une viteſſe déterminée : celle-ci une fois employée pendant le temps néceſſaire, il n'eſt alors beſoin, pour lui conſerver le même mouvement, que d'employer la puiſſance λ.

SCOLIE II.

(512.) Pour ne pas trop compliquer le calcul, on n'a pas voulu y introduire la puiſſance qui provient de la peſanteur de la machine même ; mais il eſt facile d'y avoir égard, en la ſuppoſant réunie à la puiſſance α, ou en ſuppoſant que la puiſſance α ſoit compoſée de celle qui agit en Q, & de celle que produit la peſanteur de la machine, & pareillement que AI eſt la direction de cette puiſſance qui réſulte des deux.

FIG. 43 & 44.

FIG. 45

COROLLAIRE XIV.

(513.) On voit clairement, par tout ceci, que, dans le Treuil, il ſera avantageux de faire enſorte que la puiſſance qui provient de la peſanteur de la machine, s'oppoſe, autant qu'il eſt poſſible, à celle qui agit en Q, parce qu'à ce moyen, l'effet de celle-ci diminuera.

COROLLAIRE XV.

(514.) Dans le Treuil vertical, l'action de la puiſſance qui provient de la peſanteur, ne ſe fait point ſentir, parce qu'elle agit dans la direction de l'axe ; mais il en réſultera un frottement, qui ſera d'autant plus petit, que l'appui, ou le point ſur lequel porte le poids de la machine, ſera moins éloigné du centre du Treuil.

DE LA POULIE.

DÉFINITION LIV.

(515.) On donne le nom de *Poulie* à une petite roue qu'on fait tourner ſur un axe, ou eſſieu, par le moyen d'une ligne flexible appliquée à ſa circonférence.

On fait, dans une piece de bois, ou de quelque autre matiere

Digitized by Google

PLANC. II. FIG. 46. solide, une ouverture LI propre à recevoir la roue IGL, qu'on appelle le *Rouet*, qui tourne sur l'axe C, lequel axe porte dans la piece BD qu'on appelle la *Chappe*. On rend ſtable cette derniere piece en B, & une puiſſance appliquée en H, à la ligne flexible $HLIA$, qui paſſe ſur le Rouet, agit dans la direction LH de la même ligne. L'action de cette puiſſance ſe communique à IA, & ſurmonte une autre puiſſance appliquée en A, laquelle eſt dirigée ſuivant IA.

COROLLAIRE I.

(516.) Les puiſſances appliquées en H & A agiſſent de la même maniere que ſi elles étoient placées aux points L & I, où les lignes HL & AI ſont tangentes à la roue : d'où l'on voit que la Poulie ſe réduit à un Treuil dont les leviers $CL = R$, & $CI = R'$, ſont égaux entre eux.

COROLLAIRE II.

(517.) L'équation générale (510.), qui exprime la relation entre les puiſſances λ & α, qui agiſſent en H & A, ou en L & I, ſe réduit, dans la Poulie, à $\lambda = \frac{\alpha(H^2R^2 \pm h^2r^2\cos\Sigma)}{H^2R^2 - h^2r^2} + \alpha\sqrt{\frac{(H^2R^2 + h^2r^2\cos\Sigma)^2}{(h^2R^2 - h^2r^2)^2}} - 1$.

COROLLAIRE III.

(518.) La puiſſance λ, néceſſaire pour vaincre le frottement, eſt donc proportionnelle à la puiſſance α qu'il s'agit de ſurmonter.

COROLLAIRE IV.

(519.) La plus grande & la plus petite valeur de la puiſſance λ auront donc lieu lorſque (497.) on aura *ſin* $\Sigma = 0$. Sa plus grande valeur ſera $\lambda = \frac{\alpha(HR+hr)}{HR-hr}$, & ſa plus petite ſera $\lambda = \frac{\alpha(HR+hr)}{HR+hr} = \alpha$.

COROLLAIRE V.

(520.) Le cas de la plus petite valeur de la puiſſance λ, laquelle $= \alpha$, ne peut jamais avoir lieu dans la Poulie, parce qu'il ſeroit néceſſaire, pour ce cas, que la puiſſance IA fût dirigée du côté oppoſé, ou ſuivant HL, & alors la ligne flexible n'agiroit plus ſur le Rouet de la Poulie.

COROLLAIRE VI.

(521.) Dans le cas de la plus grande valeur de la puiſſance $\lambda = \frac{\alpha(HR+hr)}{HR-hr}$, il faut que l'axe du Rouet ſoit le plus petit qu'il eſt poſ-

Digitized by Google

sible, parce que, par-là, la valeur de λ sera diminuée, non-seulement par la diminution qui en résulte dans le numérateur, mais encore par l'augmentation du dénominateur.

SCOLIE.

(522.) On pourroit demander de quelle utilité peut être la Poulie; car la ligne *HLIA* étant libre sur le Rouet *IL*, ou n'en dépendant en aucune façon, on peut penser qu'elle courra sur le Rouet, celui-ci demeurant fixe, c'est-à-dire, sans se mouvoir sur son axe *C*. En effet, la puissance λ, appliquée en *H*, tire la ligne, & celle-ci la puissance en *A*: or il paroît que ce mouvement peut s'exécuter sans qu'il soit nécessaire que le Rouet se meuve sur l'axe *C*. Pour faire disparoître ce doute, il suffira de prouver que les forces qui résistent, dans le cas du mouvement sur l'axe, sont moindres que lorsqu'il se fait sur le Rouet fixe; ou, ce qui est la même chose, que λ est moindre dans le premier cas que dans le second.

PROPOSITION LXXIV.

(523.) *Déterminer si, dans la Poulie, le mouvement doit se faire sur l'axe, & non sur le Rouet fixe.*

La puissance $\frac{h}{H}\sqrt{\lambda^2+\alpha^2\pm 2\lambda\alpha\, cos.\Sigma}$, qui surmonte le frottement, a été égalée (494.) à la différence des deux puissances appliquées en *L* & en *I*, mais après les avoir réduites à l'axe, lorsque c'est sur l'axe *C* que se fait le mouvement. Dans le cas où le mouvement se feroit sur la circonférence du Rouet, il n'est pas nécessaire de réduction, parce que c'est à cette circonférence qu'elles sont appliquées. Nous aurons donc pour ce cas, $\lambda-\alpha=\frac{h}{H}\sqrt{\lambda^2+\alpha^2\pm 2\lambda\alpha\, cos.\Sigma}$, ou . . . . . $\frac{R}{R}\lambda-\frac{R}{R}\alpha=\frac{h}{H}\sqrt{\lambda^2+\alpha^2\pm 2\lambda\alpha\, cos.\Sigma}$; expression qui est la même que celle donnée, *Article* 494, si nous faisons $R=R'$, & $R=r$. Substituant donc cette valeur dans l'équation $\lambda=\frac{\alpha(H^2R^2\pm h^2r^2\, cos.\Sigma)}{H^2R^2-h^2r^2}+\alpha\sqrt{\frac{(H^2R^2\pm h^2r^2\, cos.\Sigma)^2}{(H^2R^2-h^2r^2)^2}-1}$, qui exprime la valeur de la puissance λ, dans le cas où le mouvement se fait sur l'axe, nous aurons, pour celui où il se feroit sur la circonférence du Rouet, ... $\lambda=\frac{\alpha(H^2\pm h^2\, cos.\Sigma)}{H^2-h^2}+\alpha\sqrt{\frac{(H^2\pm h^2\, cos.\Sigma)^2}{H^2-h^2)^2}-1}$: quantité qui est plus grande que la précédente, comme on peut s'en convaincre, en réduisant seulement $\frac{H^2R^2\pm h^2r^2\, cos.\Sigma}{H^2R^2-h^2r^2}$ dans une série infinie. Car cette

Digitized by Google

série est $1 + \frac{h^2 r^2}{H^2 R^2}(1 \pm cof\,\Sigma) + \frac{h^4 r^4}{H^4 R^4}(1 \pm cof\,\Sigma) + \&c.$ D'où l'on voit que cette valeur est d'autant plus grande, que la quantité r l'est davantage : donc le mouvement se fait naturellement sur l'axe, & non sur la circonférence du Rouet.

COROLLAIRE I.

(524) On a tiré cette conclusion d'après la supposition que le frottement est le même dans un cas que dans l'autre, ou que $\frac{h}{H}$ est la même quantité dans les deux cas. Ainsi l'on voit que si $\frac{h}{H}$ étoit moindre lorsque le mouvement se fait sur la circonférence du Rouet, ce dernier mouvement pourroit effectivement avoir lieu plutôt que celui sur l'axe : car, dans ce cas, si l'on supposoit $h=0$, on auroit alors $\lambda = \alpha$; quantité qui exprime la plus petite valeur que puisse avoir λ.

COROLLAIRE II.

(525.) Le mouvement ne se fait donc sur l'axe qu'à cause du frottement : le frottement étant nul, on a, pour tous les cas, $\lambda = \alpha$, & par conséquent la détermination au mouvement sur l'axe, ou sur la circonférence du Rouet, est, dans cette supposition, tout-à-fait indifférente.

SCOLIE.

(526.) La Poulie fixe en B ne contribue absolument point à faciliter, ou à vaincre, le mouvement de la puissance α, puisque la puissance λ nécessaire pour produire cet effet, est toujours plus grande que la puissance α, toutes les fois que la ligne flexible $HLIA$ appuie sur le Rouet. Mais cependant, en employant cette machine pour quelque besoin particulier, elle contribue beaucoup à produire l'effet demandé, puisque, dans ce cas, le mouvement se faisant sur l'axe, la puissance λ est moindre que dans le cas où il se fait sur la circonférence du Rouet.

PROPOSITION LXXV.

(527.) *Déterminer la relation entre les puissances λ & α, & celle qui agit sur le point* B, *où la Poulie est fixée.*

La puissance en B est égale & contraire à celle qui agit sur l'axe C, laquelle est composée des deux puissances qui agissent en H & A ; mais cette puissance composée a été trouvée (494.) $= \sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 \pm 2\lambda\alpha\, cof\,\Sigma}$: donc si nous supposons que Ω exprime la

Digitized by Google

la puissance en B, nous aurons $\Omega = \sqrt{\lambda^2 + \alpha^2 \pm 2\lambda\alpha \cos\Sigma}$, ce qui donne PLANC. II.
$\lambda = \mp\alpha\cos\Sigma \pm \sqrt{\Omega^2 - \alpha^2 \sin\Sigma^2}$, ou $\alpha = \mp\lambda\cos\Sigma \pm \sqrt{\Omega^2 - \lambda^2\sin\Sigma^2}$.

DÉFINITION LV.

(528) La Poulie peut aussi être mobile. Si l'on fixe la ligne flexible *HLIA* par son extrémité A, & que deux puissances agissent en même temps, l'une en H, & l'autre en B, la premiere puissance peut vaincre la seconde, & la mettre en mouvement, en l'entraînant avec la Poulie. C'est pour cela qu'on la nomme *Poulie mobile*

PROPOSITION LXXVI.

(529.) *Trouver la relation entre les puissances* λ *&* Ω *dans la Poulie mobile.*

Ayant trouvé (527.) $\alpha = \mp\lambda\cos\Sigma \pm \sqrt{\Omega^2 - \lambda^2\sin\Sigma^2}$, & (523.) $\lambda = \frac{\alpha(H^2R^2 \pm h^2r^2\cos\Sigma)}{H^2R^2 - h^2r^2} + \alpha\left(\frac{(H^2R^2 \pm h^2r^2\cos\Sigma)^2}{(H^2R^2 - h^2r^2)^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}$, ou $\alpha = \ldots\ldots$

λ

$\frac{H^2R^2 \pm h^2r^2\cos\Sigma}{H^2R^2 - h^2r^2} + \left(\frac{(H^2R^2 \pm h^2r^2\cos\Sigma)^2}{(H^2R^2 - h^2r^2)^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}$: nous aurons . . . . . .

λ

$\mp\lambda\cos\Sigma \pm \sqrt{\Omega^2 - \lambda^2\sin\Sigma^2} = \frac{\lambda}{\frac{H^2R^2 \pm h^2r^2\cos\Sigma}{H^2R^2 - h^2r^2} + \left(\frac{(H^2R^2 \pm h^2r^2\cos\Sigma)^2}{(H^2R^2 - h^2r^2)^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}}$.

COROLLAIRE.

(330.) Dans le cas de la plus grande valeur de la puissance λ, ou lorsque les lignes HL & AI sont paralleles, on a $\Sigma = 0$: donc

λ

on aura $-\lambda + \Omega = \frac{\lambda}{\frac{H^2R^2 \pm h^2r^2}{H^2R^2 - h^2r^2} + \left(\frac{(H^2R^2 \pm h^2r^2)^2}{H^2R^2 - h^2r^2)^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}}$; ou, en réduisant, $-\lambda + \Omega = \frac{\lambda(HR - hr)}{HR + hr}$: d'où l'on tire $\Omega = \frac{2HR.\lambda}{HR + hr}$, & $\lambda = \frac{\Omega(HR + hr)}{2HR}$.

DES MOUFLES.

DÉFINITION LVI.

(531.) On appelle *Mouffle* une Machine composée de plusieurs Poulies : dans la Marine on nomme ces Machines des *Palans* & des *Caliornes*.

Par une Poulie fixe en B, & une autre mobile D, on fait passer une ligne flexible *HFEDGC*, fixée en C à la chappe de la Poulie B. Une puissance λ appliquée en H, agit dans la direction FH, & tire une autre puissance appliquée en A qui résiste au mouvement de la Poulie DG, sur laquelle elle agit dans la même direction : l'objet de la puissance λ est d'entraîner la Poulie D & la puissance appliquée en A. FIG. 47.

Digitized by Google

PLANC. II. FIG. 48. & 49.

On peut concevoir également que, par deux Poulies fixes en B, montées dans une même chappe, & unies l'une à l'autre par leurs plans, ou par leurs extrémités, & que, par une autre Poulie mobile DG, on ait fait passer une ligne flexible $HFEDGIKC$, dont l'extrémité soit fixée en C à la Poulie DG, & qui passe sur les trois Rouets: enfin qu'une autre puissance λ agisse à l'autre extrémité H dans la direction FH, en tirant une autre puissance appliquée en A, qui résiste au mouvement de la Poulie DG, sur laquelle elle agit dans la même direction.

FIG. 50.

On peut imaginer pareillement trois Poulies fixes en B, unies entre elles dans une même chappe, &. deux Poulies mobiles, aussi unies entre elles, & une ligne flexible, passant par toutes ces Poulies, à l'extrémité H de laquelle est appliquée une puissance, tandis qu'une autre puissance est appliquée à la Mousle mobile en A, de la même maniere qu'auparavant. Il en sera de même d'un plus grand nombre de Poulies, si l'on veut en employer davantage dans la composition de ces Machines appellées *Mousles*.

SCOLIE.

(532.) Nous supposerons, pour la facilité du calcul, que les lignes, ou cordons qui passent sur les différentes Poulies qui composent les Mousles, tels que ED, CG, FH, sont sensiblement paralleles, ce qui donne $\Sigma = 0$. Nous supposerons encore que toutes les Poulies sont égales, pour n'avoir pas à introduire dans le calcul plusieurs valeurs de R.

PROPOSITION LXXVII.

(533.) *Trouver la relation entre la puissance agissante, & la puissance resistante dans les Mousles.*

Puisqu'on suppose $\Sigma = 0$, le cas se réduit à celui dans lequel la puissance λ a sa plus grande valeur, ou est un *maximum*, & pour lequel (519.) nous avons trouvé $\lambda = \frac{\alpha(HR+hr)}{HR-hr}$, supposant que λ désigne la puissance qui agit en H, & α celle que doit supporter, ou tirer la ligne ED. Ces deux puissances seront donc entre elles, comme $HR+hr$ est à $HR-hr$; & celle que doit supporter la ligne ED, sera $= \frac{\lambda(HR-hr)}{HR+hr}$. Par la même raison, celle qui agit sur la ligne ED, est à celle qui agit sur la ligne GC, comme $HR+hr$ est à $HR-hr$: donc celle qui agit sur $GC = \frac{\lambda(HR-hr)^2}{(HR+hr)^2}$. Mais cette derniere puissance est celle qui agit sur la ligne GI; & celle qui agit sur GI, est à celle

Digitized by Google

celle qui agit sur KC, comme $HR+hr$ est à $HR-hr$: donc la puissance qui agit sur $KC=\frac{\lambda(HR-hr)^1}{(rR+hr)^1}$, & ainsi à l'infini, quel que soit le nombre de tours que fasse la ligne sur les Poulies ; c'est-à-dire, quel que soit le nombre des Poulies. S'il n'y avoit donc que deux lignes seulement, comme ED, CG, pour soutenir la Poulie mobile DG, les forces qu'elles exerceroient seroient $\frac{\lambda(HR-hr)}{HR+hr}$ & $\frac{\lambda(HR-hr)^2}{(HR+hr)^2}$. S'il y en avoit trois, les forces seroient $\frac{\lambda(HR-hr)}{(HR+hr)}$, $\frac{\lambda(HR-hr)^2}{(HR+hr)^2}$, $\frac{\lambda(HR-hr)^3}{(HR+hr)^3}$, & ainsi à l'infini. Or comme la somme des forces que supporteront ces lignes, doit être égale à la puissance Ω appliquée en A, nous aurons $\Omega=\frac{\lambda(HR-hr)}{(HR+hr)}+\frac{\lambda(HR-hr)^2}{(HR+hr)^2}+\frac{\lambda(HR-hr)^3}{(HR+hr)^3}+\&c.$, en formant cette série d'autant de termes qu'il y a de cordons, ou lignes, qui soutiennent la Moufle mobile.

Corollaire I.

(534.) Si l'on fait $\frac{HR-hr}{HR+hr}=1-Q$, ce qui donne $Q=\frac{2hr}{HR+hr}$, on aura $\Omega=\lambda\big((1-Q)+(1-Q)^2+(1-Q)^3+(1-Q)^4+\&c.\big)$, faisant la série d'autant de termes qu'il y a de cordons qui aboutissent à la Moufle mobile. Si l'on suppose que n représente le nombre de ces cordons, on aura $\Omega=\lambda\big((1-Q)^n+(1-Q)^{n-1}+(1-Q)^{n-2}+(1-Q)^{n-3}+\&c.\big)$, le dernier terme de la série étant celui dont l'exposant est l'unité.

Corollaire II.

(535.) On aura pareillement $\lambda=\frac{\Omega}{(1-Q)^n+(1-Q)^{n-1}+(1-Q)^{n-2}+(1-Q)^{n-3}+(1-Q)^{n-4}+\&c.}$; d'où l'on voit combien il est avantageux, dans les Moufles, que Q, ou son égale $\frac{2hr}{HR+hr}$, soit le moindre qu'il est possible ; c'est-à-dire que le frottement $\frac{h}{H}$ soit le plus petit qu'il est possible, ainsi que le rayon de l'axe r; & qu'au contraire le rayon R du Rouet soit le plus grand qu'il se pourra, eu égard aux circonstances.

Corollaire III.

(536) Si l'on éleve chaque terme de la série à la puissance indiquée par son exposant, ces puissances feront . . . . . .

Digitized by Google

$(1-Q)^n = 1-n.\quad Q+\frac{n.(n-1)}{2}Q^2+\frac{n.(n-1).(n-2)}{2.3}Q^3+\&c.$

$(1-Q)^{n-1}=1-(n-1)Q+\frac{(n-1).(n-2)}{2}Q^2-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3}Q^3+\&c.$

$(1-Q)^{n-2}=1-(n-2)Q+\frac{(n-2)(n-3)}{2}Q^2-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3}Q^3+\&c.$

$(1-Q)^{n-3}=1-(n-3)Q+\frac{(n-3)(n-4)}{2}Q^2-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3}Q^3+\&c.$

$\&c. = \&c.$

Pour avoir la ſomme de toutes ces quantités, & en conclure la valeur de Ω, on remarquera que le nombre des lignes dont cette ſérie doit être compoſée, eſt égal à l'expoſant de $1-Q$. Car on a vu (534.) que le dernier expoſant doit être l'unité; & le nombre qu'on doit ſouſtraire de n dans l'expoſant, renfermant autant d'unités qu'il y a de lignes moins une; ſi q exprime le nombre total des lignes, nous aurons $q-1$ pour le nombre à retrancher de n dans le dernier terme de la ſérie, & par conſéquent $n-q+1$ pour le dernier expoſant: donc $n-q+1=1$; d'où l'on tire $q=n$; c'eſt-à-dire que le nombre des lignes dont la ſérie doit être compoſée, contient autant d'unités qu'il y en a dans le nombre n, ou qu'il y a de cordons, ou lignes, qui ſoutiennent la Mouffle mobile. La ſomme des unités qui ſont au premier terme de toutes les lignes ſera donc n, & par conſéquent

$$\Omega=\lambda\left\{n-\left\{\begin{matrix}n\\n-1\\n-2\\n-3\\\&c.\end{matrix}\right\}Q+\left\{\begin{matrix}n.(n-1)\\(n-1)(n-2)\\(n-2)(n-3)\\(n-3)(n-4)\\\&c.\end{matrix}\right\}\frac{1}{2}Q^2-\left\{\begin{matrix}n.(n-1)(n-2)\\(n-1)(n-2)(n-3)\\(n-2)(n-3)(n-4)\\(n-3)(n-4)(n-5)\\\&c.\end{matrix}\right\}\frac{1}{2}Q^3+\&c.\right\},$$

ou, en ſommant les quantités qui compoſent chaque terme, $\Omega=\lambda\left(\frac{n}{1}-\frac{(n+1)n}{1.2}Q+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}Q^2-\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}Q^3+\&c.\right)$ *; ce qui donne . . . . . .

$$\lambda=\frac{\Omega}{\frac{n}{1}-\frac{(n+1)n}{1.2}Q+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}Q^2-\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}Q^3+\&c.},$$ en

formant toutes ces ſéries d'autant de termes qu'il y a d'unités dans $n+1$, ou d'autant de termes qu'il y a de lignes, ou cordons, qui tirent la Mouffle fixe B.

---

* Pour ſommer les quantités qui compoſent chaque terme, on remarquera 1°. que les quantités n, $n-1$, $n-2$ &c. qui multiplient le ſecond terme de la valeur de Ω, ne ſont autre choſe que la ſuite naturelle des nombres, priſe en décroiſſant depuis le terme n juſqu'à l'unité. Ainſi la ſomme de toutes ces quantités eſt $=n.\frac{(n+1)}{2}$.

2°. Que le nombre des produits $n.(n-1)$, $(n-1)(n-2)$, $(n-2)(n-3)$ &c. eſt $=n$, en admettant 0 pour le dernier produit, puiſque le ſecond facteur de ces produits devient zéro, au rang déſigné par n. Prenant donc la ſuite de ces produits en ſens contraire, c'eſt-à-dire,

Digitized by Google

Corollaire IV.

(537.) La force qui s'exerce en B eſt la même que celle qui s'exerce en A, plus la puiſſance λ qui agit dans la direction FH. Donc la force qui s'exerce en $B = \Omega + \lambda = \ldots\ldots\ldots\ldots$
$\lambda\left(\frac{n+1}{1} - \frac{(n+1)n}{1.2}Q + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}Q^2 - \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}Q^3 + \&c.\right)$

Corollaire V.

(538.) Donc la puiſſance qu'on peut vaincre en B eſt plus grande que celle qu'on peut vaincre en A, de la quantité λ, & par conſéquent il eſt avantageux d'arranger les Mouffes, de maniere que la puiſſance qu'il s'agit de vaincre, ſoit placée en B, ou que la Mouffe B ſoit mobile, & la Mouffe DG fixe.

écrivant le premier celui qui eſt écrit le dernier, & *vice versâ*, on formera la ſuite 1.0, 2.1, 3.2, 4.3, 5.4, &c... $n(n-1)$. Pour ſommer cette ſuite, on fera attention que puiſque $n.(n-1)$, ou n^2-n, eſt l'expreſſion générale d'un de ſes termes, il ne s'agit que de faire ſucceſſivement $n=1$, $n=2$, $n=3$, &c. & de prendre la ſomme de tous les réſultats: or il eſt évident qu'on forme alors la ſomme des quarrés de la ſuite naturelle des nombres, & qu'on en déduit la ſomme des mêmes nombres naturels. Nommant donc S la ſomme des nombres de la ſuite naturelle, & S' celle de leurs quarrés, on aura $S'-S$ pour la ſomme de la ſérie dont il eſt ici queſtion. Mais chacun ſçait que $S'=n.\frac{n+1}{2}.\frac{2n+1}{3}$; (*Voyez* d'ailleurs, pour la démonſtration, la troiſieme partie du *Cours de Mathématiques* de M. *Bezout*, *Art.* 236 & 237.) & que $S=n.\frac{n+1}{2}$; donc $S'-S=n.\frac{n+1}{2}.\frac{2n+1}{3}-n.\frac{n+1}{2}=\frac{n(n+1)(n-1)}{3}$. Donc le troiſieme terme de la ſérie qui exprime la valeur de Ω eſt $\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}Q^2$.

On remarquera, en troiſieme lieu, qu'en faiſant $n=1$, $n=2$, $n=3$, &c. dans la ſuite des produits $n(n-1)(n-2)$, $(n-1)(n-2)(n-3)$, $(n-2)(n-3)(n-4)$ &c. dont la ſomme forme le coefficient du quatrieme terme, cette ſérie s'arrêtera auſſi-tôt qu'on aura fait $n=$ au nombre des termes, & qu'alors le produit précédent ſera auſſi $=0$. Prenant donc, comme tout à l'heure, la ſérie en ſens contraire, elle ſera $1.0.-1, 2.1.0, 3.2.1, 4.3.2$, &c. .... $n(n-1)(n-2)$. Un terme quelconque de cette ſuite eſt donc $n.(n-1)(n-2)=(n^2-n)(n-2)=n^3-3n^2+2n$. Pour ſommer cette ſuite, il ne s'agit encore que de faire ſucceſſivement $n=1$, $n=2$, $n=3$, &c., & de ſommer tous les réſultats: or il eſt évident que cela revient à prendre la ſomme des cubes de la ſuite naturelle, à en retrancher le triple de la ſomme des quarrés de la même ſuite, & à ajouter au reſte le double de la ſomme des termes de la ſuite naturelle. Repréſentant donc par S'' la ſomme des cubes de la ſuite naturelle, la ſomme de la ſérie dont il s'agit ici, ſera $=S''-3S'+2S$. Mais $S''=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}=n.\frac{n+1}{2}.\frac{n+1}{2}$. (On peut trouver cette valeur par ce qui eſt démontré, *Art.* 236 & 237 de l'Ouvrage auquel nous venons de renvoyer), $3S'=n.\frac{n+1}{2}.(2n+1)$, & $2S=n.(n+1)$: donc la ſomme de la ſérie dont il s'agit, ou $S''-3S'+2S=n.\frac{n+1}{2}.n.\frac{n+1}{2}-n.\frac{n+1}{2}.(2n+1)+n.(n+1)=\frac{n.(n+1)(n-1)(n-2)}{4}$; & par conſéquent le quatrieme terme de la valeur de $\Omega=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}Q^3$. La loi que ſuivent les termes de la valeur de Ω eſt ſuffiſamment annoncée pour que le Lecteur puiſſe facilement la continuer. On verra encore, avec une légere attention, que les deux ſuites que nous venons de ſommer ſont de l'eſpece de celles des nombres *Triangulaires* & *Pyramidaux*.

Digitized by Google

Corollaire VI.

(539.) Si l'on multiplie par Q l'équation précédente (537.), & si l'on soustrait λ de part & d'autre, on aura . . . . . $(\Omega+\lambda)Q-\lambda = -\lambda\left(1-\frac{n+1}{1}Q+\frac{(n+1)n}{1.2}Q^2-\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}Q^3+\&c.\right)$ $= -\lambda(1-Q)^{n+1}$; d'où l'on tire, en réduisant, ... $\Omega=\frac{\lambda(1-Q)\left(1-(1-Q)^n\right)}{Q}$, & $\lambda=\frac{\Omega Q}{(1-Q)\left(1-(1-Q)^n\right)}$.

Scolie I.

(540.) Si l'on suppose, avec M. *Bilfinger* $\frac{h}{H}=\frac{1}{4}$, & $\frac{r}{R}=\frac{1}{5}$, ce qui donnera (534.) $Q=\frac{2}{21}$; & si l'on substitue cette valeur dans celle de λ (539.), on aura $\lambda=\frac{\frac{2}{21}.\Omega}{\left(1-\frac{2}{21}\right).1-\left(1-\frac{2}{21}\right)^n)}=\frac{2.\Omega}{19\left(1-\left(\frac{19}{21}\right)^n\right)}$.

Qu'on suppose maintenant $n=3$, on aura $\lambda=\frac{2.\Omega}{19\left(1-\frac{6859}{9261}\right)}=\frac{9261.\Omega}{22819}$. Dans le cas où l'on supposeroit le frottement nul, on a $h=0$, & $Q=0$, & l'équation $\lambda=\frac{\Omega Q}{(1-Q)\left(1-(1-Q)^n\right)}$ ne donneroit rien; mais ayant recours à celle de *l'Art.* 536, elle donne, en conséquence de cette supposition, $\lambda=\frac{\Omega}{n}$, qui est la formule générale donnée par tous les Auteurs. On aura donc, dans le cas de $n=3$, $\lambda=\frac{1}{3}\Omega$, ou $\lambda=\frac{1000}{1000}\Omega$: ainsi la puissance λ, dans cette supposition, sera à celle déterminée ci-dessus, comme $\frac{1}{3}$ est à $\frac{9261}{22819}$, ou comme 22819 est à 27783. La différence de ces deux valeurs est, comme l'on voit, bien considérable.

Scolie II.

(541.) Pour faciliter le calcul, nous avons négligé le poids des Mousles, & celui des cordes, que nous avons regardées comme des lignes : mais on pourroit facilement introduire ces quantités dans le calcul, si on le vouloit. Il est nécessaire d'y avoir égard, lorsque la puissance qu'il est question de vaincre est petite; mais lorsqu'elle est fort grande, on peut les négliger. Nous nous sommes aussi dispensés d'avoir égard à la grosseur des cordes, ou à leur roideur, ou inflexibilité, qui cependant coûte quelquefois beaucoup à surmonter, particulièrement lorsque les puissances sont petites; mais aussi, lorsqu'elles sont grandes, on peut les négliger, sans crainte d'erreur sensible.

Digitized by Google

LIVRE SECOND.

DES FLUIDES.

CHAPITRE PREMIER.

De l'Equilibre des Fluides, & de la force avec laquelle ils agiſſent lorſqu'ils ſont en repos.

DÉFINITION I.

(542.) UN *Fluide* eſt un corps dont les parties cedent à toute eſpece de force, & qui, en cédant, ſe meuvent facilement entre elles.

C'eſt la définition que *Newton* donne des Fluides, dans le Livre II, Section V de ſa *Philoſophie Naturelle*. Elle eſt conforme à ce qui a été dit dans le premier Livre, même dans le cas où un nombre quelconque de parties d'un Fluide ſeroit pouſſé perpendiculairement contre une ſurface immobile; car, en vertu de l'impreſſion qui doit ſe former dans ces parties, elles doivent ſe ſéparer latéralement, & d'autant plus que la denſité du Fluide eſt moindre. On ne conſidere point ici le cas où une ſeule particule infiniment petite ſeroit ainſi pouſſée; car, comme nous l'avons déjà dit, nous n'avons pas beſoin de cet examen pour ce que nous nous propoſons.

PROPOSITION I.

(543.) *Lorſque toute la maſſe du Fluide eſt en repos, la force, ou preſſion, que ſouffre chacune de ſes particules, eſt toujours la même, dans quelque direction que ce ſoit.*

Si la preſſion qu'éprouve une particule quelconque n'étoit pas la même dans toutes les directions, d'après la définition précédente, elle céderoit ſa place à la preſſion la plus forte, & elle ſe mettroit en mouvement, ce qui eſt contre la ſuppoſition: donc la preſſion qu'éprouve une particule quelconque d'un fluide, lorſqu'il eſt en repos, eſt la même dans toutes les directions.

PROPOSITION II.

(544.) *La force, ou le poids, qui, en vertu de la gravité, comprime*

Digitized by Google

verticalement une particule quelconque d'un Fluide qui eſt en repos, eſt égale au poids de la colonne verticale du Fluide qui eſt au-deſſus d'elle.

Une particule quelconque du Fluide gravite ſur ſon inférieure, par la propriété générale des corps graves; & cette gravitation ſe communique d'une particule à l'autre, à cauſe de leur contact : donc la particule inférieure ſupporte le poids, ou l'action, de toutes les particules ſupérieures, ou de la colonne verticale qui les renferme.

COROLLAIRE.

(545.) Comme une particule quelconque eſt pouſſée avec une force égale dans toutes les directions, il s'enſuit qu'une particule quelconque eſt pouſſée dans toutes les directions avec une force égale au poids de la colonne verticale qui eſt au-deſſus d'elle.

DÉFINITION II.

(546.) Pour éviter les répétitions, nous appellerons déſormais *Superficie du Fluide* la ſurface ſupérieure du Fluide, quelque figure, ou diſpoſition, qu'elle ait.

PROPOSITION III.

(547.) *Lorſque toute la maſſe d'un Fluide eſt en repos, ſa ſuperficie eſt horiontale, ou perpendiculaire à la direction des corps graves.*

Si la ſuperficie du fluide n'étoit pas horiſontale, les colonnes verticales qui répondent à une particule du fluide, & dont elle ſupporte le poids, ou la preſſion, dans toutes les directions, ne ſeroient pas égales; par conſéquent cette particule ſeroit preſſée inégalement, & elle devroit alors ſe mettre en mouvement, ce qui eſt contre la ſuppoſition : donc la ſuperficie d'un fluide qui eſt en repos, eſt horiſontale.

COROLLAIRE I.

(548.) Si la ſuperficie du Fluide eſt horiſontale, toute ſa maſſe eſt en repos.

COROLLAIRE II.

(549.) Quand toute la maſſe d'un Fluide ne ſera pas en repos, ſa ſuperficie ne ſera pas horiſontale; & réciproquement, la ſuperficie du Fluide n'étant pas horiſontale, toute ſa maſſe ne ſera pas en repos.

SCOLIE I.

(550.) On fait abſtraction de la force d'attraction, ou de toute autre force, excepté la gravité, dont les vaſes, ou les corps, qui

Digitized by Google

contiennent les Fluides, peuvent être doués; ces forces étant de très-peu d'importance pour notre objet.

Scolie II.

(551.) On doit entendre ce qui vient d'être dit, lorſque tout le Fluide contenu dans le vaſe, ou celui de deux, ou d'un plus grand nombre de vaſes qui ſe communiquent, eſt homogene, ou d'une denſité uniforme; parce que, dans ce cas, chaque canal peſe autant que ſon correſpondant, comme il a été démontré. Mais ce ne ſeroit pas la même choſe, ſi les Fluides de deux, ou d'un plus grand nombre de vaſes qui communiquent l'un à l'autre par un orifice, étoient de différentes denſités. Qu'on ſuppoſe que la denſité, ou le poids d'un pied cube d'un des Fluides ſoit $= m$, & que celui d'un pied cube de l'autre ſoit $= M$; le poids, ou la preſſion, que le premier exercera ſur l'orifice, ſera *madbde*, & celui qu'exercera le ſecond, ſera *MAdbde*; *dbde* exprimant l'aire de l'orifice, & la profondeur du même orifice au-deſſous de la ſuperficie des Fluides étant repréſentée par a & A. Mais, pour qu'il y ait équilibre, il faut que $madbde = MAdbde$; ou qu'on ait $a : A :: \frac{1}{m} : \frac{1}{M}$. Donc les hauteurs des ſuperficies des Fluides au-deſſus des orifices, doivent être en raiſon inverſe des denſités des mêmes Fluides, ou en raiſon inverſe de leurs poids ſous un même volume.

Proposition IV.

(552.) *La force que ſouffre une partie différencio-différencielle quelconque d'une ſurface qui contient un Fluide, eſt perpendiculaire à cette partie.*

De quelque maniere qu'une ſurface ſoit preſſée par un Fluide, les forces peuvent être décompoſées en forces perpendiculaires & en forces paralleles à la ſurface; mais ces dernieres ſe détruiſent mutuellement (543.): donc il ne reſte que les forces perpendiculaires, & par conſéquent la force que ſouffre une différencio-différencielle d'une ſurface quelconque qui renferme un Fluide, eſt perpendiculaire à cette ſurface.

Proposition V.

(553.) *La force que ſouffre une partie différencio-différencielle quelconque d'une ſurface qui renferme un Fluide en repos, eſt égale au poids d'une colonne verticale du même Fluide, dont la baſe eſt égale à la différencio-différencielle de la ſurface, & dont la hauteur eſt la hauteur verticale du Fluide au-deſſus de cette différencio-différencielle.*

Digitized by Google

PLANC. III. Chacune des particules du Fluide qui compriment la différencio-différencielle de la surface, souffre elle-même une pression égale au poids de la colonne verticale du Fluide qui est au-dessus d'elle : donc toute la force qui comprime la différencio-différencielle, est égale au poids d'autant de colonnes verticales qu'il y a de particules du Fluide qui la touchent ; c'est-à-dire, au poids d'une colonne verticale dont la base est égale à la différencio-différencielle de la surface, & dont la hauteur est la hauteur verticale du Fluide au-dessus de la même différencio-différencielle.

COROLLAIRE I.

FIG. 51. (554.) Donc si l'on coupe une surface *AB* par deux lignes horisontales *FG*, *HI*, infiniment proches l'une de l'autre ; & par deux autres lignes *KL*, *MN*, perpendiculaires à celles-là, & qui soient aussi infiniment proches l'une de l'autre ; la force que supportera l'espace différencio-différenciel *KLMN*, dans la direction *CD* qui lui est perpendiculaire, le Fluide étant en repos, sera exprimée par *m.a.LN.NM*. Si, dans cette expression, l'on prend les mesures en pieds, *m* marquera le poids d'un pied cubique du Fluide, & *a* le nombre de pieds de la hauteur verticale de sa superficie au-dessus de la différencio-différencielle.

COROLLAIRE II.

(555.) La force *m.a.LN.NM*, dont la direction est suivant la perpendiculaire *CD*, peut être décomposée en deux autres, l'une horisontale *CE*, & l'autre verticale *ED* ; & ces trois forces seront entre elles, comme *CD*, *CE* & *ED* ; ou, en tirant l'horisontale *NO*, & la verticale *MO*, comme *NM*, *MO* & *ON*, à cause que les triangles *CED*, *MON* sont semblables, ayant l'angle *MNO* = *EDC*. Nous aurons donc *NM* est à *MO*, comme la force perpendiculaire suivant *CD*, ou *m.a.LN.NM*, est à *m.a.LN.MO*, force horisontale suivant *CE*. On aura pareillement *NM* est à *NO*, comme la force perpendiculaire suivant *CD*, ou *m.a.LN.MN*, est à *m.a.LN.NO*, force verticale suivant *ED*.

COROLLAIRE III.

(556.) La force horisontale sera donc à la force verticale, comme *MO* est à *NO*, ou comme le sinus de l'angle *MNO* est à son cosinus.

COROLLAIRE IV.

(557.) La ligne *MO* est égale à la différencielle verticale, ou à

Digitized by Google

à la différencielle *da* de la hauteur du Fluide : donc la force horiſontale qui agira ſur l'aire différencio-différencielle *LKMN*, dans le cas où le Fluide eſt en repos, ſera encore = *mada.LN*. PLANC. III.

COROLLAIRE V.

(558.) La force horiſontale *CE* peut également être décompoſée en deux autres forces auſſi horiſontales, l'une ſuivant la direction donnée *CP*, & l'autre ſuivant *CQ*, perpendiculaire à celle-ci ; & ces trois forces ſeront entre elles comme *CE*, *CP*, *CQ* ; ou en tirant les lignes *LR*, *NR*, paralleles aux directions *CP*, *CQ*, comme *LN*, *NR*, & *LR*, à cauſe des triangles ſemblables *CEP*, *CEQ*, *NLR*. Nous aurons donc *LN* eſt à *NR*, comme la force horiſontale ſuivant *CE* = *mada.LN* eſt à *mada.NR*, force horiſontale ſuivant *CP*. On aura pareillement *LN* eſt à *LR*, comme *mada.LN* eſt à *mada.LR*, force horiſontale ſuivant *CQ*. FIG. 52.

COROLLAIRE VI.

(559.) Le produit *LN.NO* exprime l'aire *NT* = *PQRS* formée dans la ſuperficie horiſontale du Fluide, & terminée par les quatre verticales *LP*, *TS*, *NQ*, *OR*, élevées des quatre angles du parallélogramme *LO* : donc auſſi la force verticale qui agit ſur la différencio-différencielle *LKMN* = *ma.PQ.PS*. FIG. 53. FIG. 52.

PROPOSITION VI.

(560.) *La ſomme des forces horiſontales qui agiſſent ſur un corps quelconque ſubmergé dans un Fluide qui eſt en repos, eſt zéro ; & par conſéquent le corps doit demeurer en repos, quant au mouvement horiſontal.*

Soit un corps quelconque *ADBE*, lequel ſoit coupé par un plan *ACBE* qui coïncide avec la ſurface du Fluide, lorſque celui-ci eſt en repos. Soit mené les deux plans *FOI*, *LQR*, infiniment voiſins, & paralleles au plan ſupérieur *ACBE*, & ſoit pris, entre ces plans, la différencio-différencielle *OQNP*. Élevant enſuite le plan vertical *OTMK*, ſoit abaiſſé ſur lui la perpendiculaire *PG*, & ſoit élevé les verticales *GH*, *OK* & *TM*. Enfin, ſoit fait *MH* = *TG* = *u*, *HK* = *GO* = *du*, *HG* = *KO* = *z*, & la hauteur verticale comprise entre les deux plans *FOI*, *LQR* = *dz*. FIG. 54.

Cela poſé, on aura (558.) la force horiſontale qui agit ſur la différencio-différencielle *OQNP*, dans la direction *FI*, ou ſa parallele *AM*, = *mzdzdu* ; & celle qui agit ſur *FOQL*, ſera = *muzdz*.

PLANC. III. à cause que ζ est constant, le Fluide étant en repos. Mais, pour que cette expression soit celle de la force qui agit sur l'espace entier $FOIRQL$, nous devons faire $u = o$, puisque c'est la valeur de u dans le point I : donc la somme des forces horisontales qui agissent sur la zone $FOIRQL = o$. On démontrera la même chose pour toutes les zones dans lesquelles on peut diviser le corps; & la même chose dans d'autres directions horisontales quelconques. Donc la somme des forces horisontales qui agissent sur tout le corps, est zéro ; & par conséquent le corps demeurera en repos quant au mouvement horisontal.

PROPOSITION VII.

(561.) *La force verticale qui agit sur un corps submergé dans un Fluide, ou que lui communique le Fluide, celui-ci étant en repos, est égale au poids du Fluide dont il occupe la place.*

FIG. 55. Soit $ADBE$ un corps quelconque coupé par un plan $ACBE$, qui coïncide avec la surface du Fluide, lorsque celui-ci est en repos. Soit pris la droite AB pour la ligne des abscisses, & ses perpendiculaires EC, FG, infiniment proches l'une de l'autre, pour les ordonnées. Soit aussi mené les lignes HI, KL, aussi infiniment proches, & parralleles aux abscisses. Faisant enfin $AM = x$, $MH = u$, on aura $HK.HI = dudx$; & la force verticale qui agit sur la différencio-différencielle $NPOQ$ de la surface, sera $= ma.dudx$ (559.). Or $a = HN$, hauteur du Fluide au-dessus de cette différencio-différencielle : faisant donc cette hauteur HN variable, & $= \zeta$, la force verticale sera $= m\zeta dudx$. Mais l'expression $\zeta dudx$ est celle de l'élément différencio-différenciel LN du corps, lequel élément est compris entre les quatre verticales HN, KP, IQ, LO ; l'intégrale $\int\!\!\int \zeta dudx$ sera donc l'expression de tout le volume qu'occupe le corps dans le Fluide, & $ms\int\!\!\int \zeta dudx$ sera celle du poids du volume de Fluide qu'occupe le même corps. Or, d'après ce qu'on vient de dire, la somme des forces verticales qui agissent sur le corps, ou la force verticale totale, est aussi exprimée par $ms\int\!\!\int \zeta dudx$. Donc la force qu'éprouve verticalement, de bas en haut, un corps submergé dans un Fluide qui est en repos, ou la force que lui communique le Fluide, est égale au poids du volume de Fluide que déplace le corps.

PROPOSITION VIII.

(562.) *Pour qu'un corps submergé dans un Fluide qui est en repos, soit sans aucun mouvement vertical, il faut que le poids du corps soit*

Digitized by Google

égal à celui du volume de Fluide qu'il déplace, & de plus que la verticale qui passe par le centre du volume de Fluide déplacé, coïncide avec celle qui passe par le centre de gravité du corps.

Les forces $m\zeta dudx$ sont autant de puissances qui poussent le corps verticalement, de bas en haut, ou, ce qui revient au même (89, 90 & 91.), $mf\zeta dudx$ est une puissance qui pousse verticalement le corps de bas en haut, & est placée au centre de toutes les puissances $m\zeta dudx$, ou au centre de l'espace qu'occupe le corps dans le Fluide. Supposant maintenant que M représente la masse de tout le corps, M sera une autre puissance qui pousse verticalement le corps de haut en bas : donc (110.) on doit avoir $mf\zeta dudx - M = 0$, pour que le centre de gravité soit sans aucun mouvement ; c'est-à-dire que le poids M du corps doit être égal à $mf\zeta dudx$, poids du volume de Fluide qu'il déplace. En outre, si nous nommons p la distance horisontale de la verticale, qui passe par le centre de gravité, à celle qui passe par la puissance $mf\zeta dudx$, ou par le centre de l'espace, ou volume du corps submergé dans le Fluide, nous aurons (168.) $\frac{mfdsfpdsf\zeta dudx}{S}$ pour l'expression de l'angle de rotation. Mais cette quantité ne peut être zéro, dès le commencement de l'action, si l'on n'a pas $p = 0$. Donc, pour qu'il n'y ait absolument aucun mouvement, soit vertical, soit de rotation, il faut que la verticale qui passe par le centre du volume de Fluide déplacé, coïncide avec celle qui passe par le centre de gravité du corps.

CHAPITRE II.

De la force avec laquelle les Fluides en mouvement agissent contre une différencio-différencielle de surface.

PROPOSITION IX.

(563.) *SI, dans la surface qui contient un Fluide en repos, on ouvre un orifice, qu'on peut supposer pour le présent infiniment petit, le Fluide sortira par cet orifice avec une vîtesse égale à celle qu'il acquerroit en tombant librement de la hauteur verticale a de la surface du Fluide au-dessus de l'orifice.*

Supposons que A soit une particule du Fluide, & α la puissance qui l'anime lorsqu'elle tombe librement, nous aurons (32.) $\frac{\alpha t}{A} = u$.

Digitized by Google

PLANC. III. Soit supposé maintenant la même particule sortant par l'orifice, la puissance qui l'animera, sera la force réunie de toutes les particules qui sont contenues dans la hauteur a (544.). Par conséquent n étant supposé un nombre infini, ce nombre représentera la totalité des particules contenues dans cette hauteur, & $n\alpha$ sera la puissance qui anime la particule qui jaillit par l'orifice. Mais le temps durant lequel cette puissance agit sur la particule, doit être infiniment petit, nous devons donc le représenter par $\frac{\epsilon}{n}$: par conséquent nous aurons aussi $(32.)\frac{n\alpha}{A}.\frac{\epsilon}{n} = V$; V désignant la vîtesse avec laquelle la particule jaillit par l'orifice; c'est-à-dire, en réduisant $\frac{\alpha\epsilon}{A} = V$: donc les deux vîtesses V & u sont égales.

COROLLAIRE.

(564.) Comme les particules du Fluide sont poussées dans toutes les directions avec une force égale, il s'ensuit que quelle que soit la direction suivant laquelle une particule est poussée, cette particule prendra, en s'échappant, une vîtesse $u = 8\sqrt{a}$; vîtesse qui est celle que doit acquérir un corps, ou une particule de Fluide, qui tombe librement de la hauteur verticale a (52.).

SCOLIE.

(565.) Dans la pratique, la vîtesse réelle du Fluide est toujours moindre que celle que nous venons d'assigner d'après la théorie. Cette différence vient du frottement que doit produire le choc des particules contre les parois de l'orifice, & encore de celui que produit le choc des particules les unes contre les autres, même avant qu'elles parviennent à jaillir par l'orifice. Mais nous ferons abstraction de tous ces frottements, dont la considération n'est pas nécessaire pour notre objet, comme nous le verrons dans la suite.

PROPOSITION X.

(566.) *Trouver le rapport entre la force perpendiculaire qui agit sur une différencio-différencielle de surface, & la vîtesse avec laquelle le Fluide jailliroit par cette différencio-différencielle, si elle lui donnoit un libre passage.*

FIG. 51. Nous avons trouvé cette force (554) $= ma.LN.NM$; $LN.NM$ exprimant l'aire différencio-différencielle de la surface. Nous avons trouvé pareillement (564.) la vîtesse u avec laquelle le Fluide jailliroit par cette différencio-différencielle $= 8\sqrt{a}$, ce qui donne $a = \frac{u^2}{64}$.

Digitized by Google

Donc la force dont il eſt ici queſtion, ſera repréſentée par $\frac{mu^2}{64}LN.MN$; expreſſion qui renferme la relation cherchée.

COROLLAIRE.

(567.) Connoiſſant la viteſſe avec laquelle le Fluide jailliroit par la différencio-différencielle, on aura la force dont cette petite ſurface ſoutient l'effort, en multipliant ſon aire *LN.MN*, par le quarré de la viteſſe u, & par la conſtante $\frac{m}{64}$.

PROPOSITION XI.

(568.) *La force perpendiculaire qu'éprouve une différencio-différencielle de ſurface* LN.MN, *lorſqu'elle ſe meut dans un Fluide, en ſuivant une direction qui lui eſt perpendiculaire, eſt* $=$ m.LN.MN$(\sqrt{a\pm\frac{1}{8}u})^2$; u *déſignant la viteſſe perpendiculaire de la ſurface.*

On vient de voir (564.) que la viteſſe avec laquelle le Fluide jailliroit par la différencio-différencielle de la ſurface, s'il avoit un libre paſſage, eſt $= 8\sqrt{a}$: par conſéquent ſi la ſurface ſe meut avec la viteſſe u, dans la même direction perpendiculaire par laquelle le Fluide ſe dirigeroit, la viteſſe relative ſera $8\sqrt{a}\pm u$; le ſigne $+$ ayant lieu dans le cas où la ſurface ſe meut contre le Fluide, & le ſigne $-$ lorſqu'elle tend à s'en éloigner, ou qu'elle ſuit le Fluide. Donc la force perpendiculaire dont la ſurface ſoutiendra l'effort, eſt (567.) $=\frac{m.LN.NM}{64}(8\sqrt{a}\pm u)^2 = m.LN.NM(\sqrt{a}\pm\frac{1}{8}u)^2$; a déſignant la diſtance verticale de la différencio-différencielle de la ſurface à la ſuperficie du Fluide, celui-ci étant en repos.

PROPOSITION XII.

(569.) *Si l'on repréſente par* n *l'angle* MNO *que forme la ſurface avec l'horiſontale* NO, *perpendiculaire à* LN, *la force perpendiculaire, dont la différencio-différencielle* LKMN *éprouvera la réſiſtance, en ſe mouvant perpendiculairement, ſera auſſi* $=$ m.LN. $\frac{MO}{\text{ſin. n}}(\sqrt{a}\pm\frac{1}{8}u)^2 =$ m.db. $\frac{da}{\text{ſin. n}}(\sqrt{a}\pm\frac{1}{8}u)^2$, *en faiſant la différencielle horiſontale* LN$=$db.

Car on a $MN : MO :: 1 : \text{ſin. n}$, & par conſéquent $MN=\frac{MO}{\text{ſin. n}}=\frac{da}{\text{ſin. n}}$; cette valeur de MN étant ſubſtituée dans l'expreſſion $m.LN.MN(\sqrt{a}\pm\frac{1}{8}u)^2$ qu'on vient de trouver (568.), la change en celle-ci, $\frac{m.db.da}{\text{ſin. n}}(\sqrt{a}\pm\frac{1}{8}u)^2$; c'eſt l'expreſſion de la force perpendiculaire dont la différencio-différencielle *LKMN* éprouve la réſiſtance, en ſe mouvant perpendiculairement.

Digitized by Google

PROPOSITION XIII.

(570.) *Si la différencio-différencielle* LKMN, *au lieu de se mouvoir suivant une direction qui lui soit perpendiculaire, se meut suivant une autre direction quelconque qui fasse avec elle un angle donné* $= \theta$, *la force perpendiculaire qu'éprouvera la différencio - différencielle, sera* $= \ldots \frac{m.db.da}{\sin \theta} (\sqrt{a \pm \frac{1}{3} u \sin \theta})^2$.

La vitesse suivant la direction que suit la différencio-différencielle, est à la vitesse suivant la perpendiculaire, comme 1 est à *sin* θ : par conséquent cette vitesse sera $= u \sin \theta$. Cette valeur étant substituée dans l'expression $\frac{m.db.da}{\sin \theta} (\sqrt{a \pm \frac{1}{3} u})^2$ qu'on vient de trouver (569.), en place de u seul, qui représente, dans cette formule, la vitesse perpendiculaire, on aura la force, ou résistance, perpendiculaire qu'éprouve la différencio-différencielle $= \frac{m.db.da}{\sin \theta} (\sqrt{a \pm \frac{1}{3} u \sin \theta})^2$.

PROPOSITION XIV.

(571.) *La force ou résistance qu'éprouvera la surface différencio-différencielle* LKMN, *suivant une direction quelconque qui la coupe sous un angle donné* x, *sera* $= \frac{m.db.da. \sin x}{\sin \theta} (\sqrt{a \pm \frac{1}{3} u \sin \theta})^2$.

Soit DL cette direction quelconque ; & du point D soit abaissé la perpendiculaire DC sur la surface ; tirant ensuite la ligne LC, l'angle DLC, ou son égal DFG, sera $= x$, FG étant supposé perpendiculaire sur LD. Si donc DF représente la force, ou résistance, perpendiculaire, DG représentera celle que la différencio-différencielle de la surface éprouve dans la direction DL. Mais DF est à DG, comme 1 est à *sin* x ; on aura donc aussi 1 est à *sin* x, comme $\frac{m.db.da}{\sin \theta} (\sqrt{a \pm \frac{1}{3} u \sin \theta})^2$, force, ou résistance, perpendiculaire, est à $\frac{m.db.da. \sin x}{\sin \theta} (\sqrt{a \pm \frac{1}{3} u \sin})^2$, force, ou résistance, suivant la direction DL.

COROLLAIRE.

(572.) Dans le cas où l'on demanderoit la force suivant la direction du mouvement, alors $x = \theta$; & par conséquent la force qu'éprouvera la différencio-différencielle de la surface $LKMN$, dans la direction de son mouvement, est $= \frac{m.db.da.\sin \theta}{\sin \theta} (\sqrt{a \pm \frac{1}{3} u \sin \theta})^2$.

LEMME I.

(573.) *Si, par quelque point* D *de la direction* DL, *on fait passer un plan vertical* IED, *perpendiculaire à la différencio-différencielle* LKMN;

Digitized by Google

& par la base LN de ladite différencio-différencielle, un plan horisontal NLA. Si, de plus, ayant élevé la verticale DAI, on mene les perpendiculaires AB, DC, AH, en nommant λ l'angle NLA, & μ l'angle LDA, on aura $\sin x$, ou le sinus de l'angle CLD que forme la direction DL avec la différencio-différencielle, $= \sin\lambda.\sin\nu.\sin\mu. + \cos\mu.\cos\nu$.

Supposons $LA = q$, on aura $AE = q.\sin\lambda$; & dans le triangle rectangle BAE, à cause que $\sin\nu =$ le sinus de l'angle BEA, on aura $BA = CH = q.\sin\nu.\sin\lambda$. Dans le triangle aussi rectangle LAD, on a $DA = \frac{q\cos\mu}{\sin\mu}$; mais à cause que les triangles DAH, DIC, EIA, sont semblables, l'angle $IEA = HDA$, & le sinus de cet angle est par conséquent $= \sin\nu$; donc $DH = \frac{q.\cos\mu.\cos\nu}{\sin\mu}$; & par conséquent $CH + HD = CD = q.\sin\lambda.\sin\nu + \frac{q.\cos\mu.\cos\nu}{\sin\mu}$. De plus, on a $DL = \frac{q}{\sin\mu}$: donc, dans le triangle rectangle CLD, on aura $\frac{q}{\sin\mu} : q.\sin\lambda.\sin\nu + \frac{q.\cos\mu.\cos\nu}{\sin\mu} :: 1 : \sin x = \sin\lambda.\sin\nu.\sin\mu + \cos\mu.\cos\nu$.

COROLLAIRE I.

(574.) Substituant cette valeur de $\sin x$ dans l'expression .... $\frac{m.db.da.\sin x}{\sin\nu}(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{3}u\sin\theta)^2$ de la résistance qu'éprouve la différencio-différencielle suivant la direction DL, elle deviendra = ... $m.db.da\left(\sin\lambda.\sin\mu + \frac{\cos\mu.\cos\nu}{\sin\nu}\right)(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{3}u\sin\theta)^2$.

COROLLAIRE II.

(575.) Si, de l'extrémité N de la base LN, on abaisse, sur la direction LR qui passe par l'autre extrémité, la perpendiculaire NR; en supposant cette perpendiculaire $= dc$, on aura $NR = db.\sin\lambda = dc$, & $db = \frac{dc}{\sin\lambda}$.

COROLLAIRE III.

(576.) Substituant cette valeur de db dans l'expression .... $m.db.da\left(\sin\lambda.\sin\mu + \frac{\cos\mu.\cos\nu}{\sin\nu}\right)(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{3}u\sin\theta)^2$, elle deviendra .. $m.dc.da\left(\sin\mu + \frac{\cos\mu.\cos\nu}{\sin\lambda.\sin\nu}\right)(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{3}u\sin\theta)^2$.

COROLLAIRE IV.

(577.) Dans le cas où l'on demanderoit la résistance horisontale, on auroit $\sin\mu = 1$, & $\cos\mu = 0$: donc cette résistance sera = $m.dc.da\ (a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{3}u\sin\theta)^2$.

Digitized by Google

PLANC. III.

COROLLAIRE V.

(578.) La force, ou réſiſtance, horiſontale eſt donc à celle qui s'exerce dans une direction quelconque comme l'unité eſt à $\mathit{ſin}\ \mu + \frac{\mathit{cof}\ \mu.\ \mathit{cof}\ n}{\mathit{ſin}\ \lambda.\ \mathit{ſin}\ n}$; ou comme $\mathit{ſin}\ n.\ \mathit{ſin}\ \lambda$ eſt à $\mathit{ſin}\ n.\ \mathit{ſin}\ \lambda.\ \mathit{ſin}\ \mu + \mathit{cof}\ \mu.\ \mathit{cof}\ n$.

COROLLAIRE VI.

(579.) Si l'on nomme H la force, ou réſiſtance, horiſontale; celle qui s'exerce ſuivant une direction quelconque ſera $= H\left(\mathit{ſin}\ \mu + \frac{\mathit{cof}\ \mu.\ \mathit{cof}\ n}{\mathit{ſin}\ \lambda.\ \mathit{ſin}\ n}\right)$.

COROLLAIRE VII.

(580.) Dans le cas où l'on demanderoit la force, ou réſiſtance, verticale, on auroit $\mathit{ſin}\ \mu = 0$, & $\mathit{cof}\ \mu = 1$: cette réſiſtance ſera donc $= \frac{H.\ \mathit{cof}\ n}{\mathit{ſin}\ \lambda.\ \mathit{ſin}\ n}$.

COROLLAIRE VIII.

FIG. 51. & 53.

(581.) Si l'horiſontale NO, perpendiculaire à la baſe LN, eſt ſuppoſée $= de$, on aura $\mathit{cof}\ n : \mathit{ſin}\ n :: de : da = \frac{de.\ \mathit{ſin}\ n}{\mathit{cof}\ n}$; cette valeur étant ſubſtituée dans l'expreſſion de la force . . . . . $m.db.da\left(\mathit{ſin}\ \lambda.\ \mathit{ſin}\ \mu + \frac{\mathit{cof}\ \mu\ \mathit{cof}\ n}{\mathit{ſin}\ n}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2}\ u\ \mathit{ſin}\ \theta\right)^2$, la changera en celle-ci $m.db.de\left(\frac{\mathit{ſin}\ n.\ \mathit{ſin}\ \lambda.\ \mathit{ſin}\ \mu}{\mathit{cof}\ n} + \mathit{cof}\ \mu\right)\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2} u\ \mathit{ſin}\ \theta\right)^2$.

COROLLAIRE IX.

(582.) Dans le cas où l'on voudroit avoir la réſiſtance verticale, on auroit $\mathit{ſin}\ \mu = 0$, & $\mathit{cof}\ \mu = 1$, & par conſéquent cette réſiſtance ſeroit $= m.db.de\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2}\ u\ \mathit{ſin}\ \theta\right)^2$.

COROLLAIRE X.

(583.) Puiſque l'angle que forme la direction du mouvement avec la différencio-différencielle, eſt exprimé par θ, on aura auſſi $\mathit{ſin}\ \theta = \mathit{ſin}\ \lambda.\ \mathit{ſin}\ n.\ \mathit{ſin}\ \mu + \mathit{cof}\ \mu.\ \mathit{cof}\ n$, dans le cas où il ſeroit queſtion de la force, ou réſiſtance, ſuivant cette direction.

COROLLAIRE XI.

(584.) Dans le mouvement horiſontal, $\mathit{ſin}\ \mu = 1$, & $\mathit{cof}\ \mu = 0$: donc, dans ce cas, $\mathit{ſin}\ \theta = \mathit{ſin}\ \lambda.\ \mathit{ſin}\ n$.

COROLLAIRE XII.

(585.) Le mouvement étant vertical, $\mathit{ſin}\ \mu = 0$, & $\mathit{cof}\ \mu = 1$: donc, dans ce cas, on aura $\mathit{ſin}\ \theta = \mathit{cof}\ n$.

COROLLAIRE

Digitized by Google

PLANC. IX.

COROLLAIRE XIII.

(586) La réſiſtance horiſontale, dans le cas où la direction du mouvement eſt auſſi horiſontale, ſera donc $m.dc.da\,(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{6} u \sin \lambda . \sin \nu)^2$; & la réſiſtance verticale, lorſque la direction du mouvement eſt pareillement verticale, ſera $= m.db.de\,(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{6} u \cos \nu)^2$.

SCOLIE.

FIG. 51.

(587.) Dans tous les cas ci-deſſus, on doit entendre que la ſurface AB eſt en partie plongée dans le Fluide, & en partie au dehors, de ſorte que a exprime la diſtance verticale de la différencio-différencielle $LKMN$, juſqu'à la ſuperficie P du Fluide, celui-ci étant en repos. Toute la ſurface peut cependant être ſubmergée dans le Fluide, de ſorte que Q ſoit un point de la ſuperficie du Fluide. Dans ce cas, la lettre a devroit repréſenter la hauteur verticale QM du Fluide au-deſſus de la différencio différencielle $LKMN$, & non la hauteur PM de la ſurface AB. Pour éviter toute équivoque, nous ferons $QP = D$, & $PM = a$; de ſorte que la hauteur verticale du Fluide au-deſſus de la différencio-différencielle $LKMN$, ne ſera plus exprimée par a, mais par $D+a$. Cette valeur étant donc ſubſtituée, dans les expreſſions précédentes, en place de a ſeul, qui déſignoit auparavant la hauteur verticale du Fluide, on aura (571 & 574.) $\frac{m.db.da \sin \varkappa}{\sin \nu}\left((D+a)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{6} u \sin \theta\right)^2 = m.db.da\,(\sin \lambda . \sin \mu + \frac{\cos \mu . \cos \nu}{\sin \nu})\left((D+a)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{6} u \sin \theta\right)^2$, pour l'expreſſion de la réſiſtance ſuivant une direction quelconque; $m.dc.da\left((D+a)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{6} u \sin \theta\right)^2$ pour la réſiſtance horiſontale, (577.) & (582.) $m.db.de\left((D+a)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{6} u \sin \theta\right)^2$ pour la réſiſtance verticale. Si l'on vouloit avoir les réſiſtances ſuivant la direction du mouvement, comme, dans ce cas, $\varkappa = \theta$, on auroit $\frac{m.db.da.\sin \theta}{\sin \nu}\left((D+a)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{6} u \sin \theta\right)^2$ pour l'expreſſion de la réſiſtance dans une direction quelconque; & (586.) $m.dc.da\left((D+a)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{6} u \sin \lambda . \sin \nu\right)^2$ pour la réſiſtance horiſontale; & enfin, $m.db.de\left((D+a)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{6} u \cos \nu\right)^2$ pour la réſiſtance verticale.

PROPOSITION XV.

FIG. 52.

(588.) *Si un Fluide ſe meut en vertu de ſa propre gravité, & prend une vîteſſe conſtante, une partie de l'action de chacune de ſes particules eſt détruite par une force quelconque.*

Soit CI la ſuperficie du Fluide inclinée à l'horiſon, & B une de ſes

Digitized by Google

PLANC. III. FIG. 57.

particules, l'action de la gravité sur cette particule est dirigée suivant la verticale BD, & peut se décomposer en deux autres, l'une suivant BA, perpendiculaire à la superficie CI; & l'autre suivant AD, parallele à cette superficie. Par la premiere action, le Fluide doit demeurer en équilibre, & par la seconde, sa vîtesse devroit s'accélérer: mais, par la supposition, sa vîtesse est constante; donc $du=0$. Donc la somme des puissances qui agissent pour augmenter la vîtesse, est zéro; & par conséquent il faut qu'il y ait une force, ou puissance, qui agisse dans une direction opposée, & qui détruise celle qui agit suivant AD.

PROPOSITION XVI.

(589.) *Trouver la force dont une différencio-différencielle de surface éprouve l'action, lorsqu'étant en repos, c'est le Fluide qui se meut contre elle, & qui la choque.*

Il paroît, au premier coup-d'œil, que l'action & la réaction étant égales, ce devroit être la même chose, quant à l'effet, que la surface fût en mouvement, ou que ce fût le Fluide; & que toute la différence consiste à supposer que le Fluide soit en mouvement avec la même vîtesse u, dans une direction contraire. En effet, ce principe seroit exactement vrai, si la gravitation des particules du Fluide étoit toujours perpendiculaire à sa superficie; mais il n'en est pas ainsi dans le cas où le Fluide se meut, parce que son mouvement dépend de sa *dénivellation*. Dès que le Fluide se meut, sa superficie cesse d'être de niveau, & par conséquent la direction suivant laquelle gravitent ses particules, n'est plus perpendiculaire à sa superficie. Supposons, par exemple, que le Fluide se meuve avec la vîtesse constante u, sa superficie CI étant inclinée à l'horison: la gravitation verticale α des particules du Fluide en FB peut se décomposer en deux, l'une β agissant suivant la direction BA perpendiculaire à la superficie CI, & l'autre γ parallele à cette même superficie. Exprimant donc par ω l'angle ADB que forme la verticale avec la superficie du Fluide, on aura $\beta=\alpha \sin \omega$, & $\gamma=\alpha \cos \omega$. Cette derniere gravitation, ou puissance, est détruite, comme on l'a vu *Art.* 588, & il demeure seulement la force $\beta=\alpha \sin \omega$ perpendiculaire à la superficie CI; & par conséquent nous aurons équilibre dans le Fluide, par l'action de cette puissance, & sa valeur est celle que nous devons substituer, dans les formules précédentes, en place de α seul.

Supposant maintenant, comme ci-dessus, la verticale $FB=a$, on aura $EB=a \sin \omega$; & substituant aussi cette valeur au lieu de α dans l'équation $\alpha=\frac{Au^2}{2a}$, trouvée, *Art.* 43, nous aurons $a \sin \omega=\frac{Au^2}{2a \sin \omega}$;

Digitized by Google

d'où l'on tire $\frac{a}{A} = \frac{u^2}{2a \sin \omega^2}$: mais (52.) $\frac{a}{A} = 32$; donc $32 = \frac{u^2}{2a \sin \omega^2}$, PLANC. III, & par conséquent $u = 8a^{\frac{1}{2}} \sin \omega$. Telle est la vitesse avec laquelle le Fluide jaillira par un orifice fait en B, en vertu de l'action seule de la puissance $\beta = \alpha \sin \omega$.

La vitesse relative avec laquelle le Fluide se mouvera dans l'orifice, sera donc $= 8a^{\frac{1}{2}} \sin \omega \pm u \sin \theta$; & le poids, ou la force perpendiculaire que supportera la différencio-différencielle $LN.NM$ de la surface, FIG. 51. sera $= m.LN.NM\ (a^{\frac{1}{2}} \sin \omega \pm \frac{1}{8} u \sin \theta)^2$, ou $= \ldots\ldots\ldots$ $m\ LN.NM\big((D+a)^{\frac{1}{2}} \sin \omega \pm \frac{1}{8} u \sin \theta\big)^2$. Substituant maintenant dans cette formule les valeurs de LN & NM, qu'on a trouvées, ou bien, substituant, dans les formules trouvées (587.), $(D+a)^{\frac{1}{2}} \sin \omega$, en place de $D+a$, on aura $\frac{m.db.da. \sin x}{\sin n} \left((D+a)^{\frac{1}{2}} \sin \omega \pm \frac{1}{8} u \sin \theta\right)^2 = m.db.da \left(\sin \lambda . \sin \mu . + \frac{\cos \mu . \cos n}{\sin n}\right)\left((D+a)^{\frac{1}{2}} \sin \omega \pm \frac{1}{8} u \sin \theta\right)^2$, pour l'expression de la force dans une direction quelconque ; $\ldots\ldots\ldots$ $m.dc.da\big((D+a)^{\frac{1}{2}} \sin \omega \pm \frac{1}{8} u \sin \theta\big)^2$, pour celle de la force horisontale, & $m.db.dc\big((D+a)^{\frac{1}{2}} \sin \omega \pm \frac{1}{8} u \sin \theta\big)^2$, pour la verticale. Et si l'on demande les expressions de la force, suivant la direction du mouvement, on aura $\frac{m.db.da. \sin \theta}{\sin n}\left((D+a)^{\frac{1}{2}} \sin \omega \pm \frac{1}{8} u \sin \theta\right)^2 = \ldots\ldots\ldots$ $m.dc.da\big((D+a)^{\frac{1}{2}} \sin \omega \pm \frac{1}{8} u \sin \lambda . \sin n\big)^2$, quand cette direction est horisontale ; & $m.db.de\left((D+a)^{\frac{1}{2}} \sin \omega \pm \frac{1}{8} u \cos n\right)^2$, quand elle est verticale.

COROLLAIRE I.

(590.) Si le Fluide se meut horisontalement, on aura $\sin \omega = 1$, & les expressions des forces se réduiront à celles qu'on a trouvées pour le cas où le Fluide est en repos, & que la surface choquée est en mouvement ; d'où il suit que c'est seulement dans cette supposition que peut avoir lieu le principe généralement reçu, qui est que c'est la même chose, quant à l'effet, que ce soit la surface qui se meuve, ou que ce soit le Fluide.

COROLLAIRE II.

(591.) Les formules précédentes sont donc toutes renfermées dans ces dernieres : il suffit de faire $\sin \omega = 1$, pour les obtenir.

PROPOSITION XVII.

(592.) *Trouver la force qui agit sur une differencio-différencielle de surface, lorsque la surface & le Fluide sont en mouvement.*

Digitized by Google

Pour avoir la solution de ce cas, il ne faut que chercher la valeur de la vîtesse composée des deux autres, sçavoir, celles de la surface & du Fluide, & la substituer, dans ces dernieres formules, en place de u. On substituera de même, en place de θ, la valeur de l'angle que forme la direction composée avec la différencio-différencielle de la surface. Ces substitutions faites, on aura les formules qui conviennent au cas proposé, comme il est évident, par la théorie de la composition & de la décomposition des forces.

SCOLIE.

(593.) Un Fluide étant un corps, il semble que nous aurions dû nous assujettir, dans la théorie de ce Chapitre, aux loix & aux principes que nous avons donnés dans le *Chap. VI du Livre I*; puisque l'impulsion d'une surface contre un Fluide, est une vraie percussion. Sa force, désignée par π dans le Chapitre cité, & qui est $= \frac{DH\,D'H'}{Dn+D'H'}$, se réduit à $\pi = DH$, dans le cas présent, où la dureté, ou densité D, du Fluide est négligeable par rapport à celle de la surface, ou du corps; c'est-à-dire que la force dont la surface souffre l'action, est en raison directe de la densité du Fluide, & de l'amplitude H de l'impression. Mais cette maniere d'envisager la question ne nous auroit pas conduit à une connoissance parfaite de la force qui a fait l'objet de nos recherches; car, quoique nous connoissions la valeur de H dans le cas du repos, laquelle n'est en effet que l'aire de la surface du corps choquant perpendiculaire à la direction du mouvement, nous ne la connoissons pas dans le cas du mouvement actuel, parce qu'alors cette valeur n'est plus la même, attendu qu'elle subit des altérations. Nous n'aurions pas obtenu une connoissance plus parfaite, en nous servant de l'équation $\pi = \frac{H}{I}(\frac{1}{2}AU^2 + ax)$ qu'on a trouvée, *Art.* 312, équation à laquelle se réduit le cas dont il est ici question; ou bien $\pi = \frac{Hax}{I}$, en supposant la vîtesse initiale U avec laquelle se mouvoit la surface égale à zéro : car l'impression totale I étant comme Hx, cette équation nous eût seulement appris que la force π, dont la surface éprouve l'action, est comme la puissance a qui la pousse C'est pour cela que nous avons tâché de prendre un autre chemin, qui, comme on l'a vu, nous a conduit à la vraie connoissance de la valeur de π, qui est $= \frac{m.dt.ds\,\sin\alpha}{\sin\alpha}\left((D+a)^{\frac{1}{2}}\sin\alpha \pm \frac{1}{2}u\sin\theta\right)^2$. Mais, quelque simple que soit la théorie que nous avons employée, elle ne laisseroit pas cependant de pouvoir être combattue par des raisonnements très-solides, si l'expérience ne la confirmoit pas, au-

Digitized by Google

tant qu'elle le fait, par tous les moyens qu'on peut employer à cette vérification, comme on le verra par la suite. Au reste, ces embarras ont existé dans tous les temps, & ont fait regarder ce sujet comme de la plus grande difficulté; les plus célebres Géometres en ont fait l'objet de leurs recherches, & avouent qu'ils ont tâché seulement d'atteindre le but, sans y être parvenus entiérement.

Le Docteur *Wallis*, dans ses *Œuvres Mathematiques*, établit cette force seulement comme la simple viteſſe; & c'eſt d'après cette doctrine qu'il fonde tous ſes calculs ſur le mouvement des corps projettés dans l'air. Il ne donne pas d'autre raiſon pour appuyer ſon ſentiment, & pour ſuivre cette regle, ſi ce n'eſt, qu'avec une viteſſe double, une ſurface en mouvement écarte une quantité double de Fluide, & qu'elle en écarte une quantité triple avec une viteſſe triple, & ainſi de ſuite. Il ajoute qu'on pourroit lui objecter qu'avec une viteſſe double, la ſurface met en mouvement une quantité double de Fluide, en lui donnant une viteſſe double; que par conſéquent il paroît que la ſurface a beſoin d'une force doublée pour le mouvoir: mais il répond à cela, en diſant que la ſurface ne meut pas le Fluide, qu'elle ne fait ſeulement que le ſéparer. Il eſt étonnant que les difficultés qui réſultent de ce principe, ne ſe ſoient pas préſentées au Docteur *Wallis*, & qu'il n'ait pas ſenti l'inſuffiſance de cette réponſe. En effet, il eſt bien difficile de concevoir comment la ſurface peut ſéparer le Fluide ſans le mouvoir, & ſans le mouvoir avec une viteſſe proportionnelle à la ſienne.

Léonard Euler, ce grand Géometre, s'explique ainſi dans ſa *Science Navale*. Qu'on ſuppoſe, dit-il, une ſurface plane AB, dont l'aire ſoit $= a^2$, miſe en mouvement dans l'eau, ſuivant la direction CO qui lui eſt perpendiculaire. Soit, de plus, M le poids de du corps dont AB eſt la ſurface, & v la hauteur dont il devroit tomber pour acquérir la viteſſe avec laquelle il exécute ſon mouvement. Soit auſſi $Cc = dx$, l'eſpace qu'il parcourt dans un inſtant, de ſorte que, pendant cet inſtant, la ſurface paſſe de la ſituation AB à la ſituation ab, Aa étant $= Cc = Bb$; & comme le corps perd de ſa viteſſe, il met $v - dv$, pour exprimer la hauteur d'où le corps devroit tomber pour acquérir ſa viteſſe diminuée. Ceci ſuppoſé, le même Auteur pourſuit ainſi: le corps aura choqué, dans cet inſtant, l'eau contenue dans l'eſpace $AabB$, dont le poids eſt égal à ma^2dx, en exprimant par m la denſité, ou la peſanteur ſpécifique, de l'eau: & en ſuppoſant que le centre de gravité de la ſurface ſoit dirigé ſuivant la même ligne Cc, dans laquelle ſe trouve

Digitized by Google

celui du volume de l'eau *AabB*, afin qu'il n'y ait aucune rotation, cette quantité d'eau se mettra en mouvement, & après le premier instant, elle continuera de se mouvoir avec la même vîtesse que le corps. La quantité de mouvement sera donc, après ce premier instant, celle du corps & celle de l'eau réunies; c'est-à-dire, . . . $(M+ma^2dx)(v-dv)^{\frac{1}{2}}$, laquelle doit être égale au mouvement qu'avoit le corps au commencement de l'action, c'est-à-dire, immédiatement avant le choc, mouvement qui étoit $=Mv^{\frac{1}{2}}$. Donc nous aurons, dit-il, $Mv^{\frac{1}{2}}=(M+ma^2dx)(v-dv)^{\frac{1}{2}}=(M+ma^2dx)(v^{\frac{1}{2}}-\frac{dv}{2v^{\frac{1}{2}}})$; ce qui donne $Mdv=2ma^2vdx$. Il suppose ensuite que p est une puissance qui, dirigée suivant CO, soit capable de produire le même effet que la force qui pousse la surface; & delà il déduit $Mdv=pdx=2ma^2vdx$, ou $p=2ma^2v$; c'est-à-dire que la puissance équivalente à la force qui pousse la surface, ou que cette force elle-même, est égale au double du poids d'une colonne d'eau dont la base est la surface choquée, & la hauteur celle dont il faudroit que le corps tombât pour acquérir la vîtesse avec laquelle il se meut.

Pour réduire cette théorie à la nôtre, nous supposerons, dans l'équation $m.dc.da\big((D+a)^{\frac{1}{2}}\sin\omega+\frac{1}{8}u\sin\theta\big)^2,\sin\omega=1$, & $\sin\theta=1$; ce qui la changera en $m.dc.da\,((D+a)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{8}u)^2$; d'où l'on voit que ces deux théories ne peuvent convenir entre elles qu'en faisant $D+a=0$, c'est-à-dire, en supposant que la différencio différencielle choquée coïncide précisément avec la superficie du Fluide: car, dans ce cas, la force devient $=m.dc.da.\frac{1}{64}u^2$, ou $=m.dc.da.v$, en substituant (52.) la valeur de $\frac{1}{64}u^2$ qui est $=v$; expression qui convient avec celle d'*Euler*, avec la seule différence que la sienne est double de celle-ci. Mais on voit que, dans le fait, sa théorie ne convient avec la nôtre que dans un cas seulement, qu'il est presque impossible de supposer; & encore résulte-t-il de la théorie d'*Euler* que la force est égale au double du poids d'une colonne d'eau, dont la base est la surface choquée, & dont la hauteur est celle dont il faudroit que le corps tombât pour acquérir la vîtesse avec laquelle il se meut; résultat dont l'Auteur avoue lui-même n'être pas satisfait, en considérant que le poids que supporte une surface, est seulement le poids simple de la même colonne d'eau, comme notre théorie l'indique.

Cette observation paroîtra encore plus digne d'attention, si, au lieu de $Mdv=pdx$, on fait $Mdv=\frac{pdx}{32}$, qui est la seule équation légitime. En effet, on a vu (41 & 52.) que dans les corps graves

Digitized by Google

qui tombent verticalement, $dv = \frac{Mudu}{32M}$, u désignant la viteſſe avec laquelle ſe meut le corps ; & dans le cas où ſon mouvement ſeroit produit par la puiſſance p, on a $dx = \frac{Mudu}{p}$ (41.) : en combinant ces deux équations, on en tire $32dv = \frac{pdx}{M}$, ou $Mdv = \frac{pdx}{32}$, ce qui donne $\frac{pdx}{32} = 2ma^2vdx$, ou $p = 64ma^2v$; c'eſt-à-dire que la réſiſtance eſt égale au poids de 64 colonnes d'eau, dont la baſe de chacune eſt la ſurface choquée, & dont la hauteur eſt celle dont il faudroit que le corps tombât pour acquérir la viteſſe avec laquelle il ſe meut. Ce réſultat, qui indique un poids prodigieux, paroîtra ſans doute bien étrange, & bien éloigné des conſéquences que nous ont fourni les principes établis dans le Chapitre précédent.

En outre, il faut obſerver que le poids de la quantité d'eau que meut le corps, n'eſt pas ma^2dx, mais (554.) celui d'une colonne d'eau, dont la baſe eſt la ſurface a^2, & dont la hauteur eſt celle du Fluide au-deſſus de cette ſurface ; de ſorte que le poids ſera d'autant plus grand, & par conſéquent la réſiſtance d'autant plus grande, que la ſurface ſera plus profondément enfoncée dans le Fluide. Ce réſultat, ſi clair & ſi évident, ne peut cependant ſe déduire ni du calcul, ni des équations ſuppoſées. On pourroit, au reſte, ſe convaincre de cette vérité, ſans cette conſidération : il ſuffit, pour cela, de lire le *Scolie* qui eſt à la fin de la *Propoſition XXXV* du *Livre II* de la *Philoſophie Naturelle* de *Newton* ; on y verra clairement que le corps, à la vérité, ne choque que la partie de Fluide exprimée par ma^2dx, mais que cette partie en choque une autre qui eſt devant elle, & cette dernière celle qui la ſuit, & ainſi de ſuite ſucceſſivement, ſans qu'il ſoit poſſible d'aſſigner aucune limite ; de ſorte que le corps choque immédiatement, ou médiatement, une quantité de Fluide qu'il n'eſt pas poſſible de déterminer, bien loin de ne choquer que la quantité contenue dans l'eſpace a^2dx.

Daniel Bernoulli, Auteur connu ſi avantageuſement dans la république des lettres par ſes ſçavants Ouvrages, fait un calcul ſemblable, duquel il conclud de la même maniere (*a*), que le Fluide n'étant pas élaſtique, la réſiſtance eſt égale au double du poids d'une colonne du même Fluide, dont la baſe eſt la ſurface choquée, & la hauteur celle d'où le corps devroit tomber pour acquérir la viteſſe avec laquelle il ſe meut : mais il ajoute que, ſi le Fluide étoit

(*a*) *Commentaires de l'Académie de Pétersbourg, Mois de Juin & Octobre 1727.*

Digitized by Google

élastique, la résistance seroit exprimée par une colonne quadruple, c'est-à-dire qu'elle seroit double de la premiere. Ce résultat est conséquent pour la vitesse qui demeure aux corps, non-seulement élastiques, mais parfaitement élastiques, après que la plus grande impression est entiérement formée. Cette vitesse a été trouvée (273.) pour le cas dont il est question, $= \frac{(M-ma^2dx)u}{M+ma^2dx} = u - du$ *; d'où l'on tire $(M-ma^2dx)u = (M+ma^2dx)(u-du)$, ou $Mudu = 2ma^2u^2dx$; & en substituant pour Mdu sa valeur pdx, il vient $p = 2ma^2u^2$; c'est-à-dire, la résistance double de celle qu'on vient de trouver, le Fluide n'étant point élastique **. Tout ce qu'on peut dire de ce calcul, c'est qu'il est sujet aux mêmes difficultés, & aux mêmes objections que le précédent; sans compter la supposition que le Fluide soit parfaitement élastique, quoiqu'il ne puisse cependant exercer son élasticité totale qu'après un temps infini. Ce qu'il y a de plus étonnant dans tout ceci, c'est que nos Auteurs n'ayant déterminé que la force qu'éprouvent les surfaces, il ne leur soit pas venu à l'esprit qu'il est impossible que cette force soit simplement comme une fonction de la vitesse; car celle-ci devenant zéro, la force devroit aussi devenir $= 0$; ce qui est contraire à tous les principes du Chapitre précédent, principes dont la certitude est reconnue de tout le monde, & par ces Auteurs mêmes.

Newton commence l'examen de cette question par une voie toute opposée. Il donne, dans la *Section I* (*Philosophia Naturalis*, *Lib. II*), les résultats, ou les conséquences qui doivent suivre de la supposition que les résistances sont comme les simples vitesses; & dans le *Scolie* qui termine la même Section, il dit : *Au reste, l'hypothese qui fait la résistance des corps dans la raison des simples vitesses, est plus*

* Pour appliquer au cas présent les principes de l'*Art.* 273, auquel l'Auteur renvoie, on fera attention, 1°. que la vitesse primitive du corps choquant est ici représentée par u; tandis qu'elle étoit représentée par U dans l'endroit cité; 2°. que la vitesse primitive du corps choqué, qui est ici le Fluide, est zéro, ainsi $V = 0$; 3°. que la vitesse du corps choquant, après le premier instant, c'est-à-dire, après que la plus grande impression est achevée, est, dans le cas présent, $= u - du$.

** Pour voir distinctement la vérité de ce que l'Auteur avance, il ne faut que substituer (52.) à la place de u^2, sa valeur $64v$, v exprimant la hauteur dont il faudroit que le corps tombât pour acquérir la vitesse u; alors on aura $p = 128\, m\, v$, quantité double de $64\, ma^2v$ qu'il vient de trouver, le Fluide n'étant pas élastique. Quand l'Auteur dit que le résultat de *Daniel Bernoulli* est conséquent pour la vitesse qui demeure aux corps parfaitement élastiques, après que la plus grande impression est entiérement formée, il est évident qu'il n'entend parler que de ce qui concerne la duplicité de la résistance, & non de sa mesure effective, qui, comme on le voit, ne convient nullement avec ses principes, & est d'ailleurs absolument contraire à ce que l'expérience manifeste, comme on le verra par la suite.

mathématique

Digitized by Google

mathématique que conforme à la nature. Dans les milieux qui n'ont aucune ténacité, les réſiſtances des corps ſont en raiſon doublée des viteſſes: car, dit le même Auteur, *dans un temps moindre, un corps qui ſe meut avec une plus grande viteſſe, communique, à la même quantité du milieu, un mouvement plus grand, en raiſon de ſa plus grande viteſſe. Donc, en temps égal, il lui communiquera un mouvement plus grand dans la raiſon doublée, à cauſe de la plus grande quantité des parties du milieu qui ſont mues; & la réſiſtance, qui n'eſt que la force de réaction, eſt égale, ou proportionnelle, au mouvement communiqué.* Ce raiſonnement, qui eſt commun à tous les Auteurs, depuis le Docteur *Wallis*, ſert de baſe à notre Philoſophe; & c'eſt d'après lui qu'il examine, dans la *Section II*, les conſéquences qui doivent réſulter de la ſuppoſition que les réſiſtances ſont comme les quarrés des viteſſes. Enſuite, dans la *Section III*, il paſſe à l'examen des propriétés qui devroient réſulter, ſi les réſiſtances étoient en partie comme les ſimples viteſſes, & en partie comme leurs quarrés. L'objet de l'analyſe de ces différentes hypotheſes, eſt de les comparer enſuite avec les expériences, & de découvrir ainſi laquelle eſt d'accord avec les loix de la nature. Dans les *Sections IV* & *V*, il détermine le mouvement que doivent prendre les corps qui tournent dans des milieux qui réſiſtent ſelon les premieres ſuppoſitions; & traite de la denſité & compreſſion de ces milieux. Dans la *Section VI*, il traite du mouvement & de la réſiſtance qu'éprouvent les pendules, ou les fils à plomb qui oſcillent autour d'un point fixe par l'action de la gravité. Enfin, dans la trente-unieme & derniere *Propoſition*, il démontre que les différences des arcs décrits en deſcendant, aux arcs décrits en montant, ſont comme les réſiſtances. Mais il ſuppoſe, pour cela, que les pendules oſcillent dans la cycloïde, afin que toutes leurs oſcillations ſoient de même durée; ou, comme nous l'avons dit, *Art.* 369, que les oſcillations des pendules ſoient d'une très-petite étendue, pour que les arcs qu'ils décrivent coïncident avec ceux de la cycloïde. En outre, le même ſçavant Auteur n'a pas négligé de faire & de répéter avec ſoin les expériences néceſſaires pour la recherche d'un principe auſſi important.

Toutes ces expériences ſont rapportées dans le *Scolie* général qui ſuit la *Propoſition XXXI*. Il s'eſt ſervi, pour les premieres, du mouvement d'un pendule de 10 pieds $\frac{1}{2}$ anglais de longueur, compoſé d'un globe de bois de 6 pouces $\frac{7}{8}$ de diametre. Voici la premiere Table qu'il en donne.

Digitized by Google

Longueur des demi-arcs décrits, exprimés en pouces, { 2. 4. 8. 16. 32. 64.

Différences des arcs observés. $\left\{ \frac{1}{636} \cdot \frac{1}{242} \cdot \frac{1}{69} \cdot \frac{4}{71} \cdot \frac{8}{37} \cdot \frac{24}{29} \right.$.

Les premiers nombres sont dans la raison de 1 à 2 : il faudroit donc, pour que les résistances fussent comme les quarrés des vitesses, ainsi que le dit *Newton*, dans le *Scolie* qui termine la premiere *Section*, il faudroit, dis-je, que les seconds fussent dans la raison de 1 à 4.

La premiere raison est celle de $\frac{1}{636}$ à $\frac{1}{242}$, ou celle de 1 à $2\frac{174}{242}$.
La seconde est celle de 69 à 242, ou de 1 à $3\frac{35}{69}$.
La troisieme est celle de 71 à 276, ou de 1 à $3\frac{69}{71}$.
La quatrieme est celle de 37 à 142, ou de 1 à $3\frac{31}{37}$.
La cinquieme est celle de 29 à 111, ou de 1 à $3\frac{24}{29}$.

Toutes ces raisons sont, comme on le voit, plus grandes que celle de 1 à 4, qui est la raison des quarrés des arcs, ou des quarrés des vitesses. Cependant notre respectable Auteur remarque, avec raison, que les dernieres, dans lesquelles le pendule faisoit de grandes oscillations, sont très-proches d'être comme les quarrés; & par conséquent il en conclud que, dans ces oscillations, les résistances sont à-peu-près comme ces mêmes quarrés. Mais il n'en arrive pas de même dans les petites oscillations : dans la premiere, la raison étoit seulement comme 1 à $2\frac{174}{242}$; & il est évident qu'on peut présumer que, si l'on avoit continué à faire des expériences, en diminuant de plus en plus les oscillations, on auroit enfin trouvé les résistances dans la raison de 1 à 2, c'est-à-dire, comme les simples vitesses, puisque la raison a été trouvée de plus en plus grande, à mesure que les oscillations ont été plus petites.

Une autre suite d'observations faites avec le même pendule, & rapportées au même endroit, ne présente rien de plus satisfaisant : voici la Table qu'il en donne.

Demi-arcs décrits, exprimés en pouces. { 2. 4. 8. 16. 32. 64.

Différences des arcs observés. $\left\{ \frac{1}{748} \cdot \frac{1}{272} \cdot \frac{4}{325} \cdot \frac{12}{250} \cdot \frac{24}{125} \cdot \frac{36}{68} \right.$.

Chacune de ces différences étant comparée avec celle qui la suit immédiatement, on aura les raisons de 1 à $2\frac{204}{272}$; de 1 à $3\frac{113}{325}$; de 1 à $3\frac{231}{250}$; de 1 à 4; & de 1 à $2\frac{193}{136}$. Il est cependant certain qu'il y en a une dans le rapport de 1 à 4, qui est exactement la raison du quarré des vitesses; mais la suivante, celle de 1 à $2\frac{193}{136}$, est plus grande, quoiqu'elle dût être moindre, suivant la diminution

Digitized by Google

qui s'observe dans toutes les précédentes ; ce qui prouve clairement que la différence $\frac{24}{1111}$ est excessivement grande, & qu'il s'est glissé quelque erreur dans cette observation. En diminuant cette différence, la derniere raison deviendra plus petite ; mais celle qui la précede augmentera, & ne sera plus celle de 1 à 4.

Ce que nous avons avancé ci-dessus est vérifié dans deux autres suites d'observations, faites avec une balle de plomb de deux pouces de diametre, ajustée au pendule, en place de celle de bois : en voici les deux Tables.

PREMIERE TABLE.

Demi-oscillations décrites, exprimées en pouces.	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.
Différences des arcs observés.	$\frac{1}{1808}$.	$\frac{1}{912}$.	$\frac{1}{386}$.	$\frac{1}{140}$.	$\frac{4}{181}$.	$\frac{4}{53}$	$\frac{8}{30}$.

SECONDE TABLE.

Demi-oscillations décrites, exprimées en pouces.	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.
Différences des arcs observés.	$\frac{1}{2040}$.	$\frac{1}{1036}$.	$\frac{1}{420}$.	$\frac{1}{159}$.	$\frac{1}{51}$.	$\frac{8}{121}$.	$\frac{6}{35}$.

Toutes ces différences comparées donnent les raisons plus grandes que celle de 1 à 4 ; mais particuliérement les premieres de chaque suite sont de 1 à $1\frac{926}{911}$, & de 1 à $1\frac{1004}{1031}$, qui sont bien proches de celle de 1 à 2, c'est-à-dire, d'être comme les simples vitesses.

Les mêmes choses arrivent dans d'autres expériences faites dans l'eau, desquelles *Newton* fait encore mention ; mais sous quelque forme qu'elles soient faites, les résultats ne permettent pas de conclure que les résistances sont comme les quarrés des vitesses, mais bien plutôt comme les simples vitesses, puisque les petites oscillations les donnent ainsi, & qu'elles doivent nécessairement être fort petites, pour qu'on puisse regarder les oscillations faites dans des arcs circulaires, comme confondues avec celles faites dans des arcs de cycloïde.

Quoi qu'il en soit, *Newton* frappé de ces disparités, & du peu d'accord de ses expériences avec la doctrine établie dans le *Scolie* qui termine la *premiere Section*, sur la mesure des résistances, avoue franchement qu'il n'a pas grande confiance dans ses expériences, & témoigne le desir qu'il auroit qu'on les répétât. Les mêmes raisons, sans doute, l'ont engagé à rechercher la loi de la résistance, non d'après le principe, ou la supposition, qu'elle est proportionnelle au quarré des vitesses, ou à la simple vitesse, mais en la sup-

Digitized by Google

PLANC. III. posant comme une fonction $hu + ku^{\frac{1}{2}} + lu^2$ de la vitesse. Il résout donc ce cas ; mais les résultats que lui donne cette hypothese, ne fournissent pas moins de disparités, lorsqu'on vient à comparer les observations les unes avec les autres ; de sorte qu'on ne peut absolument rien conclure de toutes ces expériences. Enfin, dans la *Section VII*, notre Auteur traite de la résistance qu'éprouvent les corps projettés dans un Fluide ; mais ce qu'il dit, à ce sujet, est fondé sur ce principe, que la résistance, ou, comme nous la nommons ici, la force qu'éprouvent les surfaces, est comme les quarrés des vitesses. C'est donc supposer ce qui étoit en question, & ce qu'il étoit nécessaire d'examiner & de déterminer.

On a encore déduit des résultats moins certains, & des conclusions moins satisfaisantes, des expériences physiques faites avec de petites machines, ou instruments, dont les livres sont remplis. Il suffit d'observer que le frottement seul qui a lieu dans ces petites machines, ou même celui des Fluides contre les parois des orifices par lesquels ils jaillissent, est capable de produire des effets très-considérables, & de laisser beaucoup d'incertitude dans les résultats des expériences de cette nature qu'on pourroit faire, quelque soin qu'on y apportât d'ailleurs.

On verra encore plus évidemment combien on étoit éloigné d'arriver à la vraie connoissance des forces de résistance, par toutes les routes qu'on a suivies jusqu'ici, lorsqu'on verra démontré, par notre théorie, que les résistances ne suivent ni la loi des simples vitesses, ni celle de leurs quarrés ; mais que cette loi varie suivant les circonstances & les dispositions des surfaces choquées dans les Fluides.

CHAPITRE III.

Des Forces avec lesquelles les Fluides agissent contre des Superficies planes, dans le cas du mouvement.

PROPOSITION XVIII.

(594.) *DÉTERMINER la dénivellation qui a lieu dans la surface d'un Fluide, par l'action, ou le mouvement, d'une surface qui se meut dans ce Fluide.*

FIG. 51. Soit *AB* une surface plane, de la forme d'un parallélogramme rectangle, & située de maniere que deux de ses côtés soient horison-

Digitized by Google

PLANC. III.

taux ; ſuppoſons que cette ſurface ſe meuve dans un Fluide en repos, & d'une denſité uniforme ; on aura (571.) la force, ou réſiſtance, qu'éprouvera la différencio-différencielle *KLMN*, en ne ſuppoſant pas toute la ſurface *AB* ſubmergée dans le Fluide, $=$ . . . . . $\frac{m\,db.da.\sin\varpi}{\sin\theta}(\surd a\pm\frac{1}{6}u\sin\theta)^2$, ou en intégrant par rapport à *b*, c'eſt-à-dire, en conſidérant *b* ſeulement comme variable, on aura la force, dont tout le rectangle différenciel *FHIG* éprouvera l'effet, $=\frac{mb.da.\sin\varpi}{\sin\theta}(\surd a\pm\frac{1}{6}u\sin\theta)^2$.

Suppoſons maintenant que *AH* repréſente la même ſurface vue de profil, *CD* étant la ſuperficie du Fluide, il eſt clair que nous aurons pour un point tel que *E*, dans lequel la ſurface s'éloigne du Fluide, ou le fuit, $\surd a-\frac{1}{6}u\sin\theta=0$, même avant que *a* ſoit $=0$; ce qui donne $a=PE=\frac{1}{64}u^2\sin\theta^2$: puiſque, pour ce point *E*, la force différencielle $\frac{mb.da.\sin\varpi}{\sin\theta}(\surd a-\frac{1}{6}u\sin\theta)^2$ doit être $=0$, & par conſéquent le Fluide ne choque, ni ne comprime la ſurface en ce point, non plus qu'en aucun de ceux qui ſont au-deſſus de *E* : il doit donc ſe former, dans l'eſpace *CPE*, un creux, ou cavité *CEP*. Dans la partie *DF*, par laquelle la ſurface choque le Fluide, il ſe forme, au contraire, une élévation *DFP* ; car en faiſant $\surd a+\frac{1}{6}u\sin\theta=0$, il en réſulte $\surd a=-\frac{1}{6}u\sin\theta$, expreſſion dans laquelle le ſigne négatif indique que le point auquel correſpond cette valeur de *a*, eſt au-deſſus de *P*, origine de *a*. En quarrant l'équation $\surd a=-\frac{1}{6}u\sin\theta$, on aura $a=\frac{1}{64}u^2\sin\theta^2$, hauteur de ce point au-deſſus de *P*. C'eſt ainſi que, par le mouvement de la ſurface *AH*, le Fluide altere ſon niveau dans toute la longueur de cette ſurface, & dans tout l'eſpace *CD*.

FIG. 58

COROLLAIRE.

(595.) Pour déterminer les forces dont les différencielles des ſurfaces ſupportent l'effort dans les dénivellations, nous n'aurons qu'à faire $\surd a$ négatif pour la ſurface qui choque le Fluide, & le faire poſitif pour celle qui s'éloigne de lui. On aura donc la force qu'éprouve une différencielle dans la dénivellation, tant pour une ſurface que pour l'autre, $=\frac{mb.da.\sin\varpi}{\sin\theta}(a-\frac{1}{6}u\sin\theta\surd a+\frac{1}{64}u^2\sin\theta^2)$. Lorſque c'eſt le Fluide qui ſe meut, cette force eſt $=$ . . . . . $\frac{mb.da.\sin\varpi}{\sin\theta}(a\sin\omega^2-\frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}u\sin\omega\sin\theta+\frac{1}{64}u^2\sin\theta^2)$.

SCOLIE.

(596.) Ces dénivellations ſont celles qu'on peut remarquer tous

Digitized by Google

les jours, lorsque des corps se meuvent dans des Fluides. Dans la partie où ils sont frappés horisontalement, on voit une intumescence, ou élévation; & dans la partie opposée, on voit, au contraire, un creux, ou cavité. Les hauteurs verticales de ces dénivellations sont telles que nous venons de les déterminer; mais on ne prétend cependant pas que la surface qui, suivant la théorie, devroit correspondre à la cavité, soit entiérement exempte de pression, ni que toute l'intumescence qui lui est égale, demeure complette, ou soit la même dans toute la longueur de la surface; parce que le Fluide s'introduit dans la cavité par les côtés de la surface, & s'écoule de l'intumescence, en allant vers les extrémités de la même surface, & cela dans une direction perpendiculaire au mouvement de celle-ci. Ainsi le Fluide occupe & défoccupe successivement une partie de la cavité & de l'élévation que nous avons déterminée. Ces quantités deviennent sensibles toutes les fois qu'on veut déterminer la valeur précise, ou absolue, de la force qui agit sur les surfaces; parce que l'augmentation, ou la diminution de l'effet produit par la dénivellation, correspond également à tous les points de la surface qui sont submergés dans le Fluide; & quoique ce soit une quantité insensible, prise seulement en partie, elle est considérable dans le tout, ou lorsqu'on en prend la somme totale. En effet, la différence qui correspond seulement à la partie dénivellée, est très-petite quand les corps occupent une grande profondeur dans le Fluide, & que les vitesses avec lesquelles ils se meuvent, ne sont pas fort grandes; car, comme on le verra dans la suite, l'action même de tout le creux, ou de toute l'élévation, devient négligeable dans ces cas, principalement lorsque les angles θ & $\varkappa$ sont fort aigus.

PROPOSITION XIX.

(597.) *La cavité* CEP, *& l'élévation* DFP, *sont égales & semblables; & les courbes* CE, DF, *qui terminent le Fluide, sont, l'une & l'autre, des paraboles du premier genre, dont le parametre est* $= 64 \sin \omega^2$, *& dont les axes sont les verticales* CB, DB, *éloignées du point* P *de la quantité* $CP = PD = u \sin \theta$.

Soit supposé *CB* ou *DB* l'abscisse, & *BI* l'ordonnée; & que la surface *AII* passe, dans un temps déterminé, de *CB* en *AH*, ou de *AH* en *DB*; tous les points, ou toutes les particules du Fluide, comme *I*, prises dans la surface de la courbe, auront parcouru, dans le même temps, leurs ordonnées correspondantes, lesquelles seront, par conséquent (589.), proportionnelles aux vitesses qu'auront

Digitized by Google

les particules, ou seront $= 8 \sin\omega \sqrt{CB}$, ou $= 8\sin\omega\sqrt{DB}$. Faisant donc CB, ou $DB = x$, & $BI = y$, nous aurons $8\sin\omega\sqrt{x} = y$, ou $64\sin\omega^2 x = y^2$; équation de la parabole, dont le parametre $= 64\sin\omega^2$, & dont les axes sont CB, DB, éloignés de P de la quantité $CP = 8\sin\omega\sqrt{PE} = 8\sin\omega\sqrt{\frac{u^2\sin\theta^2}{64\sin\omega^2}} = u\sin\theta$.

Scolie I.

(598.) Pour plus de facilité, & pour plus de clarté dans le discours, nous appellerons désormais *Surface choquante* celle qui choque le Fluide, ou celle qui en est choquée, lorsque c'est le Fluide qui se meut; & nous nommerons *Surface choquée*, celle qui s'éloigne du Fluide, ou qui le suit.

Scolie II.

(599.) Comme l'expression des forces dans une direction quelconque, sçavoir, $\frac{m.db.da.\sin\varpi}{\sin\pi}\left((D+a)^{\frac{1}{2}}\sin\omega \pm \frac{1}{8}u\sin\theta\right)^2$, se réduit à celle des forces horisontales, qui est $= m.dc.du\left((D+a)^{\frac{1}{2}}\sin\omega \pm \frac{1}{8}u\sin\theta\right)^2$, en substituant seulement dc en place de $\frac{db.\sin\varpi}{\sin\pi}$; & que réciproquement celle-ci peut être réduite à la premiere; il suffira, pour plus grande facilité, de trouver, pour le présent, les forces horisontales, qu'on réduira ensuite aux autres, en y substituant $\frac{db.\sin\varpi}{\sin\pi}$ en place de dc, ou $\frac{b\sin\varpi}{\sin\pi}$, en place de c, attendu que la quantité $\frac{\sin\varpi}{\sin\pi}$ est constante, puisqu'il ne s'agit, pour le présent, que des surfaces planes.

Proposition XX

(600.) *Trouver la force horisontale qui agit sur une surface plane, de la forme d'un parallélogramme rectangle, & qui se meut dans un Fluide immobile, avec deux de ses côtés paralleles à l'horison, dans le cas où l'on auroit* $D = 0$, *& que l'extrémité supérieure de la surface sortiroit du Fluide d'une quantité egale, ou plus grande que* $\frac{1}{64}u^2\sin\theta^2$.

La force horisontale qui agit sur la différencio-différencielle $KLMN$ de cette surface, est (577.) $= m.dc.da(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u\sin\theta)^2$, son intégrale à l'égard de c, sçavoir, $mc.da(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u\sin\theta)^2$, est l'expression de la force qui agit sur l'espace différenciel $FHIG$; & enfin l'intégrale de cette quantité par rapport à a, c'est-à-dire, $mc\left(\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}} \pm \frac{1}{6}a^{\frac{1}{2}}u\sin\theta + \frac{1}{64}au^2\sin\theta^2\right)$, est la force horisontale qui agit sur toute la surface, & il ne manque autre chose à cette expression, que la quantité constante qui doit compléter l'intégrale. Appellant donc H cette quantité constante qui

Digitized by Google

complette l'intégrale, on aura la force horisontale qui agit sur toute la surface, $= mc(\frac{1}{3}a^2 \pm \frac{1}{4}a^{\frac{3}{2}}u\sin\theta + \frac{1}{64}au^2\sin\theta^2) + H$.

Pour trouver la valeur de H, il faut considérer que, n'ayant point égard à la dévinellation du Fluide, & faisant $a = 0$, toute l'intégrale doit s'évanouir : donc, dans ce cas, $H = 0$. Cela devroit effectivement arriver pour la surface choquante, s'il n'y avoit pas une partie de cette surface hors du Fluide; mais, comme nous supposons ici qu'elle est en partie hors du Fluide, la dénivellation doit nécessairement produire son effet. Nous devons donc ajouter cette quantité pour la surface choquante, & la retrancher, au contraire, pour la surface choquée. Il est donc question maintenant de trouver cette quantité. Pour cela, nous pouvons nous servir de l'intégrale ci-dessus, en faisant $a^{\frac{3}{2}}$ négatif pour les deux surfaces (595.), ce qui la réduit à $mc(\frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{4}a^{\frac{3}{2}}u\sin\theta + \frac{1}{64}au^2\sin\theta)$; quantité qui est $= H$. Substituant maintenant à la place de a toute la valeur de la dénivellation que nous avons trouvée $= \frac{1}{64}u^2\sin\theta^2$, nous aurons la force qui provient de la dénivellation, ou $H = mc(\frac{u^4\sin\theta^4}{2.64^2} - \frac{u^4\sin\theta^4}{6.8.64} + \frac{u^4\sin\theta^4}{64^2}) = \frac{mc.u^4\sin\theta^4}{6.64^2}$; & par conséquent la force totale dont la surface entiere éprouve l'action, est $= mc(\frac{1}{3}a^2 \pm \frac{1}{4}a^{\frac{3}{2}}u\sin\theta + \frac{1}{64}au^2\sin\theta^2 \pm \frac{u^4\sin\theta^4}{6.64^2})$.

COROLLAIRE.

(601.) Comme la hauteur de la dénivellation est $= \frac{1}{64}u^2\sin\theta^2$, si cette quantité est négligeable à l'égard de a, hauteur totale de la surface submergée dans le Fluide, on pourra, sans crainte d'erreur, négliger la dénivellation dans l'expression de la force, ou négliger tous les termes de la force, comme $\frac{u^4\sin\theta^4}{6.64^2}$, dans lesquels a ne se trouve pas.

PROPOSITION XXI.

(602.) *Trouver la même force qui agit sur la surface choquante, lorsque cette surface aura une moindre hauteur hors du Fluide, que celle qu'acquiert la dénivellation.*

Si le point A, extrémité de la surface, tombe entre P & F, le Fluide passera par-dessus la surface, & n'agira sur elle que dans la partie effective de la même surface qui est hors du Fluide, & dont, par supposition, la hauteur est moindre que $\frac{1}{64}u^2\sin\theta^2$, hauteur totale de la dénivellation. Soit n la hauteur effective de la partie de la surface qui est hors du Fluide. En substituant cette valeur en place de a, dans l'expression de la force qui provient de la dénivellation, c'est-à-dire,

Digitized by Google

c'eſt-à-dire, dans $mc\left(\frac{1}{3}a^2-\frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\sin\theta+\frac{1}{64}au^2\sin\theta^2\right)$, il en réſultera $mc\left(\frac{1}{3}n^2-\frac{1}{6}n^{\frac{3}{2}}u\sin\theta+\frac{1}{64}nu^2\sin\theta^2\right)$, pour l'expreſſion de la même force dans le cas préſent; par conſéquent la force totale dont la ſurface entiere éprouve l'action, ſera = ...

$mc\left(\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\sin\theta+\frac{1}{64}au^2\sin\theta^2\right)+mc\left(\frac{1}{3}n^2-\frac{1}{6}n^{\frac{3}{2}}u\sin\theta+\frac{1}{64}nu^2\sin\theta^2\right)$.

PROPOSITION XXII.

(603.) *Trouver, dans le même cas que ci-deſſus, la force qui agit ſur la ſurface, lorſque c'eſt le Fluide qui ſe meut.*

Il faut obſerver que, dans ce cas, nous ne pouvons pas exclure de la formule la valeur de ω. L'expreſſion de la force dont la différencio-différencielle éprouve l'action, eſt $= m.dc.da(a^{\frac{1}{2}}\sin\omega\pm\frac{1}{8}u\sin\theta)^2$, & ſon intégrale $mc(\frac{1}{3}a^2\sin\omega^3\pm\frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\sin\omega.\sin\theta+\frac{1}{64}au^2\sin\theta^2)$ exprime celle dont toute la ſurface éprouve l'action, ſans y comprendre la force qui réſulte de toute la dénivellation. Pour cette derniere force, l'intégrale eſt $mc\left(\frac{1}{3}a^2\sin\omega^3-\frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\sin\omega.\sin\theta+\frac{1}{64}au^2\sin\theta^2\right)$, en ſubſtituant n en place de a, pour la ſurface choquante, on aura la force qui provient de la dénivellation $= mc\left(\frac{1}{3}n^2\sin\omega^3-\frac{1}{6}n^{\frac{3}{2}}u\sin\omega.\sin\theta+\frac{1}{64}nu^2\sin\theta^2\right)$, & celle dont toute la ſurface choquante éprouve l'action, ſera en tout

$= mc(\frac{1}{3}a^2\sin\omega^3+\frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\sin\omega.\sin\theta+\frac{1}{64}au^2\sin\theta^2)+$ . . . . . .

$mc\left(\frac{1}{3}n^2\sin\omega^3-\frac{1}{6}n^{\frac{3}{2}}u\sin\omega.\sin\theta+\frac{1}{64}nu^2\sin\theta^2\right)$. A l'égard de la ſurface choquée, on ſubſtituera dans l'intégrale, $\frac{1}{64}u^2\sin\theta^2$, en place de $a\sin\omega^2$ *, & la force totale pour cette ſurface, ſera = ...

$mc\left(\frac{1}{3}a\sin\omega^2+\frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\sin\theta+\frac{1}{64}au^2\sin\theta^2-\frac{u^4\sin\theta^4}{6.64^2}\right)$.

COROLLAIRE I.

(604.) Si l'extrémité ſupérieure de la ſurface coïncide avec la ſuperficie du Fluide; c'eſt à-dire, ſi le point A tombe ſur P, alors on aura $n=0$, & la force totale qui agit contre la ſurface choquante, ſe réduira à $mc\left(\frac{1}{3}a^2\sin\omega^3+\frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\sin\omega.\sin\theta+\frac{1}{64}au^2\sin\theta^2\right)$.

COROLLAIRE II.

(605.) Au contraire, ſi l'extrémité A de la ſurface eſt élevée au-deſſus du Fluide d'une quantité égale, ou plus grande que $\frac{u^2\sin\theta^2}{64\sin\omega^2}$,

* On trouve cette valeur, en faiſant la quantité $a^{\frac{1}{2}}\sin\omega\pm\frac{1}{8}u\sin\theta$ égale à zéro, comme on a fait celle qui lui correſpond dans *l'Art.* 594. Si l'on procéde comme dans *l'Art.* 600, on trouve l'expreſſion même de l'Auteur pour la force qui agit ſur la ſurface choquée.

Digitized by Google

on aura $n = \frac{u^2 \sin \theta^2}{64 \sin \omega^2}$ *; & la force totale qui agit contre la surface choquante se réduira à $mc\left(\frac{1}{8}a^2 \sin \omega^2 + \frac{1}{6^4}a^{\frac{1}{2}} u \sin \omega . \sin \theta + \frac{1}{6^4} au^2 \sin \theta^2 + \frac{u^4 \sin \theta^4}{6\ 64^2 \sin \omega^2}\right)$.

SCOLIE.

(606.) L'intégrale $mc(\frac{1}{8}a^2 \sin \omega^2 + \frac{1}{6}a^{\frac{1}{2}} u \sin \omega . \sin \theta + \frac{1}{64} u^2 \sin \theta^2) + mc(\frac{1}{8}z^2 \sin \omega^2 - \frac{1}{6}z^{\frac{1}{2}} u \sin \omega . \sin \theta + \frac{1}{64} nu^2 \sin \theta^2)$, offre un cas assez remarquable, celui dans lequel le point H tombe en P, ou lorsque $a = 0$: auquel cas la surface n'est, comme on voit, aucunement submergée dans le Fluide. Car l'intégrale se réduit alors à .... $mc(\frac{1}{8}z^2 \sin \omega^2 - \frac{1}{6}z^{\frac{1}{2}} u \sin \omega . \sin \theta + \frac{1}{64} nu^2 \sin \theta^2)$, qui est la valeur de la force qui agit sur la partie élevée Pt ; mais, comme le Fluide n'a aucune prise sur la surface, il n'agit nullement sur elle, & par conséquent elle ne peut l'élever : donc, en ce cas, la quantité restante doit aussi s'évanouir, quoique la formule ne l'indique pas **.

PROPOSITION XXIII.

(607.) *Trouver la force horisontale qui agit sur la surface choquée, ou sur la surface qui suit le Fluide, dans le cas ou son extrémité supérieure* A *tombe entre* P *&* E, *ou que* D *a quelque valeur moindre que* PE $= \frac{u^2 \sin \theta^2}{64 \sin \omega^2}$.

Comme le Fluide ne parvient que jusqu'à E, en faisant $PE = D + a$, & substituant dans l'intégrale $\frac{u^2 \sin \theta^2}{64 \sin \omega^2}$ en place de $D + a$, elle doit se réduire à zéro. L'intégrale de la différencielle de *l'Art.* 589 est $mc\left(Da \sin \omega^2 + \frac{1}{2}a^2 \sin \omega^2 - \frac{1}{6}u(D+a)^{\frac{1}{2}} \sin \omega . \sin \theta + \frac{1}{64} au^2 \sin \theta^2\right) + H$. Substituant donc, dans cette formule, $\frac{u^2 \sin \theta^2}{64 \sin \omega^2}$ à la place de $D + a$, ou $\frac{u^2 \sin \theta^2}{64 \sin \omega^2} - D$, à la place de a, elle se réduit à .....

$mc\left(-\frac{1}{2}D^2 \sin \omega^2 - \frac{1}{64} Du^2 \sin \theta^2 + \frac{u^4 \sin \theta^4}{6.64^2 \sin \omega^2}\right) + H = 0$, d'où l'on tire $H = mc\left(\frac{1}{6}D^{\frac{1}{2}} \sin \omega^2 + \frac{1}{64} Du^2 \sin \theta^2 - \frac{u^4 \sin \theta^4}{6.64^2 \sin \omega^2}\right)$, & l'intégrale complette

* Cette valeur de n est celle de a qu'on tire de l'équation $a^{\frac{1}{2}} \sin \omega \pm \frac{1}{6} u \sin \theta = 0$.

** Cette singularité ne doit nullement faire soupçonner l'exactitude de la formule ; elle vient de la maniere dont l'Auteur procéde pour calculer la force dont il est question. En effet, il calcule d'abord la force, sans avoir égard à la dénivellation ; & ensuite il y ajoute l'effet de cette derniere. Or il n'y a, de cette sorte, que la premiere partie de l'expression dont les termes soient des fonctions de a, & par conséquent il n'y a qu'elle qui doive éprouver quelque variation suivant les différentes valeurs qu'on suppose à a. Les termes de la seconde partie sont des fonctions de n ; il est évident que s'ils étoient aussi des fonctions de a, ou si l'on avoit pu comprendre l'effet de la dénivellation dans le calcul primitif, la disparité que l'Auteur fait remarquer n'auroit pas lieu. Au reste, on peut appliquer à ce cas une partie de ce qui est exposé, *Art.* 610.

Digitized by Google

sera $= mc\left(\frac{1}{2}(D+a)^2 \sin\omega^2 - \frac{1}{6}u(D+a)^{\frac{3}{2}}\sin\omega.\sin\theta + \frac{1}{64}u^2(D+a)\sin\theta^2 - \frac{u^4\sin\theta^4}{6.64^2\sin\omega^2}\right)$.

COROLLAIRE I.

(608.) Si l'on avoit $D=0$, ou si l'extrémité supérieure A de la surface tomboit en P, ou plus haut que P, la force, ou l'intégrale complette se réduiroit à $mc\left(\frac{1}{2}a^2\sin\omega^2 - \frac{1}{6}u^{\frac{3}{2}}a\sin\omega.\sin\theta + \frac{1}{64}au^2\sin\theta^2 - \frac{u^4\sin\theta^4}{6.64^2\sin\omega^2}\right)$.

COROLLAIRE II.

(609.) Si, au contraire, l'extrémité supérieure A de la surface tomboit en E, on auroit $D=\frac{u^2\sin\theta^2}{64\sin\omega^2}$ ce qui donne $a=0$ pour compléter l'intégrale, & l'intégrale complette devient $=$ . . . . . .

$mc\left(Da\sin\omega^2 + \frac{1}{2}a^2\sin\omega^2 - \frac{1}{6}u\left((D+a)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right)\sin\omega.\sin\theta + \frac{1}{64}au^2\sin\theta^2\right)$.

SCOLIE.

(610.) Si le point H, ou l'extrémité inférieure de la surface, tombe en E, l'intégrale, ou la force qui agit contre la surface choquée, doit s'évanouir, & en effet elle s'évanouit *. Mais ce n'est pas la même chose, si le point H tombe entre E & P, ou en P; dans ce cas, $D=0$, $a=0$, & la force, ou l'intégrale complette, se réduit à $-\frac{mcu^4\sin\theta^4}{6.64^2\sin\omega^2}$, tandis qu'elle devroit également s'évanouir, puisque le Fluide n'atteint pas la surface pour la choquer, lorsque sa partie submergée est moindre que la quantité PE. Ce résultat vient de ce qu'après avoir assigné la force qui agit sur toute la surface, en négligeant la dénivellation, on en a soustrait la force avec laquelle le Fluide cesse d'agir dans la cavité CEP. En effet, on voit que cela doit être ainsi, quand le point H tombe plus bas que le point E, ou quand il tombe sur le point E même; mais lorsqu'il tombe plus haut, ce n'est plus la même chose, attendu que la quantité qu'on soustrait est alors plus grande que celle qui exprime la force, sans avoir égard à la dénivellation. Au reste, comme la force qui agit contre la surface choquée, doit être égale à zéro, toutes les fois que le point H tombe en E, ou qu'il tombe plus haut: l'expression qu'on a donnée dans la Proposition, sert seulement pour le cas où ce point tombe en E, ou au-dessous, c'est-à-dire, lorsqu'on a $(D+a)^{\frac{1}{2}} = $ ou $> \frac{u\sin\theta}{8\sin\omega}$.

PROPOSITION XXIV.

(611.) *Trouver la force horisontale qui agit sur les mêmes surfaces, lorsque* D *a quelque valeur, ou que l'extrémité supérieure* A *est submergée dans le Fluide.*

* On peut aisément s'en assurer, en faisant $D=0$, & $a=\frac{u^2\sin\theta^2}{64\sin\omega^2}$, dans l'intégrale complette., *Art.* 607.

Dans cette supposition, l'intégrale doit se réduire à zéro, lorsque $a=0$, puisque le Fluide ne peut agir que jusqu'à l'extrémité supérieure de la surface à laquelle $a=0$. Or, la force dont la différencio-différencielle éprouve l'action, est (589.)= . . . . . $m\,dc.da\big((D+a)^{\frac{1}{2}}\sin\omega\pm\frac{1}{6}u\sin\theta\big)^2$, & son intégrale . . . . . $mc\left(Da\sin\omega^2+\frac{1}{6}a^2\sin\omega^2\pm\frac{1}{6}u\big((D+a)^{\frac{3}{2}}\sin\omega.\sin\theta+\frac{1}{64}au^2\sin\theta^2\big)+H\right.$, exprime celle qui agit sur toute la surface, H marquant la quantité constante qui doit compléter l'intégrale. Faisant maintenant $a=0$, elle deviendra $=\pm\frac{1}{6}uD^{\frac{3}{2}}\sin\omega.\sin\theta+H=0$; ce qui donne . . . . $H=\mp\frac{1}{6}uD^{\frac{3}{2}}\sin\omega.\sin\theta$; & par conséquent l'expression complette de la force qui agit sur toute la surface, $=$ . . . . . $mc\big(Da\sin\omega^2+\frac{1}{6}a^2\sin\omega^2\pm\frac{1}{6}u\big((D+a)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\big)\sin\omega.\sin\theta+\frac{1}{64}au^2\sin\theta^2\big)$.

COROLLAIRE.

(612.) Si $D=0$, c'est-à-dire, si l'extrémité supérieure de la surface tombe en P, la force dont la surface choquante éprouvera l'action, deviendra $=mc\big(\frac{1}{2}a^2\sin\omega^2+\frac{1}{6}ua^{\frac{3}{2}}\sin\omega.\sin\theta+\frac{1}{64}au^2\sin\theta^2\big)$ comme on l'a déjà trouvée, *Art.* 604.

PROPOSITION XXV.

(613.) *Réduire les expressions des forces horisontales trouvées ci-dessus, à exprimer celles qui agissent sur une surface plane, suivant une direction quelconque.*

On a déjà dit (599.) qu'il ne falloit, pour cela, que substituer $\frac{b\sin\varpi}{\sin\pi}$. à la place de c; cette substitution faite, on aura les expressions suivantes. La force qui agit sur les surfaces choquante, ou choquée, dans le cas où elles sont entiérement submergées dans le Fluide, sera (611.)= $\frac{mb\sin\varpi}{\sin\pi}\big(Da\sin\omega^2+\frac{1}{2}a^2\sin\omega^2\pm\frac{1}{6}u\big((D+a)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\big)\sin\omega.\sin\theta+\frac{1}{64}au^2\sin\theta^2\big)$.

La force qui agit sur la surface choquante, lorsque son extrémité supérieure est élevée au-dessus de la superficie du Fluide, d'une quantité $\frac{n^2}{\sin\omega^2}$ moindre que $\frac{1}{64}u^2\sin\theta^2$, sera (603.)= . . . . . $\frac{mb\sin\varpi}{\sin\pi}\big(\frac{1}{2}a^2\sin\omega^2+\frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\sin\omega.\sin\theta+\frac{1}{64}au^2\sin\theta^2\big)+$ . . . . . $\frac{mbn\sin\varpi}{\sin\pi}\big(\frac{1}{2}n\sin\omega^2-\frac{1}{6}n^{\frac{1}{2}}u\sin\omega.\sin\theta+\frac{1}{64}u^2\sin\theta^2\big)$; ou si n est égal, ou plus grand que $\frac{1}{64}u^2\sin\theta^2$, la force deviendra (600 & 603.)= $\frac{mb\sin\varpi}{\sin\pi}\big(\frac{1}{2}a^2\sin\omega^2+\frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\sin\omega.\sin\theta+\frac{1}{64}au^2\sin\theta^2+\frac{u^4\sin\theta^4}{6.64^2\sin\omega^2}\big)$.

Digitized by Google

La force qui agit contre la surface choquée, lorsque son extrémité supérieure est au-dessous de la superficie du Fluide, D étant en même temps plus petit que $\frac{u^2 \sin \theta^2}{64 \sin \omega^2}$, sera (607.) = ...

$\frac{mb \sin x}{\sin n}\left(\frac{1}{3}(D+a)^3 \sin \omega^2 \pm \frac{1}{6} u (D+a)^{\frac{3}{2}} \sin \omega . \sin \theta + \frac{1}{64} u^2 (D+a) \sin \theta^2 - \frac{u^4 \sin \theta^4}{6.64^2 \sin \omega^2}\right)$.

Enfin la force qui agit sur l'une ou l'autre des deux surfaces choquante ou choquée, ayant $D=0$, & négligeant la dénivellation, sera (604 & 608.) $= \frac{mb \sin x}{\sin n}\left(\frac{1}{3} a^2 \sin \omega^2 \pm \frac{1}{6} a^{\frac{3}{2}} u \sin \omega . \sin \theta + \frac{1}{64} a u^2 \sin \theta^2\right)$.

PROPOSITION XXVI.

(614.) *Réduire les expressions précédentes à des fonctions de* e & *de* de

Ayant, par la construction & par la supposition, $\cos n : \sin n :: de : da$ (581.), on aura $da = \frac{\sin n \, de}{\cos n}$, & $a = \frac{e \sin n}{\cos n}$, parce que, dans ce cas, $\frac{\sin n}{\cos n}$ est une quantité constante. Substituant cette valeur de a dans les équations précédentes, on aura . . . . . .

$\frac{mb \sin x}{\cos n}\left(De \sin \omega^2 + \frac{e^2 \sin n . \sin \omega^2}{2 \cos n} \pm \frac{u \sin \omega . \sin \theta . \cos n}{6 \sin n}\left(\left(D + \frac{e \sin n}{\cos n}\right)^{\frac{3}{2}} - L^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{eu^2 \sin \theta^2}{64}\right)$.

pour la force qui agit sur les surfaces choquante ou choquée, lorsqu'elles sont entiérement submergées, dans le Fluide, & à une profondeur plus grande que $\frac{u^2 \sin \theta^2}{64 \sin \omega^2}$.

La formule $\frac{mb \sin x}{\cos n}\left(\frac{e^2 \sin \omega^2 . \sin n}{2 \cos n} + \frac{u \sin \omega . \sin \theta . \cos n}{6 \sin n}\left(\frac{e \sin n}{\cos n}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{64} eu^2 \sin \theta^2\right) + \frac{mb \sin x}{\sin n}\left(\frac{1}{3} n^2 \sin \omega^2 - \frac{1}{6} n^{\frac{3}{2}} u \sin \omega . \sin \theta + \frac{1}{64} nu^2 \sin \theta^2\right)$, exprimera la force qui agit sur la surface choquante, lorsque son extrémité supérieure est élevée au-dessus de la superficie du Fluide de la quantité $\frac{n^2}{\sin \omega^2}$.

La formule $\frac{mb \sin x}{\cos n}\left(De \sin \omega^2 + \frac{e^2 \sin \omega^2 . \sin n}{2 \cos n} - \frac{u \sin \omega . \sin \theta . \cos n}{6 \sin n}\left(D + \frac{e \sin n}{\cos n}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{64} eu^2 \sin \theta^2\right) + \frac{mb \sin x}{\sin n}\left(\frac{1}{3} D^3 \sin \omega^2 + \frac{1}{64} Du^2 \sin \theta^2 - \frac{u^4 \sin \theta^4}{6.64^2 \sin \omega^2}\right)$ exprimera la force qui agit sur la surface choquée, lorsqu'on a $D < \frac{u^2 \sin \theta^2}{64 \sin \omega^2}$.

Enfin la formule $\frac{mb \sin x}{\cos n}\left(\frac{e^2 \sin \omega^2 . \sin n}{2 \cos n} \pm \frac{u \sin \omega . \sin \theta . \cos n}{6 \sin n}\left(\frac{e \sin n}{\cos n}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{64} eu^2 \sin \theta^2\right)$ exprimera la force qui agit sur l'une ou l'autre des deux surfaces, ayant $D=0$, & négligeant la dénivellation.

PROPOSITION XXVII.

(615.) *Réduire les expressions précédentes au cas où la surface plane est horisontale.*

Digitized by Google

Dans ce cas, $\sin \varkappa = 0$, & $\cos \varkappa = 1$; mais avant de substituer ces valeurs dans les formules, il est nécessaire de développer la quantité $\left(D+\frac{e \sin \varkappa}{\cos \varkappa}\right)^{\frac{1}{2}}$, en la réduisant à la série $D^{\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{2}De \sin \varkappa}{\cos \varkappa}+\frac{\frac{1}{8}e^2 \sin \varkappa^2}{D^{\frac{1}{2}} \cos \varkappa^2}$ &c. & de substituer aussi cette valeur.

Par ces substitutions, la premiere formule se réduit à ..... $mbe.\sin \varkappa \left(D \sin \omega^2 \pm \frac{1}{4} D^{\frac{1}{2}} u \sin \omega . \sin \theta + \frac{1}{64} u^2 \sin \theta^2\right) =$ . . . . . $mbe.\sin \varkappa \left(D^{\frac{1}{2}} \sin \omega \pm \frac{1}{8} u \sin \theta\right)^2$. La seconde formule n'a pas lieu, parce que, dans ce cas, il ne peut y avoir une partie de la surface hors du Fluide; elle doit être toute entiere au dedans du Fluide, ou toute entiere au dehors. La même chose arrive à la troisieme, & par la même raison. La quatrieme se réduit à la premiere, qui, par conséquent, est l'unique.

PROPOSITION XXVIII.

(616.) *Trouver la force verticale qui agit sur la même surface plane, d'après les conditions supposées ci-dessus.*

Ce problême se résout par le problême général donné, *Art* 613, en substituant seulement $\cos \varkappa$ à la place de $\sin \varkappa$, parce que, dans ce cas, $\sin \varkappa = \cos \varkappa$ (573 & 580.); on aura donc . . . . . $\frac{mb \cos \varkappa}{\sin \varkappa}\left(Da \sin \omega^2+\frac{1}{2}a^2 \sin \omega^2 \pm \frac{1}{6} u \sin \omega . \sin \theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)+\frac{1}{64} au^2 \sin \theta^2\right)$, pour l'expression de la force qui agit sur les surfaces choquante ou choquée, lorsqu'elles sont entiérement submergées dans le Fluide.

La formule $\frac{mb \cos \varkappa}{\sin \varkappa}\left(Da \sin \omega^2+\frac{1}{2}a^2 \sin \omega + \frac{1}{6} u \sin \omega . \sin \theta (D+a)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{64} au^2 \sin \theta\right) + \frac{mb \cos \varkappa}{\sin \varkappa}\left(\frac{1}{2}n^2 \sin \omega^2 - \frac{1}{6} un^2 \sin \omega . \sin \theta + \frac{1}{64} nu^2 \sin \theta^2\right)$, exprimera la force qui agit sur la surface choquante, lorsque son extrémité supérieure est est élevée au-dessus de la superficie du Fluide, d'une quantité $\frac{n^2}{\sin \omega^2}$.

La formule $\frac{mb \cos \varkappa}{\sin \varkappa}\left(Da \sin \omega^2+a^2 \sin \omega^2 - \frac{1}{6} u \sin \omega . \sin \theta (D+a)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{64} au^2 \sin \theta^2\right) + \frac{mb \cos \varkappa}{\sin \varkappa}\left(\frac{1}{2} D^2 \sin \omega^2 + \frac{1}{64} Du^2 \sin \theta^2 - \frac{u^4 \sin \theta^4}{6.64^2 \sin \omega^2}\right)$, exprimera la force qui agit sur la surface choquée, lorsque $D < \frac{u^2 \sin \theta^2}{64 \sin \omega^2}$.

Enfin $\frac{mb \cos \varkappa}{\sin \varkappa}\left(\frac{1}{2}a^2 \sin \omega^2 \pm \frac{1}{6} a^{\frac{3}{2}} u \sin \omega . \sin \theta + \frac{1}{64} au^2 \sin \theta^2\right)$ est la formule qui exprime la force qui agit sur l'une quelconque des deux surfaces, ayant $D = 0$, & négligeant la dénivellation.

PROPOSITION XXIX.

(617.) *Trouver les mêmes expressions en fonctions de* e.

Digitized by Google

Qu'on substitue (614.) la valeur de $a = \frac{e \sin n}{\cos n}$, & l'on aura ..... $mb\left(De \sin \omega^2 + \frac{e^2 \sin \omega^2 . \sin n}{2 \cos n} \pm \frac{u \sin \omega . \sin \theta . \cos n}{6 \sin n}\left(\left(D + \frac{e \sin n}{\cos n}\right)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64} eu^2 \sin \theta^2\right)$, pour l'expression de la force qui agit sur les surfaces choquante ou choquée, lorsqu'elles sont entiérement submergées dans le Fluide, & à une profondeur plus grande que $\frac{u^2 \sin \theta^2}{64 \sin \omega^2}$.

La formule $mb\left(\frac{e^2 \sin \omega^2 . \sin n}{2 \cos n} + \frac{u \sin \omega \sin \theta . \cos n}{6 \sin n}\left(\frac{e \sin n}{\cos n}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{64} eu^2 \sin \theta^2\right) + \frac{mb \cos n}{\sin n}\left(\frac{1}{2} n^2 \sin \omega^2 - \frac{1}{6} n^{\frac{3}{2}} u \sin \omega . \sin \theta + \frac{1}{64} nu^2 \sin \theta^2\right)$ sera l'expression de la force qui agit sur la surface choquante, lorsque son extrémité supérieure est plus haute que la superficie du Fluide, de la quantité $\frac{u^2 \sin \theta^2}{64 n^2 \sin \omega^2}$.

La formule $mb\left(De \sin \omega^2 + \frac{e^2 \sin \omega^2 . \sin n}{2 \cos n} - \frac{u \sin \omega . \sin \theta . \cos n}{6 \cos n}\left(D + \frac{e \sin n}{\cos n}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{64} eu^2 \sin \theta^2\right) + \frac{mb \cos n}{\sin n}\left(\frac{1}{2} D \sin \omega^2 + \frac{1}{64} Du^2 \sin \theta - \frac{u^4 \sin \theta^4}{6.64^2 \sin \omega^2}\right)$ exprimera la force qui agit sur la surface choquée, lorsqu'on a $D < \frac{u^2 \sin \theta^2}{64 \sin \omega^2}$.

Enfin la formule $mb\left(\frac{e^2 \sin \omega^2 . \sin n}{2 \cos n} \pm \frac{u \sin \omega . \sin \theta . \cos n}{6 \sin n}\left(\frac{e \sin n}{\cos n}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{64} eu^2 \sin \theta^2\right)$ exprimera la force qui agit sur l'une quelconque des deux surfaces, ayant $D = 0$, & négligeant la dénivellation.

COROLLAIRE I.

(618.) Si la surface étoit horisontale, l'expression de la force verticale dont elle éprouveroit l'action, seroit (615.) = ... $mbe . \cos n\left(D^{\frac{1}{2}} \sin \omega \pm \frac{1}{8} u \sin \theta\right)^2$; mais, dans ce cas, $\cos n = 1$, la force verticale sera donc $= mbe\left(D^{\frac{1}{2}} \sin \omega \pm \frac{1}{8} u \sin \theta\right)^2$

COROLLAIRE II.

(619.) Si, outre ces conditions, c'est la surface, & non le Fluide, qui se meut verticalement, on aura $\sin \omega = 1$, & $\sin \theta = 1$, & la force verticale qu'elle éprouvera, se réduira alors à $mbe\left(\sqrt{D} \pm \frac{1}{8} u\right)^2$. De plus, si la vitesse u est égale à celle qu'acquerroit le Fluide en tombant de la hauteur D, on auroit (52 & 564.) $u = 8\sqrt{D}$, ou $\frac{1}{8} u = \sqrt{D}$, ce qui réduit la force qui agit sur la surface, à $mbe\left(\sqrt{D} \pm \sqrt{D}\right)^2$; c'est-à-dire que la force qui agira sur la surface choquante, sera, en ce cas, $= 4\, mbeD$, ou égale au poids de quatre colonnes de Fluide, dont la base $= be$, & dont la hauteur $= D$, qui est celle du Fluide au-dessus de la surface cho-

Digitized by Google

quante. La force qui agiroit sur la surface choquée, seroit, dans le même cas $=0$; ce qui paroîtra sensible, en considérant que le Fluide ne peut choquer la surface, sa viteſſe étant, dans ce cas, égale à la ſienne.

COROLLAIRE III.

(620.) Si c'étoit le Fluide qui ſe mût verticalement, la ſurface demeurant en repos, & ayant, comme auparavant, $\sin\nu=0$; on auroit $\sin\theta=1$, & $\sin\omega=0$: par conſéquent la force verticale qui agira ſur la ſurface, ſe réduira à $\frac{4}{4^4}mbeu^2$. Si, de plus, la viteſſe u étoit celle qu'acquerroit le Fluide, en tombant de la hauteur D, on auroit, comme ci-deſſus, $\frac{1}{8}u=\sqrt{D}$, ou $\frac{1}{64}u^2=D$, ce qui réduit la force à $mbeD$; c'eſt-à-dire qu'elle eſt égale au poids d'une ſimple colonne de Fluide, dont la baſe eſt$=be$, & dont la hauteur$=D$. On voit donc que, ſi le Fluide tomboit verticalement, par l'action de ſa propre gravité, d'une hauteur quelconque D, & choquoit une ſurface horiſontale be, la force dont cette ſurface éprouveroit l'action, ſeroit égale au poids de la colonne de Fluide qui ſeroit au-deſſus de la ſurface; c'eſt-à-dire, au poids d'une colonne du même Fluide dont la baſe ſeroit la ſurface choquée, & la hauteur celle de la chûte du Fluide.

COROLLAIRE IV.

(621.) L'expreſſion de la force différencio-différencielle ..... $m.db.dc\left((D+a)^{\frac{1}{2}}\sin\omega\pm\frac{1}{8}u\sin\theta\right)^2$, nous fait connoître que, ſi la quantité $D+a$ étoit conſtante; c'eſt-à-dire, ſi la ſurface plane étoit toujours horiſontale, ſa force verticale totale, ou intégrale, ſeroit $=mbc\left((D+a)^{\frac{1}{2}}\sin\omega+\frac{1}{8}u\sin\theta\right)^2$.

SCOLIE I.

(622.) On voit clairement ici combien il eſt différent que ce ſoit la ſurface qui ſe meuve, ou que ce ſoit le Fluide: dans le premier cas, la force qui agit ſur la ſurface, eſt $4mbeD$, & dans le ſecond, elle eſt ſeulement $mbeD$; c'eſt-à-dire que la premiere eſt quatre fois plus grande que la ſeconde. Cependant je ne connois aucun Auteur qui n'ait ſuppoſé ces deux cas comme étant abſolument les mêmes; ou qui n'ait ſuppoſé que, dans l'un & l'autre cas, la force qui agit ſur la ſurface, eſt toujours la même.

SCOLIE II.

(623.) *Newton*, dans les *Corollaires* 7, 8, 9 & 10 de la *Propoſition XXXVI*

Digitized by Google

PLANC. III. FIG. 60.

XXXVI, *Section VII* du *Livre II* de ſa *Philoſophie naturelle*, dit qu'une petite ſurface horiſontale, comme celle que nous ſuppoſons, *dbde*, ou *be*, expoſée à l'action d'un Fluide qui tombe librement par l'action de ſa gravité, ne ſupporte ſeulement que le poids de la moitié de la colonne de Fluide, dont la baſe eſt *be*; & la hauteur *D*; ce qui n'eſt que la moitié de ce que nous avons trouvé. Il ſuppoſe, pour cela, que ſi *ACDEA* eſt un vaſe conſtamment plein d'un Fluide, & qui ait l'ouverture *EF* à ſon fond, le Fluide n'aura de mouvement que dans l'eſpace *AMEFNB*, qu'il appelle *Cataracte*, terminé par les deux ſurfaces courbes *AME*, *BNF*, le Fluide demeurant ſans mouvement, ou comme un corps dur, dans les eſpaces *CAE* & *DBF*. Il ſuppoſe enſuite qu'on mette au milieu de l'ouverture *EF* la ſurface *PQ*, & il dit que le Fluide qui eſt au-deſſus d'elle, & eſt contenu dans l'eſpace *PHQ*, reſtera pareillement ſans mouvement, à cauſe qu'il ſe forme deux autres ſurfaces convexes *HQ*, *HP*, & que le Fluide ſe diviſe comme en deux cataractes. Il dit, de plus, que le poids que ſoutiendra la ſurface *PQ*, ſera ſeulement celui du Fluide contenu dans l'eſpace *PHQ*, parce qu'il ſuppoſe que tout le Fluide contenu dans les eſpaces *AMEPH* & *HQFNB* ſe meut avec toute liberté, & ſans agir ſur les ſurfaces *HP*, *HQ*. Nous laiſſons au Lecteur à conſidérer s'il eſt poſſible que le Fluide tombe avec une viteſſe connue ſur la ſurface *HP*, ſans agir ſur elle, & ſans lui faire ſupporter d'effort. Ceci ſeroit contre tous les principes reçus, & même contre ceux établis par ce ſçavant Auteur. Selon notre théorie, la force verticale qui agit ſur une différencio-différencielle de la ſurface même *HP*, eſt = ... $m.db.de((D+a)^{\frac{1}{2}}\sin\omega+\frac{1}{3}u\sin\theta)^2$, ou à cauſe que $\sin\omega = 0$, & que $\frac{1}{9}u = a^2$, elle eſt $= m.db.de.a\sin\theta^2$. D'où l'on voit que, dans le cas où l'on admettroit tout ce que ſuppoſe notre Auteur, non-ſeulement la ſurface *PQ* ſoutient le poids du Fluide *PHQ*, mais encore la la force $m.\delta db.de.a\sin\theta^2$, dans laquelle expreſſion θ déſigne l'angle que forme la verticale avec la courbe *HP*, & *a* la hauteur du Fluide au-deſſus de l'orifice : de ſorte qu'en ſuppoſant θ conſtant, ce poids eſt celui d'une colonne de Fluide, dont la baſe eſt *PQ*, & la hauteur celle du Fluide, multipliée par $\sin\theta^2$.

Digitized by Google

CHAPITRE IV.

De la force avec laquelle les Fluides agiſſent contre des ſurfaces quelconques, dans le cas du mouvement.

PROPOSITION XXX.

(624.) *TROUVER la force horiſontale qui agit ſur une ſurface quelconque qui ſe meut dans un Fluide.*

Ayant diviſé la ſurface, par des plans horiſontaux & verticaux, en petites ſurfaces quadrilateres ſenſiblement planes : ſi l'on cherche la force poſitive, ou négative, qui agit ſur chacune de ces petites ſurfaces, en en prenant la ſomme, on aura la force totale. Cela poſé, ſoit D la hauteur verticale compriſe depuis la ſuperficie du Fluide juſqu'à l'extrémité ſupérieure d'un des petits quadrilateres dont a exprime la hauteur ; d'après cela, on aura (600.) . . . . . $mc.da\left(\left(D+a\right)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8}u\,\sin\theta^{2}\right)^{2}$ pour l'expreſſion de la force horiſontale qui agit ſur une différencielle de ce même petit quadrilatere ; & l'intégrale $mc\left(Da+\frac{1}{2}a^{2} \pm \frac{1}{12}u\left(\left(D+a\right)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)\sin\theta+\frac{1}{64}au^{2}\sin\theta^{2}\right)$, ſera la force dont le quadrilatere entier éprouvera l'action, a marquant toute ſa hauteur verticale. Subſtituant maintenant $D-\frac{1}{2}a$ pour D, afin que D marque la hauteur verticale de la ſuperficie du Fluide au-deſſus du centre du petit quadrilatere, l'expreſſion de toute la force horiſontale qui agit ſur cette petite ſurface ſera = ... $mc\left(Da \pm \frac{1}{8}u\left(\left(D+\frac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}}-\left(D-\frac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}}\right)\sin\theta+\frac{1}{64}au^{2}\sin\theta^{2}\right)$: & celle qui agit ſur la ſurface entiere, qui eſt la ſomme de toutes ces petites ſurfaces, ſera exprimée par . . . . . $mſc\left(Da \pm \frac{1}{8}u\left(\left(D+\frac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}}-\left(D-\frac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}}\right)\sin\theta+\frac{1}{64}au^{2}\sin\theta^{2}\right)$.

COROLLAIRE I.

(625.) Dans l'une & l'autre dénivellation du Fluide, la force ſera (595.) $= mſc\left(Da-\frac{1}{8}u\left(\left(D+\frac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}}-\left(D-\frac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}}\right)\sin\theta+\frac{1}{64}au^{2}\sin\theta^{2}\right)$.

COROLLAIRE II.

(626.) Réduiſant en ſérie la quantité $\left(D+\frac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}}-\left(D-\frac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}}$, on a $\frac{1}{8}D^{\frac{1}{2}}a\left(1-\frac{a^{2}}{96\,D^{2}}-\frac{a^{4}}{2048\,D^{4}}-\&c.\right)$: donc, en ſubſtituant, on aura la force horiſontale qui agit ſur un des petits quadrilateres = ... $mc\left(Da \pm \frac{1}{4}D^{\frac{1}{2}}au\sin\theta\left(1-\frac{a^{2}}{96\,D^{2}}-\frac{a^{4}}{2048\,D^{4}}-\&c.\right)+\frac{1}{64}au^{2}\sin\theta^{2}\right)$.

Digitized by Google

COROLLAIRE III.

(627.) Si D étoit très-grand par rapport à a, ou si l'on pouvoit traiter a comme une différencielle par rapport à D, on pourroit négliger tous les termes de la série, excepté le premier, ce qui réduiroit la force qui agit sur un des petits quadrilateres quelconque, ou choquant, ou choqué, à . . . . . $mc(Da \pm \frac{1}{2}D^{\frac{1}{2}}au\sin\theta + \frac{1}{64}au^2\sin\theta^2) = mca(D^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2}u\sin\theta^2)^2$.

COROLLAIRE IV.

(628.) Le cas dans lequel le rapport $\frac{a}{D}$ peut être le plus grand, est lorsqu'il s'agit des petits quadrilateres contigus à la superficie du Fluide. Comme D exprime la hauteur verticale de la superficie du Fluide au-dessus du centre du petit quadrilatere, on aura, en ce cas, $D = \frac{1}{2}a$. Substituant cette valeur dans la série, elle se réduit à $1 - \frac{1}{24} - \frac{1}{128}$ — &c.; d'où l'on voit que, même dans ce cas extrême, tous les termes de la série sont presque négligeables, excepté le premier.

COROLLAIRE V.

(629.) Comme dans ce cas extrême, où $D = \frac{1}{2}a$, la quantité $(D + \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}} - (D - \frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$, la force qui agit sur le petit quadrilatere est $= mc(\frac{1}{2}a^2 \pm \frac{1}{6}a^{\frac{1}{2}}u\sin\theta + \frac{1}{64}au^2\sin\theta^2)$.

COROLLAIRE VI.

(630.) La série $\frac{1}{2}D^{\frac{1}{2}}a\left(1 - \frac{a^2}{96D^2} - \frac{a^4}{2048D^4} - \text{&c.}\right)$ se réduira donc aussi, dans ce cas, à $\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{2}a}\left(1 - \frac{1}{24} - \frac{1}{128} - \text{&c.}\right) = a^{\frac{3}{2}}$; ce qui donne $\left(1 - \frac{1}{24} - \frac{1}{128} - \text{&c.}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{8}{9}}$; d'où l'on voit encore combien il s'en faut peu que la série ne se réduise à son premier terme, même dans ce cas extrême où les petits quadrilateres sont contigus à la superficie du Fluide.

COROLLAIRE VII.

(631.) Il suit de tout ce qu'on vient de dire, que a étant une différencielle par rapport à D, la série se réduit toujours au premier terme, même dans les petits quadrilateres contigus à la superficie du Fluide.

PROPOSITION XXXI.

(632.) *Trouver la force horisontale qui agit sur la surface d'un corps formé par la révolution d'une ligne, droite ou courbe, autour d'un axe*

Digitized by Google

PLANC. III. *horisontal, en supposant que ce corps se meuve dans un Fluide, suivant la direction de ce même axe, & parallélement à l'horison.*

FIG. 61. Soit ACG une courbe qui, en tournant autour de l'axe horisontal AM, forme le corps $ADSM$, & supposons que ce corps se meuve dans la direction de l'axe AM, cet axe conservant toujours son parallélisme avec l'horison. Soit mené les deux plans horisontaux $STOPV$, $XYQNZ$, infiniment voisins, & les deux verticaux $BGOQW$, $MCPN$, qui formeront sur la surface du corps le quadrilatere différencio-différenciel $QOPN$, auquel on élevera la perpendiculaire QE, & on tirera la ligne QB, qui sera égale à l'ordonnée $BG = y$. Soit mené de même la verticale QI, & l'horisontale QF parallele à l'axe : cette ligne formera, avec le quadrilatere $QOPN$, un angle égal au complément de FQR, QR étant le prolongement de EQ : mais BEQ est égal à FQR; donc l'angle que forme la direction QF du mouvement avec le quadrilatere différencio-différenciel $QOPN$, est égal au complément de BEQ, ou égal à l'angle EQB, dont le sinus se mesure par la raison de la sous-perpendiculaire BE à la perpendiculaire EQ. Ce sinus sera donc $\sin\theta = \frac{BE}{EQ}$. Mais, dans quelque courbe que ce soit, la sous-perpendiculaire est à la perpendiculaire, comme la différencielle de l'ordonnée est à la différencielle de la courbe *; faisant donc $AB = x$, $BG = BQ = y$, $BI = c$, & $IQ = a$, on aura . . . $\sin\theta = \frac{dy}{\sqrt{dy^2+dx^2}}$, & $BQ = y = \sqrt{c^2+a^2}$; ce qui donne, en supposant a constant, $dc = \frac{ydy}{\sqrt{y^2-a^2}}$. Ces valeurs étant mises dans l'expression de la force horisontale $m.dc.da\,(\sqrt{D+a} \pm \frac{1}{4}u\sin\theta)^2$, on aura pour l'expression de la force horisontale, & suivant la direction de l'axe, qui agit sur un quadrilatere différencio-différenciel $QOPN$, de quelque surface, plane ou courbe, que ce soit, la quantité $\frac{mdaydy}{\sqrt{y^2-a^2}}\left(\sqrt{D+a} \pm \frac{udy}{8\sqrt{dy^2+dx^2}}\right)^2$. En intégrant cette expression à l'égard de y, on aura la force qui agit sur une zone, comme $VOQZ = mda\,(D+a)\int\frac{ydy}{\sqrt{y^2-a^2}} \pm \ldots \frac{1}{4}muda\sqrt{D+a}\int\frac{ydy^2}{\sqrt{y^2-a^2}\sqrt{dy^2-dx^2}} + \frac{1}{64}mu^2da\int\frac{ydy^3}{(dy^2-dx^2)\sqrt{y^2-a^2}}$. Enfin, en réintégrant par rapport à a, on aura la force qui agit sur une

PLANC. A FIG. 2. * On voit cela facilement par les triangles semblables CLI, rIi; car ils donnent $CL : LI :: ri : Ii$. Donc $\frac{CL}{LI} = \frac{ri}{Ii} = \sin\theta$.

Digitized by Google

PLANCHE XII.

surface comme $AGQZA = mf da\,(D+a)\int \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}} \pm \ldots\ldots\ldots$

$\frac{1}{2}mu\int da\sqrt{D+a}\int \frac{y\,dy^2}{\sqrt{y^2-a^2}\sqrt{dy^2+dx^2}} + \frac{1}{64}mu^2\int da\int \frac{y\,dy^2}{(dy^2+dx^2)\sqrt{y^2-a^2}} + H.$

COROLLAIRE.

(633.) Si l'on ſuppoſe $x=0$, on réduit la ſurface à un plan circulaire, qui ſe meut horiſontalement & perpendiculairement à ſa ſurface; la force qui agit ſur cette ſurface ſera donc ..... $mf da\,(\sqrt{D+a}\pm\frac{1}{8}u)^2\int\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}} + H = mf da\,(\sqrt{D+a}\pm\frac{1}{8}u)^2\sqrt{y^2+a^2} + H$: ou, en ſubſtituant r en place de y, & en place du rayon par la rotation duquel le plan circulaire eſt engendré, cette force ſe réduira enfin à $mf da\,(\sqrt{D+a}\pm\frac{1}{8}u)^2\sqrt{r^2-a^2}+H$.

PROPOSITION XXXII.

(634) *Trouver la force horiſontale qui agit ſur la ſurface d'un cylindre qui flotte ſur un Fluide, & qui ſe meut horiſontalement, ſuivant une direction perpendiculaire à ſon axe.*

FIG. 62.

Soit le cylindre $BCQDE$, H ſon axe, BE un diametre horiſontal, GI la ſuperficie du Fluide, & CAL une verticale. La réſiſtance qu'éprouve la différencielle horiſontale en C, eſt (627.) $= mca\,(D\pm\frac{1}{4}u\,\mathit{ſin}\,\theta)^2$; formule dans laquelle nous devons ſubſtituer da pour a, & a à la place de $D=CA$; & comme $\mathit{ſin}\,\theta$ = le ſinus de l'angle LCH, en faiſant $AL=f$, on aura $\mathit{ſin}\,\theta = \frac{\sqrt{R^2-(a+f)^2}}{R}$, R exprimant le rayon du cylindre. Cette ſubſtitution faite, la force qui agit ſur la différencielle devient $= mcda\left(a^{\frac{1}{2}}+\frac{u\sqrt{R^2-(a+f)^2}}{8R}\right)^2$; & celle qui agit ſur toute la ſurface $GCQ = mcf da\left(a^{\frac{1}{2}}\pm\frac{u\sqrt{R^2-(a+f)^2}}{8R}\right)^2$.

PROPOSITION XXXIII.

(635.) *Trouver la force verticale qui agit ſur une ſurface quelconque qui ſe meut dans un Fluide immobile.*

Soit diviſé la ſurface du corps qui eſt dans le Fluide, en de petits quadrilateres ſenſiblement plans, par des lignes horiſontales & verticales. Cherchant enſuite la force verticale, poſitive ou négative, qui agit ſur chacun de ces petits quadrilateres, en prenant la ſomme de ces forces, on aura la force totale. Ce procédé a déjà été expliqué (624.), pour trouver la force horiſontale. On ſe rappellera que l'expreſſion

Digitized by Google

PLANC. III. de la force horisontale se réduit à celle d'une autre force, suivant une direction quelconque, en substituant seulement (599.) $\frac{b \sin x}{\sin n}$ en place de c; mais, comme, dans le cas présent, le mouvement se fait verticalement *, on a (616.) $\sin x = \cos n$; c'est donc $\frac{b \cos n}{\sin n}$ que nous devons substituer dans la formule de *l'Art.* 624, en place de c, pour avoir l'expression de la force verticale qui agit sur une surface quelconque, & cette expression sera . . . . . .

$$mc\int \frac{b \cos n}{\sin n}\left(Da \pm \tfrac{1}{6}u\left(\left(D+\tfrac{1}{2}z\right)^{\frac{1}{2}} - \left(D-\tfrac{1}{2}a\right)^{\frac{1}{2}}\right)\sin\theta + \tfrac{1}{64}au^2\sin\theta^2\right).$$

COROLLAIRE.

(636.) On aura de la même maniere la force verticale (626.) qui agit sur un quadrilatere infiniment petit, choquant ou choqué, $= \frac{mb\cos n}{\sin n}\left(Da \pm \frac{1}{4}D^{\frac{1}{2}}a\sin\theta\left(1 - \frac{a^2}{96D^2} - \frac{a^4}{2048D^4} - \&c.\right) + \frac{1}{64}au^2\sin\theta^2\right)$; mais, comme (614.) $\frac{a\cos n}{\sin n} = e$, ou $a = \frac{e\sin n}{\cos n}$, en substituant cette valeur, la même force verticale sera aussi $= \ldots\ldots\ldots$

$$mbe\left(D \pm \tfrac{1}{4}D^{\frac{1}{2}}u\sin\theta\left(1 - \frac{e^2\sin n^2}{96D^2\cos n^2} - \frac{e^4\sin n^4}{2048D^4\cos n^4} - \&c.\right) + \tfrac{1}{64}u^2\sin\theta^2\right);$$

ou enfin en négligeant tous les termes de cette série, excepté le premier, à cause qu'ils sont fort petits, elle sera encore $= \ldots\ldots$

$$mbe\left(D^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{8}u\sin\theta\right)^2.$$

PROPOSITION XXXIV.

(637.) *Trouver la force verticale qui agit sur la surface d'un cylindre qui flotte sur un Fluide, & qui se meut horisontalement dans une direction perpendiculaire à son axe.*

FIG. 62. La force horisontale qui agit sur une différencielle horisontale du cylindre en C, a été trouvée (634.) $= mc.da\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{u\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}}{8R}\right)^2$, R exprimant le rayon du cylindre, a étant $= CA$, distance verticale de la différencielle à la superficie du Fluide, & AL étant $= f$. Donc la force verticale sera (635.) $= \frac{m.db.da.\cos n}{\sin n}\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{u\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}}{8R}\right)^2$.

Substituant dans cette formule la valeur de $\frac{\cos n}{\sin n} = \frac{CL}{LH} = \frac{a+f}{\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}}$,

* Cette expression nous paroît inexacte; il faut dire : » mais comme dans le cas présent, il s'agit » de la résistance verticale, &c » C'est sûrement ce que l'Auteur entend; car, si le mouvement se faisoit verticalement, il faudroit faire $\sin\theta = \cos n$ (*Art.* 385.).

Digitized by Google

la force verticale qui agit sur la surface GCQ, sera $= \ldots\ldots$ $mb\int \frac{da\,(a\pm f)}{\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}}\left(a^2 \pm \frac{u\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}}{8R}\right)^2$, & la force totale qui agit sur GQI, sera $= 2mb\left(\int \frac{(a\pm f)\,ada}{\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}} + \int (a\pm f)\,u^2\,da\frac{\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}}{64R^2}\right)$.

CHAPITRE V.

Des réſiſtances horiſontales qu'éprouvent les Corps, lorſqu'ils ſe meuvent dans les Fluides : ou, au contraire, lorſque ce ſont les Fluides qui ſe meuvent, & choquent les corps.

PROPOSITION XXXV.

(638.) *TROUVER la réſiſtance horiſontale qu'éprouve un corps mu dans un Fluide.*

Les réſiſtances qu'éprouvent les corps mus dans les Fluides, ne ſont autre choſe que la réſultante des forces qui agiſſent ſur leurs ſurfaces ſuivant une direction déterminée; ou celle qui réſulte de la ſomme de toutes les forces, ſuivant cette même direction, en prenant poſitivement celles qui ſont poſitives, & négativement celles qui ſont négatives. Qu'on détermine donc, par les regles établies dans le Chapitre précédent, les forces horiſontales qui agiſſent ſur les ſurfaces qui terminent le corps, & qu'on en prenne la ſomme, on aura la valeur de la réſiſtance.

PROPOSITION XXXVI.

(639.) *Trouver la réſiſtance horiſontale qu'éprouve un parallélipipede rectangle qui flotte ſur un Fluide, ayant deux de ſes côtés paralleles à l'horiſon, le parallélipipede ſe mouvant, & non le Fluide, ſuivant une direction parallele à ſes deux autres côtés, dans le cas où l'on auroit* $a >$, *ou* $= \frac{u^2 \sin\theta^2}{64 \sin\omega^2}$.

La force qui agit ſur la ſurface choquante, eſt (602.) $= \ldots\ldots$ $mc\left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^3 u\sin\theta + \frac{1}{64}au^2\sin\theta^2\right) + mc\left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n^3 u\sin\theta + \frac{1}{64}nu^2\sin\theta^2\right)$. Celle qui agit ſur la ſurface choquée, à cauſe que $\sin\omega = 1$, eſt (609.) $= mc\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}a^3 u\sin\theta + \frac{1}{64}au^2\sin\theta^2 - \frac{u^4\sin\theta^4}{6.64^2}\right)$. Quant à la force qui agit ſur les deux ſurfaces latérales, elle eſt zéro, parce qu'étant paralleles à la direction du mouvement, on a $c = 0$. La force qui

Digitized by Google

agit sur la base ou surface inférieure, est aussi zéro, à cause qu'on a pour cette surface $da = 0$. Il n'y a donc pas d'autres forces, suivant la direction dont il s'agit, que celles qu'éprouvent les deux surfaces choquante & choquée. Cette derniere est négative, parce qu'elle agit dans une direction contraire à la premiere; par conséquent la résistance horisontale qu'éprouvera le parallélipede sera = ... $mc\left(\frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}u\sin\theta + \frac{1}{2}n^{2} - \frac{1}{6}n^{\frac{3}{2}}u\sin\theta + \frac{1}{64}nu^{2}\sin\theta^{2} + \frac{u^{4}\sin\theta^{4}}{6.64^{2}}\right)$.

COROLLAIRE I.

(640.) Si le parallélipipede, flottant, comme on le suppose, avoit une hauteur suffisante hors du Fluide, de maniere que le Fluide ne pût passer par-dessus; ou si sa hauteur étoit égale, ou plus grande que $\frac{u^{2}\sin\theta^{2}}{64}$, n seroit alors $= \frac{u^{2}\sin\theta^{2}}{64}$, & la résistance se réduiroit à $mc\left(\frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}u\sin\theta + \frac{u^{4}\sin\theta^{4}}{3.64^{2}}\right) = \frac{1}{3}mcu\sin\theta\left(a^{\frac{3}{2}} + \frac{u^{3}\sin\theta^{3}}{64^{2}}\right)$.

COROLLAIRE II.

(641.) Si, au contraire, le parallélipipede n'avoit aucune hauteur au-dessus du Fluide, de façon que sa surface supérieure fût de niveau avec celle du Fluide, alors $n = 0$, & la résistance se réduiroit à $mc\left(\frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}u\sin\theta + \frac{u^{4}\sin\theta^{4}}{6.64^{2}}\right) = \frac{1}{3}mcu\sin\theta\left(a^{\frac{3}{2}} + \frac{u^{3}\sin\theta^{3}}{2.64^{2}}\right)$.

COROLLAIRE III.

(642.) En négligeant la dénivellation du Fluide, on doit négliger tous les termes où a ne se trouve pas (601.) : donc la résistance qu'éprouve le parallélipipede, en négligeant la dénivellation du Fluide, sera $= \frac{1}{3}mca^{\frac{3}{2}}u\sin\theta$.

COROLLAIRE IV.

(643.) Pour pouvoir négliger la dénivellation du Fluide, il suffit seulement que la profondeur a, à laquelle la surface inférieure du parallélipipede est submergée dans le Fluide, soit très-grande à l'égard de $\frac{1}{64}u^{2}\sin\theta^{2}$. Le parallélipipede étant donc très-grand, ou la profondeur à laquelle il s'enfonce dans le Fluide, étant très-grande à l'égard de la vitesse $u\sin\theta$, on pourra négliger la dénivellation; & la fonction qui exprimera la résistance se réduira à une seule quantité, qui sera comme les simples vitesses u.

SCOLIE.

(644.) Nous avons établi dans cette théorie, que la force avec laquelle

quelle le Fluide agit contre une différencio-différencielle de superficie, est proportionnelle à $(8\sqrt{a \pm u \sin\theta})^2$; & le principe qui nous y a conduit est que nous avons trouvé la vitesse avec laquelle le Fluide jailliroit, par la même différencio-différencielle, s'il avoit un libre passage, $=8\sqrt{a \pm u \sin\theta}$. Quelque solide que paroisse ce fondement, on pourroit cependant observer qu'il seroit peut-être également solide de supposer le poids que doit soutenir la différencio-différencielle, le même que celui de la colonne agissante du Fluide qui est au-dessus d'elle, laquelle a pour hauteur $a \pm \frac{1}{64}u^2 \sin\theta^2$; le dernier terme $\frac{1}{64}u^2 \sin\theta^2$ exprimant la hauteur de l'intumescence, ou la profondeur de la cavité. Si l'on fait cette supposition, le poids que supportera la différencielle de la surface choquante, ou choquée, du parallélipipede sera $= \ldots\ldots$ $mc.la\left(a \pm \frac{1}{64}u^2 \sin\theta^2\right)$, quantité dont l'intégrale est $mc\left(\frac{1}{2}a^2 \pm \frac{1}{64}au^2 \sin\theta^2 + H\right)$, ou $mc\left(\frac{1}{2}a^2 \pm \frac{1}{64}au^2 \sin\theta^2 + \frac{u^4 \sin\theta^4}{2.64}\right)$; car H devient $= \frac{u^4 \sin\theta^4}{2.64}$, en faisant $a = \mp \frac{1}{64}u^2 \sin\theta^2$ (600.). Ainsi cette intégrale exprimeroit le poids que supporte l'une quelconque des deux surfaces, choquante ou choquée, du parallélipipede, & par conséquent la résistance qui résulte des deux seroit $= \frac{1}{32}ncau^2 \sin\theta^2$; quantité qui, comme on le verra ci-après, *Chap. VII*, doit se réduire à la moitié $\frac{1}{64}mcau^2 \sin\theta^2$, lorsque le parallélipipede se réduit à un plan. Cette détermination est tellement conforme à l'opinion généralement reçue, &, ce qui est plus, aux expériences rapportées par M. *Mariotte*, dans le *troisieme Discours* de la *seconde Partie* de son *Traité du mouvement des Eaux*, qu'elle auroit très-bien pu être d'un poids égal pour nous, ou peut-être même suffiroit-elle pour nous faire abandonner notre théorie, si la quantité d'expériences qui la justifient, non seulement de l'espece de celles qu'a faites M. *Mariotte*, mais encore toutes celles que nous avons pu employer à cette vérification, comme on le verra par la suite de ce Traité, ne lui avoient donné le plus grand crédit. Nous n'exposerons, en ce moment, que celles qui contredisent absolument les expériences de M. *Mariotte*.

Cet Auteur, dans la *Regle V* du Discours cité, donne deux expériences qu'il a faites, en exposant perpendiculairement au courant de la *Seine*, une petite planche d'un demi-pied en quarré, en se servant pour cela d'un instrument dont il donne la description. Il dit qu'avec un courant dont la vîtesse étoit de 3 pieds $\frac{1}{2}$ par seconde, la planche soutint un poids de 3 livres $\frac{1}{2}$. La surface de la planche, réduite en mesure Anglaise, est de $\frac{16^2}{4.15^2}$ *, & la vîtesse du

* L'Auteur prend ici le rapport de 15 à 16 pour celui du pied anglais au pied français, ce qui

courant est de $\frac{11}{15}$ pieds. Pour comparer maintenant cette expérience avec la formule $\frac{1}{64} mcau^2 \sin\theta^2$, observons qu'on a $m = 1000$ onces, qui est le poids d'un pied cubique d'eau; $ca = \frac{1}{4}\cdot\frac{16^2}{15^2}$; $\sin\theta = 1$; & $u = \frac{52}{15}$. On aura donc, suivant la formule, le poids que devoit supporter la planche $= \frac{1}{64}\cdot 1000\cdot\frac{16^2}{4\cdot 15^2}\cdot\frac{52^2}{15^2} = \frac{21632}{405} = 53$ onces $\frac{2}{5}$, ou 3 liv. 5 onces $\frac{2}{5}$, ce qui n'est que de 6 onces $\frac{1}{2}$ de moins que ce que dit avoir trouvé M. *Mariotte*. Dans la seconde expérience il dit que la planche soutint un poids de 9 onces, la vitesse du courant étant de 1 pied $\frac{1}{2}$ par seconde. Suivant la formule, le poids doit être égal à $\frac{1}{64}\cdot 1000\cdot\frac{16^2}{4\cdot 15^2}\cdot\frac{16}{9} = 8$ onces; quantité qui est seulement moindre d'une once que celle que donne l'Auteur; & l'on ne peut regarder ces différences comme bien sensibles, dans des expériences de cette nature. Mais on va voir combien ces expériences, que l'Auteur regarde comme si exactes, s'éloignent de celles que j'ai pratiquées moi-même pour m'assurer de leur exactitude. Une planche, de la forme d'un parallélogramme rectangle, d'un pied de large, exposée perpendiculairement à l'action d'un courant dont la vitesse étoit de 2 pieds par seconde, a supporté un poids de 25 livres $\frac{1}{2}$, étant submergée d'un pied juste dans le Fluide. Suivant l'opinion généralement reçue, ce poids auroit dû être de $\frac{1}{64}\cdot 1000\cdot 4 = 62$ onces $\frac{1}{2}$, ou 3 livres 14 onces $\frac{1}{2}$, quantité bien éloignée de celle qu'a donné l'expérience. La même planche a supporté un poids de 26 livres $\frac{1}{2}$, exposée à un courant de $\frac{1}{2}$ pieds de vitesse par seconde, & étant submergée de 2 pieds juste dans le Fluide; suivant l'opinion générale, elle auroit dû supporter un poids de $\frac{1}{64}\cdot 1000\cdot 2\cdot\frac{16}{9} = 56$ onces, ou de 3 livres $\frac{1}{2}$; quantité qui est encore extrêmement éloignée de celle qu'a donné l'expérience. Ce qu'il y a de plus remarquable, & ce qui doit, ce me semble, faire rejetter absolument l'opinion généralement reçue, c'est que, d'après elle, le second poids auroit dû être moindre que le premier, &, au contraire, il a été trouvé de 10 livres $\frac{3}{4}$ plus grand, ce qui est le triple du poids total 3 livres $\frac{1}{2}$ qu'on a cru jusqu'ici qu'elle devoit supporter. Au contraire, notre formule est (640.) $\frac{1}{3} mc.u\sin\theta\left(a^{\frac{3}{2}} + \frac{u^3\sin\theta^3}{64.64}\right)$, qui, à cause que les vitesses sont petites, & que $\sin\theta = 1$, se réduit à $\frac{1}{3} mca^{\frac{3}{2}}u$; quantité dont il ne faut prendre que la moitié $\frac{1}{6} mca^{\frac{3}{2}}u$, pour les raisons qu'on exposera ci-

est très-proche de la vérité, & est suffisant pour son objet. *Voyez*, pour plus d'exactitude la note de l'*Art.* 51.

Digitized by Google

après (731.). Le poids que devoit supporter la planche dans la première expérience, sera donc $= \frac{1}{16}.1000.2 = 333$ onces, ou 20 liv. $\frac{5}{12}$, poids qui est seulement de 5 liv. plus fort que celui qu'a donné l'expérience; différence, au reste, qui doit aussi avoir lieu, par ce qui a été exposé, *Art.* 596. Dans la seconde expérience, le poids qu'auroit dû supporter la planche, devoit être $= \frac{1}{16}.1000(2)^{\frac{3}{2}}.\frac{1}{2} = 628$ onces, ou 39 liv. $\frac{1}{4}$, poids qui est de 13 l. plus grand que l'expérience ne l'a donné; & cet excès devoit effectivement avoir lieu, comme on vient de le dire.

Pour appercevoir & se convaincre de l'accord de l'expérience avec la théorie que nous avons donnée, il n'y a qu'à considérer la raison de $2\grave{a}(2)^{\frac{3}{2}}.\frac{1}{2}$, ou celle de 15 à 28, qui lui est à-peu-près égale, dans laquelle doivent être, suivant cette théorie, les deux poids supportés: car elle s'éloigne très-peu de la raison des poids $15\frac{1}{2}$ & $26\frac{1}{2}$, que l'expérience a donnés. Suivant l'opinion commune, cette raison devroit être celle de 4 à $\frac{2.16}{9}$, ou celle de 9 à 8, qui est la raison des produits des surfaces choquées par les quarrés des vitesses; raison qui, comme on voit, est excessivement éloignée de celle de $15\frac{1}{2}$ à $26\frac{1}{2}$, qui a été fournie par l'expérience: car, comme on l'a dit, cette raison devoit être de plus grande égalité, tandis qu'elle est de moindre.

Les deux expériences donnent, à peu de différence, la mesure absolue de la résistance moindre d'un tiers que celle qui résulte de la théorie, comme on vient de le voir, & comme nous devions nous y attendre, d'après ce qui a été dit dans l'*Art.* 596: enforte que, pour avoir la mesure juste & absolue de cette résistance, nous devons prendre les deux tiers de ce qui résulte de la théorie.

Proposition XXXVII.

(645.) *Trouver la résistance horisontale qu'éprouve le même parallélipipede rectangle, se mouvant, comme on l'a supposé dans la proposition précédente, dans le cas où l'on auroit* $a =$, ou $< \frac{u^2 \sin \theta^2}{64}$.

Nous avons dit, *Art.* 610. que, dans ce cas, la surface postérieure n'étoit soumise à l'action d'aucune force; ainsi la résistance se réduira à la force qui agit sur la surface antérieure, & dont l'expression est $= mc\left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}u\sin\theta + \frac{1}{64}au^2\sin\theta^2\right) + mc\left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{3}n^{\frac{3}{2}}u\sin\theta + \frac{1}{64}nu^2\sin\theta^2\right)$.

Corollaire I.

(646.) Si le parallélipipede étoit assez élevé au-dessus de la superficie du Fluide pour que celui-ci ne pût passer par-dessus, ou que sa hauteur fût égale, ou plus grande que $\frac{u^2 \sin \theta^2}{64}$, alors on auroit $n = \frac{1}{64}u^2\sin\theta^2$,

& la réſiſtance ſe réduiroit à $mc\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}u\sin\theta+\frac{1}{64}au^2\sin\theta^2+\frac{u^4\sin\theta^4}{6.64^2}\right)$.

COROLLAIRE. II.

(647.) Si, au contraire, le parallélipipéde n'avoit aucune hauteur au-deſſus du Fluide; c'eſt-à-dire, s'il étoit entiérement ſubmergé; alors on auroit $n=0$, & la réſiſtance ſe réduiroit à $mc\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}u\sin\theta+\frac{1}{64}au^2\sin\theta^2\right)$; la même que celle qui a lieu lorſqu'on néglige la dénivellation du Fluide.

PROPOSITION XXXVIII.

(648.) *Trouver la réſiſtance horiſontale qu'éprouvera le même parallélipipede rectangle, en ſe mouvant, comme il a été dit ci-deſſus; & dans le cas où il ſeroit entiérement ſubmergé dans le Fluide, ayant* $D<\frac{u^2\sin\theta^2}{64}$, & $D+a=$, *ou* $>\frac{u^2\sin\theta^2}{64}$.

La force qui agira ſur la ſurface choquante, ſera (611.) $=mc\left(Da+\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{3}u\sin\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)+\frac{1}{64}au^2\sin\theta^2\right)$; & celle qui agira ſur la ſurface choquée, ſera (607.) $=\ldots\ldots\ldots\ldots$, $mc\left(\frac{2}{3}(D+a)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}u\sin\theta(D+a)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{64}u^2\sin\theta^2(D+a)-\frac{u^4\sin\theta^4}{6.64^2}\right)$. Souſtrayant cette derniere force de la premiere, & réduiſant, la réſiſtance deviendra $=\frac{1}{3}mcu\sin\theta(D+a)^{\frac{3}{2}}-mc\left(\frac{1}{3}D^2+\frac{1}{6}D^{\frac{3}{2}}u\sin\theta+\frac{1}{64}Du^2\sin\theta^2-\frac{u^4\sin\theta^4}{6.64^2}\right)$.

COROLLAIRE.

(649.) Si $D=0$, la réſiſtance ſe réduira, comme on l'a dit (641.), à $\frac{1}{3}mcu\sin\theta\left(a^{\frac{3}{2}}+\frac{u^3\sin\theta^3}{2.64^2}\right)$.

PROPOSITION XXXIX.

(650.) *Trouver la réſiſtance horiſontale qu'éprouvera le même parallélipipede rectangle, en ſuppoſant toujours qu'il ſe meuve comme il a été dit ci-deſſus; & dans le cas où il ſeroit entiérement ſubmergé dans le Fluide, ayant* $D<\frac{u^2\sin\theta^2}{64}$, & $D+a=$, *ou* $<\frac{u^2\sin\theta^2}{64}$.

Dans ce cas, la ſurface poſtérieure n'éprouve aucune action (610.), & la réſiſtance ſe réduit à la force qui agit ſur la ſurface antérieure, laquelle eſt (611.) $=mc\left(Da+\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{3}u\sin\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)+\frac{1}{64}au^2\sin\theta^2\right)$.

COROLLAIRE.

(641.) Si l'on avoit $D=0$, & par conſéquent $n=0$, la réſiſtance ſe réduiroit à $mc\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}u\sin\theta+\frac{1}{64}au^2\sin\theta^2\right)$; la même qu'en négligeant la dénivellation du Fluide.

Digitized by Google

Proposition XL.

(652.) *Trouver la résistance horisontale qu'éprouvera le même parallélipipede rectangle, en supposant qu'il se meuve toujours d'après les mêmes conditions, & dans le cas où il seroit entiérement submergé dans le Fluide, ayant* $D=$, *ou* $>\frac{1}{6\delta}u^2 \sin\theta^2$.

La force qui agira sur la surface choquante, sera (611.) $=\ldots$ $mc\left(Da+\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{6}u\sin\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)+\frac{1}{6\delta}au^2\sin\theta^2\right)$; & celle qui agira sur la surface choquée, sera $=\ldots\ldots\ldots\ldots$ $mc\left(Da+\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{6}u\sin\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)+\frac{1}{6\delta}au^2\sin\theta^2\right)$. Soustrayant cette derniere expression de la premiere, & réduisant, on aura la résistance $=\frac{1}{3}mcu\sin\theta\left((D+a)^{\frac{1}{2}}-D^{\frac{1}{2}}\right)$.

Corollaire I.

(653.) Réduisant $(D+a)^{\frac{1}{2}}$ en série, cette résistance sera $=\frac{1}{3}mcD^{\frac{1}{2}}au\sin\theta\left(1+\frac{a}{4D}-\frac{a^2}{24D^2}+\&c.\right)$.

Corollaire II.

(654.) Si D étoit très-grand à l'égard de a; c'est-à-dire, si le parallélipipede étoit submergé à une profondeur très-grande, de sorte que sa hauteur a fût très-petite à l'égard de la profondeur D, on pourroit négliger tous les termes de la série, excepté le premier, & la résistance deviendroit $=\frac{1}{3}mcD^{\frac{1}{2}}au\sin\theta$.

Corollaire III.

(655.) Comme, pour compléter l'intégrale, tant de la force qui agit sur la surface choquante, que de celle qui agit sur la surface choquée, dans le cas où le parallélipipede est entiérement submergé dans le Fluide, & où l'on a $D=$, ou $>\frac{1}{6\delta}u^2\sin\theta^2$, on doit supposer $a=0$; on peut, si l'on veut, sommer, ou soustraire, d'abord les forces des différencielles, & trouver ainsi leur résistance, laquelle étant ensuite intégrée d'après la supposition que $a=0$, donnera la résistance qu'éprouve le parallélipipede. La force qui agit sur la différencielle choquante, est (589.), après avoir intégré à l'égard de c, $=mc.da\left((D+a)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}u\sin\theta\right)^2$, & celle qui agit sur la surface choquée est $=mc.da\left((D+a)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}u\sin\theta\right)^2$. Soustrayant cette derniere de la premiere, on aura la résistance qui provient de ces deux différen-

Digitized by Google

PLANC. III. cielles $= \frac{1}{2}mc.da.u\sin\theta(D+a)^{\frac{1}{2}}$; & en intégrant, on aura la réſiſtance qu'éprouve le parallélipipede $= \frac{1}{3}mc.u\sin\theta(D+a)^{\frac{3}{2}} + H$. Suppoſant maintenant $a=0$, il vient $\frac{1}{3}mc.D^{\frac{3}{2}}u\sin\theta+H=0$, ce qui donne $H=-\frac{1}{3}mc.D^{\frac{3}{2}}u\sin\theta$: par conſéquent l'intégrale complette, ou la réſiſtance qu'éprouve le parallélipipede ſera $=$ . . . . . , $\frac{1}{3}mc.u\sin\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)$, comme ci-deſſus (652.).

COROLLAIRE IV.

(656.) Toutes les fois que, pour compléter les intégrales, tant de la ſurface choquante que de la ſurface choquée, nous devrons ſuppoſer $a=0$, comme dans le cas où l'on a $D=$, ou $>\frac{1}{4}u^2\sin\theta^2$; ou, ce qui revient au même, dans le cas où l'on peut négliger la dénivellation du Fluide, à cauſe que $\frac{1}{4}u^2\sin\theta^2$ ſeroit très-petit par rapport à a, on pourra, dans tous ces cas, chercher premiérement la réſiſtance des différencielles, d'où l'on tirera, en intégrant, celle de tout le corps.

COROLLAIRE V.

(657.) Comme la longueur du parallélipipede ſuivant la direction du mouvement, ne ſe trouve dans aucune des expreſſions des réſiſtances horiſontales qu'éprouve le parallélipipede, dans les différents cas que nous avons examinés, il s'enſuit qu'il éprouvera toujours la même réſiſtance horiſontale, quelle que ſoit ſa longueur dans cette même direction.

COROLLAIRE VI.

(658.) Comme, en faiſant cette dimenſion égale à zéro, le parallélipipede devient un plan quadrilatere qui ſe meut avec deux de ſes côtés paralleles à l'horiſon; il s'enſuit que toutes les expreſſions des réſiſtances horiſontales que nous avons trouvées pour le parallélipipede, conviennent auſſi pour ce quadrilatere.

PROPOSITION XLI.

(659.) *Trouver la réſiſtance horiſontale qu'éprouve un parallélipipede rectangle* AB *qui flotte ſur un Fluide, ayant ſes côtés* AF & KB *inclinés à l'horiſon, en ſuppoſant que ce ſoit le parallélipipede, & non le Fluide, qui ſe meuve horiſontalement, & ſuivant une direction parallele à* AI, *dans le cas où* a *eſt* $=$, *ou* $>\frac{1}{4}u^2\sin\theta^2$, *& que le Fluide ne paſſe point par-deſſus.* FIG. 63.

Soit ED la ſuperficie du Fluide, AJ une droite qui lui eſt parallele, & CH, EG, FQ, des verticales; faiſant $EG=a$, on aura

la force qui agit sur la surface choquante $DJ = \ldots\ldots\ldots$ $mc\left(\frac{1}{8}a^2 + \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\sin b + \frac{1}{64}au^2\sin\theta^2 + \frac{u^4\sin\theta^4}{6.64^2}\right)$. Si l'on appelle Δ l'angle que forme la base AF avec l'horisontale AJ, le sinus de l'angle que forme cette horisontale avec CJ sera $= cos\Delta$, & cette valeur substituée, dans l'expression ci-dessus, en place de $\sin\theta$, la changera en $mc\left(\frac{1}{8}a^2 + \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\cos\Delta + \frac{1}{64}au^2\cos\Delta^2 + \frac{u^4\cos\Delta^4}{6.64^2}\right)$. Par la même raison, la force qui agit sur la surface choquée EA est $= \ldots\ldots\ldots$ $mc\left(\frac{1}{8}a^2 - \frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}u\cos\Delta + \frac{1}{64}au^2\cos\Delta^2 - \frac{u^4\cos\Delta^4}{6.64^2}\right)$. Ainsi la résistance qui provient de ces deux forces, sera $= \frac{1}{3}mc.u\cos\Delta\left(a^{\frac{3}{2}} + \frac{u^3\cos\Delta^3}{64^2}\right)$.

La force qui agit sur JF est $= \ldots\ldots\ldots$ $mc\left(Da + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{8}u\sin\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}au^2\sin\theta^2\right)$. Or, en appellant e la base AF, FI sera $= e\sin\Delta$. En substituant donc $cos\Delta$ pour $\sin\theta$, $e\sin\Delta$ pour a, & a pour D, cette force sera $= \ldots$ $mc\left(ae\sin\Delta + \frac{1}{2}e^2\sin\Delta^2 + \frac{1}{8}u\cos\Delta\left((a+e\sin\Delta)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right)\right) + \frac{mcu^2e}{64}\sin\Delta.\cos\Delta^2$. On aura, par la même raison, celle qui agit sur la base $AF =$ $mc\left(ae\sin\Delta + \frac{1}{2}e^2\sin\Delta^2 - \frac{1}{8}u\sin\Delta\left((a+e\sin\Delta)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right)\right) + \frac{mcu^2e}{64}\sin\Delta^3$.* Ainsi la résistance qui provient des forces qui agissent sur les deux côtés JF, AF, sera $= \ldots\ldots\ldots$ $mc\left(\frac{1}{8}u(cos\Delta + \sin\Delta)\left((a+e\sin\Delta)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}u^2e\sin\Delta(cos\Delta^2 - \sin\Delta^2)\right)$, & celle qu'éprouvera tout le parallélipipede, sera $= \ldots\ldots$ $mc\left(\frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}u\cos\Delta + \frac{u^4\cos\Delta^4}{3.64^2} + \frac{1}{8}u(cos\Delta + \sin\Delta)\left((a+e\sin\Delta)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right)\right) + \frac{mcu^2e}{64}\sin\Delta(cos\Delta^2 - \sin\Delta^2)$.

COROLLAIRE I.

(660.) Réduisant $(a+e\sin\Delta)^{\frac{3}{2}}$ en série, substituant & réduisant, la résistance qu'éprouvera le parallélipipede sera encore $= \ldots\ldots$ $mc\left(\frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}u\cos\Delta + \frac{u^4\cos\Delta^4}{3.64^2} + \frac{1}{64}u^2e\sin\Delta(cos\Delta^2 - \sin\Delta^2)\right) + \ldots\ldots$ $\frac{1}{8}mca^{\frac{1}{2}}u\sin\Delta(cos\Delta + \sin\Delta)\left(1 + \frac{e\sin\Delta}{4a} - \frac{e^2\sin\Delta^2}{24a^2} + \&c.\right)$.

COROLLAIRE II.

(661.) Dans le cas où l'on négligeroit la dénivellation, il faudroit supprimer (601.) toutes les quantités dans lesquelles a ne se

* On voit que, dans le cas de la Figure, la base ne choque point le Fluide, mais, au contraire, qu'elle en est choquée; c'est ce qui fait que le terme $\frac{1}{8}u\sin\Delta$ &c. a le signe $-$.

Digitized by Google

PLANC. III. trouve point, ou la quantité $e \sin \Delta$, qui en a fait l'office : donc, pour ce cas, la résistance sera = ...

$mc\left(\frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}u\cos\Delta + \frac{1}{6}u^2 e \sin\Delta\,(\cos\Delta^2 - \sin\Delta^2)\right) + \ldots\ldots$

$\frac{1}{5}mca^{\frac{1}{2}}u\sin\Delta\,(\cos\Delta + \sin\Delta)\left(1 + \frac{e\sin\Delta}{4a} - \frac{e^2\sin\Delta^2}{24a^2} + \&c.\right)$.

COROLLAIRE III.

(662.) Si l'on suppose que u & Δ sont infiniment petits, on pourra négliger tous les termes dans lesquels ces grandeurs sont élevées à quelque puissance au-dessus de la premiere, & la résistance deviendra, dans ce cas, $= mc\left(\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}u + \frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}u\sin\Delta\right) = mca^{\frac{1}{2}}u\left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{4}\sin\Delta\right)$.

PROPOSITION XLII.

(663.) *Trouver la résistance horisontale qu'éprouve un cylindre qui flotte sur un Fluide, & qui se meut horisontalement suivant une direction perpendiculaire à son axe.*

La force horisontale qui agit sur la surface GCQ, ou IDQ du cylindre BQE, a été trouvée (634.) $= mcfda\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{u\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}}{8R}\right)^2$, R exprimant le rayon du cylindre, $a = CA$ la profondeur verticale à laquelle une différencielle horisontale en C est abaissée au-dessous de la superficie GI du Fluide, & f étant $= AL$. Soustrayant donc la force qui agit sur la surface choquée IDQ, de celle qui agit sur la surface choquante GCQ, on aura la résistance qu'éprouve le cylindre $= \frac{mcu}{2R}\int a^{\frac{1}{2}}da\sqrt{R^2-(a\pm f)^2}$.

Voy. 634

SCOLIE.

(664.) On peut trouver, par une autre méthode particuliere, la résistance exacte qu'éprouvent une sphere, un cylindre, ou tout autre corps formé par la révolution d'une ligne droite, ou courbe, autour d'un axe horisontal, dans la direction duquel on suppose que se fait le mouvement du corps, lorsque ces corps sont tellement submergés dans le Fluide, que a peut être négligée par rapport à D. Dans ce cas, on peut exprimer par cda une zone verticale du même corps, c désignant la circonférence entiere de la même zone, & da la différencielle de l'ordonnée*. La formule $mc.da\,(\sqrt{D} + a \pm \frac{1}{3}u\sin\theta)^2$, se réduira à $mc\,da\left(\sqrt{D} \pm \frac{1}{8}u\frac{dx}{\sqrt{da^2+dx^2}}\right)^2$, en supposant x l'abscisse,

* On remarquera que ce n'est point la zone verticale même du corps que l'Auteur représente par cda, mais sa projection orthographique sur le plan vertical perpendiculaire à l'axe, ou à

&c

& la réſiſtance deviendra $= \frac{\frac{1}{2}mcuda^2\sqrt{D}}{\sqrt{da^2+dx^2}}$; ou, ſi nous ſuppoſons que c exprime la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon eſt l'unité ; nous n'aurons qu'à ſubſtituer $2ca$ pour c ſeul, & la réſiſtance deviendra $= \frac{mcuada^2\sqrt{D}}{\sqrt{da^2+dx^2}}$. Dans la ſphere, on a $\frac{da}{\sqrt{da^2+dx^2}} = -\frac{x}{r}$, r étant ſon rayon, & $ada = -xdx$: donc $\frac{ada^2}{\sqrt{da^2+dx^2}} = \frac{x^2dx}{r}$, dont l'intégrale eſt $\frac{x^3}{3r}$; ou, en faiſant $x=r$, on aura $\frac{1}{3}r^2.mcu\sqrt{D}$ pour la réſiſtance qu'éprouve toute la ſphere. Dans le cylindre on a $\frac{da}{\sqrt{da^2+dx^2}} = 1$. Donc $\frac{ada^2}{\sqrt{da^2+dx^2}} = ada$; quantité dont l'intégrale eſt $\frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}r^2$, & la réſiſtance ſera $= \frac{1}{2}r^2.mcu\sqrt{D}$. On voit donc que la réſiſtance de la ſphere eſt les deux tiers de celle du cylindre de même diametre. Si nous mettons $\frac{1}{2}a$ en place de r, a étant le diamette de la ſphere, ou du cylindre, leurs réſiſtances ſeront $\frac{1}{12}a^2mcu\sqrt{D}$, & $\frac{1}{4}a^2mcu\sqrt{D}$.

PROPOSITION XLIII.

(665.) *Trouver la réſiſtance horiſontale qu'éprouve un corps quelconque, qui ſe meut dans un Fluide immobile.*

On diviſera la ſurface du corps en de très-petits quadrilateres, comme on l'a dit, *Art.* 624, & on cherchera la force poſitive, ou négative, qui agit ſur chacune de ces petites ſurfaces ; prenant enſuite la ſomme de toutes ces forces, on aura la réſiſtance qu'éprouve tout le corps. Autrement, on peut prendre la force qui agit ſur une petite ſurface choquante d'un quadrilatere, & l'ajouter avec celle qui agit ſur la petite ſurface choquée qui lui correſpond, ou qui eſt dans la même direction ; & l'on aura la réſiſtance qui provient de

---

la direction du mouvement. Il eſt évident, d'après l'*Art.* 555, que c'eſt auſſi cette projection qui entre dans l'expreſſion de la réſiſtance, & qu'on doit prendre pour cda. On peut d'ailleurs s'en convaincre, en remarquant que, puiſqu'on ſuppoſe le corps tellement ſubmergé dans le fluide, qu'on puiſſe négliger a à l'égard de D, tous les points de la circonférence de la zone peuvent être conſidérés comme à égale diſtance de la ſuperficie du fluide. Ainſi la réſiſtance que cette zone éprouve eſt la même que celle qu'elle éprouveroit étant développée, & réduite à une différencielle de ſurface plane, dont la hauteur ſeroit égale à celle de la zone, & dont la baſe ſeroit égale à ſa circonférence ; cette différencielle étant d'ailleurs enfoncée à la même profondeur dans le fluide, étant ſuppoſée ſe mouvoir dans la même direction que le corps, & l'angle qu'elle forme avec cette direction étant $= \theta = \frac{da}{\sqrt{da^2+dx^2}}$, ou $= -\frac{x}{r}$, s'il s'agit d'une ſphere (632.). Cette quantité devient $=$ l'unité, s'il s'agit d'un cylindre : car, pour ce dernier corps, la réſiſtance ſe réduit à celle des baſes, & alors θ eſt de 90 degrés ; par conſéquent $\sin\theta = 1$.

Digitized by Google

ces deux petits quadrilateres. Ajoutant donc cette réſiſtance avec toutes celles qui réſultent des autres quadrilateres, il eſt clair qu'on aura la réſiſtance totale.

COROLLAIRE I.

(666.) Si θ exprime l'angle que forme la direction horiſontale avec le petit quadrilatere choquant, & Θ celui que forme cette même direction avec le quadrilatere choqué correſpondant, ou qui eſt dans la même direction que le premier, on aura . . . . . $mc\left(Da+\frac{1}{6}u\sin\theta\left((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}}-(D-\frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{64}u^2a\sin\theta^2\right)$ pour la force qui agit ſur le premier quadrilatere, & . . . . . $mc\left(Da-\frac{1}{6}u\sin\Theta\left((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}}-(D-\frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{64}u^2a\sin\Theta^2\right)$ pour celle qui agit ſur le ſecond. Souſtrayant celle-ci de la premiere, il reſte $\frac{1}{6}mcu(\sin\theta+\sin\Theta)\left((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}}-(D-\frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{64}mcu^2a(\sin\theta^2-\sin\Theta^2)$; c'eſt l'expreſſion de la réſiſtance qu'éprouve le corps, & qui provient de l'action du Fluide ſur ces deux petits quadrilateres correſpondants, ou qui ſe trouvent dans la même ligne horiſontale, parallele à la direction.

COROLLAIRE II.

(667.) La même réſiſtance qu'éprouvent deux petits quadrilateres correſpondants quelconques, ſera encore exprimée par . . . . . $\pm\frac{1}{4}mcau\,D^{\frac{1}{2}}(\sin\theta+\sin\Theta)\left(1-\frac{a^2}{96D^2}-\frac{a^4}{2048D^4}-\&c.\right)+\frac{mcau^2}{64}(\sin\theta^2-\sin\Theta^2)$*

COROLLAIRE III.

(668.) Si D étoit très-grand par rapport à a, cette expreſſion ſe réduiroit à $mc\left(\pm\frac{1}{4}D^{\frac{1}{2}}au(\sin\theta+\sin\Theta)+\frac{1}{64}au^2(\sin\theta^2-\sin\Theta^2)\right)$.

COROLLAIRE IV.

(669.) Si la partie antérieure du corps étoit égale & ſemblable

* On voit que la premiere partie de cette expreſſion ſuit la raiſon des ſimples viteſſes, & la ſeconde celle de leurs quarrés; les quantités θ, Θ, a, D & c demeurant les mêmes. Cette ſeconde partie eſt poſitive, lorſque $\sin\theta$ eſt plus grand que $\sin\Theta$, c'eſt-à-dire, lorſque la partie antérieure, ou choquante, du corps eſt plus aiguë que la partie poſtérieure, ou choquée; & elle ſera négative, ſi l'on a $\theta<\Theta$, ou ſi la partie antérieure du corps eſt moins aiguë que la partie poſtérieure. Ce cas a lieu le plus généralement dans les Vaiſſeaux, & eſt auſſi le plus convenable dans la pratique; comme on le verra par la ſuite. Ainſi, on ſe rappellera que la partie de la réſiſtance qui ſuit la raiſon du quarré des viteſſes, eſt négative.

Digitized by Google

à sa partie postérieure, nous aurions généralement $\vartheta = \Theta$, pour le petits quadrilateres correspondants; & l'expression de leurs résistances se réduiroit par conséquent à $\frac{1}{3} mcu \sin\theta \left((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right)$, ou à $\frac{1}{2} mcuD^{\frac{3}{2}} a \sin\theta \left(1 - \frac{a^2}{96D^2} - \frac{a^4}{2048D^4} - \&c.\right)$; expression qui, comme on voit, suit la raison des simples viteſſes.

COROLLAIRE V.

(670.) Si a étoit très-petit par rapport à D, cette expression deviendroit $= \frac{1}{2} mcu D^{\frac{1}{2}} a \sin\theta$.

SCOLIE.

(671.) Pour tenir compte de la dénivellation du Fluide, on calculera les forces qui agiſſent ſur les petits quadrilateres antérieurs, ou choquants, auxquels parvient l'élévation, ou l'intumeſcence, du même Fluide. On calculera de même celles que ne doivent point éprouver les quadrilateres poſtérieurs, ou choqués, à cauſe du creux, ou de la cavité, qui ſe forme à la partie poſtérieure, comme on l'a dit, *Art.* 594. Les unes & les autres doivent s'ajouter à la réſiſtance déterminée ci-deſſus : les premieres s'ajoutent, parce qu'elles agiſſent effectivement contre la direction du mouvement; & les ſecondes, parce qu'ayant été ſouſtraites dans le calcul précédent, il faut les ajouter de nouveau : les premieres ſont . . . . . $mc\left(Da - \frac{1}{6}u\sin\theta\left((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}u^2 a \sin\theta^2\right)$, & les ſecondes $mc\left(Da - \frac{1}{6}u\sin\Theta\left((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}} - (D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}u^2 a \sin\Theta^2\right)$.

COROLLAIRE VI.

(672.) Les dénivellations n'étant pas exceſſives, on peut ſuppoſer que tous les petits quadrilateres qui ſe trouvent ſur la même verticale, ſont choqués par le Fluide ſous le même angle θ, en ſuppoſant celui-ci tenir un milieu, entre tous les angles formés par les petites ſurfaces, avec la direction du mouvement. Dans ce cas, en réduiſant l'expreſſion de la force qui agit ſur un des petits quadrilateres à $mcda\left(a - \frac{1}{4}ua^{\frac{1}{2}}\sin\theta + \frac{1}{64}u^2\sin\theta^2\right)$, l'intégrale . . . . . $mc\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}ua^{\frac{3}{2}}\sin\theta + \frac{1}{64}u^2 a\sin\theta^2\right)$, exprimera la force qui agit ſur tous ceux qui ſont ſur une même verticale. Faiſant enſuite, dans cette expreſſion, $a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}u\sin\theta$, cette quantité ſe réduit à $\frac{mcu\sin\theta^4}{6.64^2}$, & par

Digitized by Google

conſéquent la réſiſtance horiſontale qui réſulte de la dénivellation ſera $= \frac{mu^4 f^2 \sin^4 \theta}{6.64^2}$.

COROLLAIRE VII.

(673.) La réſiſtance horiſontale qui provient de la dénivellation, ſera donc généralement, dans cette ſuppoſition, comme la quatrieme puiſſance de la viteſſe.

COROLLAIRE VIII.

(674.) La réſiſtance horiſontale qui agit ſur un corps quelconque, ſera donc auſſi, en général, comme trois quantités; une qui eſt comme les ſimples viteſſes, l'autre comme leurs quarrés, & la troiſieme comme leurs quatriemes puiſſances.

CHAPITRE VI.

Des Réſiſtances verticales qu'éprouvent les corps, lorſqu'ils ſe meuvent dans des Fluides; ou au contraire, lorſque ce ſont les Fluides qui ſe meuvent contre les corps qui ſont en repos.

PROPOSITION XLIV.

(675.) *TROUVER la réſiſtance verticale qu'éprouve un parallélipipede rectangle, lorſqu'il ſe trouve entiérement ſubmergé dans le Fluide, en ſuppoſant que dans ſon mouvement il conſerve toujours deux côtés paralleles à l'horiſon, & que le côté ſupérieur ſoit abaiſſé au-deſſous de la ſuperficie du Fluide, à une profondeur égale ou plus grande que* $\frac{u^2 \sin^2 \theta}{64 \sin \omega^2}$.

La force qu'éprouveront les deux côtés verticaux devient zéro, parce qu'on a pour eux $\cos \pi = 0$, ce qui rend l'expreſſion de l'*Art.* 616 $\frac{mb \cos^2 \pi}{\sin \pi} \left(Da \sin \omega^2 + \frac{1}{2} a^2 \sin \omega^2 \pm \frac{1}{6} \sin \omega . \sin \theta \left((D+a)^{\frac{1}{2}} - D^{\frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{64} a u^2 \sin \theta^2 \right) = 0$.

La force qui agit ſur les deux côtés horiſontaux eſt (618.) $= mbe \left(D^{\frac{1}{2}} \sin \omega \pm \frac{1}{8} u \sin \theta \right)^2$; expreſſion dans laquelle *be* marque l'aire, ou la ſurface des côtés, & *D* la diſtance verticale du côté à la ſuperficie du Fluide. Comme les deux côtés horiſontaux du parallélipipede ſont à des profondeurs différentes, la valeur de *D* n'eſt pas

Digitized by Google

la même pour les deux ; supposons que D soit la profondeur à laquelle est submergé le côté supérieur, & $D+a$ celle à laquelle est submergé l'inférieur, a marquant ainsi la hauteur du parallélipipede ; nous aurons $mbc((D+a)^{\frac{1}{2}} \sin\omega \pm \frac{1}{2} u \sin\theta)^2$, pour la force qui agit sur le côté inférieur ; & $mbc(D^{\frac{1}{2}} \sin\omega \pm \frac{1}{2} u \sin\theta)^2$ pour celle qui agit sur le supérieur. Soustrayant l'une de ces expressions de l'autre, la différence $mbc(\pm a \sin\omega^2 + \frac{1}{2} u((D+a)^{\frac{1}{2}} + D^{\frac{1}{2}}) \sin\omega . \sin\theta)$ exprimera la résistance verticale qu'éprouve le parallélipipede ; le signe + ayant lieu dans le cas où il se mouvera de haut en bas, & le signe — dans celui où il se mouvera vers le haut.

COROLLAIRE I.

(676.) Si c'est le parallélipipede qui se meut, & non le fluide, on aura $\sin\omega = 1$, & la résistance se réduira à . . . . . $mbc(\pm a + \frac{1}{2} u((D+a)^{\frac{1}{2}} + D^{\frac{1}{2}}) \sin\theta)$.

COROLLAIRE II.

(677.) Si, outre cette condition, on avoit $a = 0$, ou si le parallélipipede se réduisoit à un plan horisontal, la résistance verticale qu'éprouveroit ce plan, deviendroit $= \frac{1}{2} mbcu D^{\frac{1}{2}} \sin\theta$.

COROLLAIRE III.

(678.) La même chose arrivera, si D est très-grand à l'égard de a, de sorte qu'on puisse négliger cette quantité sans erreur sensible, comme il arrive dans les corps qui tombent dans l'air, près de la surface de la terre.

COROLLAIRE IV.

(679.) Si le mouvement est vertical, on aura $\sin\theta = 1$, & la résistance se réduira à $mbc(\pm a + \frac{1}{2} u((D+a)^{\frac{1}{2}} + D^{\frac{1}{2}})$.

COROLLAIRE V.

(680.) Si le mouvement est horisontal, on aura $\sin\theta = 0$: alors la résistance verticale sera $= mbca$; quantité qui exprime le poids d'un volume de Fluide égal à celui du parallélipipede.

COROLLAIRE VI.

(681.) La même chose arrivera encore, si le parallélipipede ne

Digitized by Google

se meut point, ou si l'on a $u=0$; car la résistance se réduit également à $mbea$.

COROLLAIRE VII.

(682.) La résistance sera $=0$, si, le mouvement se faisant vers le haut, on a $u=\frac{4a\,\sin\omega}{(D+a)^{\frac{1}{2}}+D^{\frac{1}{2}})\sin\theta}$; & elle sera négative, si l'on a $u<\frac{4a\,\sin\omega}{(D+a)^{\frac{1}{2}}+D^{\frac{1}{2}})\sin\theta}$. Dans le cas où c'est le parallélipipede qui qui se meut, & non le Fluide, la résistance sera $=0$, si l'on a $u=\frac{4a}{(D+a)^{\frac{1}{2}}+D^{\frac{1}{2}})\sin\theta}$; & elle sera négative, si $u<\frac{4a}{(D+a)^{\frac{1}{2}}+D^{\frac{1}{2}})\sin\theta}$.

COROLLAIRE VIII.

(683.) Si c'est le Fluide qui se meut, & non le parallélipipede, on aura $\sin\theta=\cos\omega$; & la résistance verticale se réduira à . . . . $mbe\,(\pm a\sin\omega^2+\frac{1}{2}u((D+a)^{\frac{1}{2}}+D^{\frac{1}{2}})\sin\omega.\cos\omega)$. On remarquera cependant que cette expression n'est légitime que lorsque la vitesse u est la même pour les deux surfaces supérieure & inférieure.

COROLLAIRE IX.

(684.) Comme ce cas exige que le parallélipipede soit entiérement submergé dans le Fluide, comme on l'a supposé dans l'énoncé de la Proposition, il est essentiel de remarquer que la formule ne peut s'étendre que jusqu'au cas dans lequel on a $D^{\frac{1}{2}}\sin\omega-\frac{1}{4}u\sin\theta=0$, lorsque le mouvement se fait de haut en bas; ou jusqu'à celui où l'on a $(D+a)^{\frac{1}{2}}\sin\omega-\frac{1}{4}u\sin\theta=0$, lorsque le mouvement se fait vers le haut. Dans le premier cas, la résistance sera $=\ldots\ldots$ $mbe\,(a\sin\omega^2+\frac{1}{2}u\left(\left(\frac{u^2\sin\theta^2}{64\sin\omega^2}+a\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{u\sin\theta}{8\sin\omega}\right)\sin\omega.\sin\theta)$; & dans le second, elle sera $=mbe\left(-a\sin\omega^2+\frac{1}{2}u\left(\left(\frac{u^2\sin\theta^2}{64\sin\omega^2}-a\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{u\sin\theta}{8\sin\omega}\right)\sin\omega\sin\theta\right)$; c'est-à-dire qu'en renfermant les deux cas dans une seule formule, la résistance sera $=mbe\left(\pm a\sin\omega^2+\frac{1}{2}u\left(\left(\frac{u^2\sin\theta^2}{64\sin\omega^2}\pm a\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{u\sin\theta}{8\sin\omega}\right)\sin\omega.\sin\theta\right)$.

COROLLAIRE X.

(685.) Si l'on suppose que le parallélipipede se réduise à un plan, afin d'avoir la même vitesse pour l'une & l'autre surface, ce qui donne $a=0$, la résistance sera $=\frac{1}{2}mbeu\left(\frac{u\sin\theta}{4\sin\omega}\right)\sin\omega\sin\theta=\frac{1}{64}mbeu^2\sin\theta^2$.

Digitized by Google

PROPOSITION XLV.

(686.) *Trouver la réſiſtance qu'éprouvera le même parallélipipede rectangle qui ſe meut, comme il a été dit dans la Propoſition précédente, lorſque ſa ſurface ſupérieure eſt hors du Fluide.*

Dans ce cas, la réſiſtance eſt égale à la force qui agit ſur la ſurface inférieure, laquelle force $= mbe(a^{\frac{1}{2}} \sin\omega \pm \frac{1}{3} u \sin\theta)^2$, a marquant la hauteur verticale, dont le parallélipipede eſt enfoncé dans le Fluide.

COROLLAIRE I.

(687.) Si c'eſt le parallélipipede qui ſe meut, & non le Fluide, on aura $\sin\omega = 1$, & la réſiſtance deviendra $= mbe(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{3} u \sin\theta)^2$.

COROLLAIRE II.

(688.) Si, de plus, le mouvement ſe fait verticalement, alors $\sin\theta = 1$, & la réſiſtance devient $= mbe(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{3} u)^2$.

COROLLAIRE III.

(689.) Si, dans le cas préſent, la viteſſe u étoit celle que pourroit acquérir le Fluide en tombant de la hauteur a, alors $\sqrt{a} = \frac{1}{8} u$: donc la réſiſtance ſera $= mbe(\frac{1}{8} u \pm \frac{1}{3} u)^2 = \frac{1}{64} mbeu^2 (1 \pm 1)^2$; ou $mbe(\sqrt{a} \pm \sqrt{a})^2 = mbea(1 \pm 1)^2$; c'eſt-à-dire que lorſque le mouvement ſe fait de haut en bas, la réſiſtance eſt $= 4mbea$; & dans le cas où il ſe fait vers le haut, elle eſt $= 0$.

COROLLAIRE IV.

(690.) Si le parallélipipede ne ſe meut pas du tout, alors $u = 0$, & la réſiſtance devient $= mbea$.

COROLLAIRE V.

(691.) Si le mouvement eſt horiſontal, alors $\sin\theta = 0$, & la réſiſtance devient pareillement $= mbea$.

COROLLAIRE VI.

(692.) Si c'eſt le Fluide qui ſe meut, & non le parallélipipede, on aura $\sin\theta = \cos\omega$; par conſéquent la réſiſtance ſe réduira à $mbe(a^{\frac{1}{2}} \sin\omega \pm \frac{1}{3} u \cos\omega)^2$.

Digitized by Google

PLANC. III.

COROLLAIRE VII.

(693.) Si, de plus, on avoit $\sin \omega = 0$, ou si le Fluide se mouvoit verticalement, la réſiſtance ſeroit $= \frac{1}{6} mbu^2 e$; ou $= mbea$; à cauſe que $\frac{1}{6} u^2 = a$.

CHAPITRE VII.

De la quantité dont les dénivellations du Fluide, cauſées par quelques ſurfaces, alterent la force, & par conſéquent les reſiſtances qu'éprouvent d'autres ſurfaces.

PROPOSITION XLVI.

(694.) *LA dénivellation d'un Fluide qui provient de l'action d'une ſurface quelconque, s'étend tout autour de cette ſurface, en formant une parabole égale & ſemblable.*

FIG. 64. Soit PF la dénivellation qui provient du mouvement d'une ſurface; CD étant la ſuperficie du Fluide, & FD la parabole qui le termine : il faut néceſſairement qu'il ſe forme une parabole CF égale & ſemblable à la premiere, de l'autre côté de PF. Car c'eſt de l'élévation FP, & de la gravité qu'elle communique à toutes les particules du Fluide, que ſe forme la parabole FD; & les particules en FC devant acquérir une gravité égale, il doit ſe former une autre parabole FC égale & ſemblable à la premiere. On peut faire le même raiſonnement pour tout le tour de la dénivellation PF : donc il doit ſe former une ſemblable parabole tout autour de cette dénivellation.

COROLLAIRE I.

(695.) Cette regle eſt générale, pour une ſurface quelconque, choquante ou choquée, verticale, inclinée, ou horiſontale.

COROLLAIRE II.

(696.) Si c'étoit le corps AG qui, par ſon mouvement, produiſit la dénivellation; & ſi ce corps eſt tel, que PG ſoit moindre que $PC = PD$: ce corps n'empêchera point que la dénivellation CGB n'ait lieu, quoique la dénivellation $BGPF$ ne paroiſſe pas, le corps en occupant la place.

COROLLAIRE III.

Digitized by Google

Corollaire III.

(697.) Les dénivellations doivent par conséquent produire des forces positives, ou négatives, qui agissent sur les autres surfaces qu'elles environnent, ou auxquelles elles atteignent, & modifier les forces dont ces surfaces éprouveroient l'action sans cette circonstance. Elles altéreront également la vîtesse avec laquelle le Fluide jailliroit par un orifice ouvert dans les mêmes surfaces.

Corollaire IV.

(698.) Si la surface est plane, on aura $PC = PD = u \sin \theta$ (597.), θ désignant l'angle que forme la surface avec la direction du mouvement.

Proposition XLVII.

(699.) *Trouver la vîtesse avec laquelle le Fluide jaillira par un orifice ouvert dans une surface, en ayant égard à l'effet que produit sur elle la dénivellation produite par une autre surface.*

La vîtesse que prend un Fluide qui sort par un orifice quelconque, a un certain rapport avec la hauteur de la dénivellation, dans la verticale du même orifice. Or $\frac{1}{2} u^2 \sin \theta^2$ étant la hauteur de la dénivellation, toutes les particules du Fluide, placées dans la même verticale, prennent la vîtesse $u \sin \theta$: donc, en général, si l'on connoît la hauteur de la dénivellation au-dessus d'un orifice, en la multipliant par 64, & extrayant la racine quarrée du produit, on aura la vîtesse que prendront les particules du Fluide, en vertu de la dénivellation (52 & 564.). Cette vîtesse étant ajoutée, ou soustraite de celle qui doit résulter de la hauteur de la superficie du Fluide au-dessus de l'orifice, on aura la vîtesse réelle avec laquelle le Fluide jaillira par cet orifice.

Proposition XLVIII.

(700.) *Trouver la force horisontale qui agit sur une surface plane choquante, qui est entiérement submergée dans le Fluide, en ayant égard à la dénivellation que produit une autre surface également choquante.*

Soit CL la surface choquante qui éprouve l'action de la force qu'on cherche ; CN celle qui cause la dénivellation ; OQ la superficie du Fluide ; $OANQ$ la dénivellation qui résulte du mouvement de la surface NC ; & $OFED$ celle qui résulte du mouvement de LC ; Fig. 851

Digitized by Google

cette derniere dénivellation étant supposée moindre que la premiere, à cause que l'angle formé par CN avec la direction du mouvement, est plus grand que celui formé par LC, avec la même direction. Soit, de plus, dans la verticale BCT, $BC=D$, $CG=x$, l'horisontale GH sera $=\frac{x\,cos.\,\Theta}{sin.\,\Theta}$, la verticale $HK=D+x$, & KI, la dénivellation correspondante au point H, $=\frac{1}{0,1}OK^2=\frac{1}{0,1}(BO-BK)^2=\frac{1}{0,1}\left(u\,sin.\,\Theta-\frac{x\,cos.\,\Theta}{sin.\,\Theta}\right)^2$; Θ exprimant l'angle que forme la direction du mouvement avec CN: ensorte que la viteſſe avec laquelle le Fluide jaillira par l'orifice fait en H, ſera $=8\,(D+x)^{\frac{1}{2}}+u\,sin.\,\Theta-\frac{x\,cos.\,\Theta}{sin.\,\Theta}$. La force horiſontale qui agit ſur une différencio-différencielle en H ſera donc $=m.dc.dx\left((D+x)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{8}\left(u\,sin.\,\Theta-\frac{x\,cos.\,\Theta}{sin.\,\Theta}\right)\right)^2$: ou la quantité c étant conſtante, la force qui agit ſur une différencielle ſera $=\ldots\ldots$ $mc.dx\left((D+x)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{8}\left(u\,sin.\,\Theta-\frac{x\,cos.\,\Theta}{sin.\,\Theta}\right)\right)^2$; quantité dont l'intégrale eſt eſt $=mc\left(Dx+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{16}u\left((D+x)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)sin.\,\Theta\right)+\ldots\ldots\ldots$ $mc\left(\frac{u^2x}{64}sin.^2\Theta-\left(\frac{1}{160}(D+x)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{96}D\,(D+x)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{256}D^{\frac{5}{2}}\right)\frac{cos.\,\Theta}{sin.\,\Theta}-\ldots\ldots\right.$ $\left.mc\left(\frac{ux^2\,sin.\,\Theta.cos.\,\Theta}{64\,sin.\,\Theta}-\frac{x^3\,cos.^2\Theta}{3.64\,sin.^2\Theta}\right)\right.$*. Cette intégrale exprimera la force horiſontale qui agit ſur la ſurface HC, en ſuppoſant que la droite où

---

* Il eſt très-aiſé de trouver cette intégrale; pour cela il ne faut que développer la quantité différencielle, en effectuant les opérations indiquées, & l'on aura $\ldots\ldots\ldots\ldots$ $mc\left(Ddx+xdx+\frac{1}{4}u\,sin.\,\Theta\,dx\,(D+x)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}\frac{cos.\,\Theta}{sin.\,\Theta}x\,dx\,(D+x)^{\frac{1}{2}}+\frac{u^2\,sin.^2\Theta}{64}dx-\ldots..\right.$ $\left.\frac{u\,sin.\,\Theta.cos.\,\Theta}{32\,sin.\,\Theta}xdx+\frac{cos.^2\Theta}{64\,sin.^2\Theta}x^2.dx\right)$: quantité qui s'integre comme une ſuite de monomes, excepté le quatrieme terme qui échappe à la regle fondamentale. L'intégrale eſt donc $mc\left(Dx+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{5}u(D+x)^{\frac{5}{2}}sin.\,\Theta\right)+mc\left(\int-\frac{1}{4}\frac{cos.\,\Theta}{sin.\,\Theta}x\,dx(D+x)^{\frac{1}{2}}\right)+\ldots\ldots\ldots$ $mc\left(\frac{u^2x}{64}sin.^2\Theta\right)-mc\left(\frac{ux^2sin.\,\Theta.cos.\,\Theta}{64\,sin.\,\Theta}-\frac{x^3\,cos.^2\Theta}{3.64\,sin.^2\Theta}\right)$. Ainſi, la difficulté, s'il y en avoit, ne pourroit tomber que ſur l'expreſſion $\int-\frac{1}{4}\frac{cos.\,\Theta}{sin.\,\Theta}x\,dx\,(D+x)^{\frac{1}{2}}$. Pour avoir cette intégrale, je fais $D+x=y$, & j'en tire $x=y-D$. Conſidérant que xdx vient, à un multiplicateur conſtant près, de la différenciation de x^2, je quarre cette équation, & j'ai $x^2=y^2-2Dy+D^2$, d'où je tire, en différenciant, & diviſant par 2, $xdx=ydx-Ddy$. Subſtituant cette quantité dans la différencielle, j'ai $-\frac{1}{4}\frac{cos.\,\Theta}{sin.\,\Theta}xdx(D+x)^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{4}\frac{cos.\,\Theta}{sin.\,\Theta}y^{\frac{3}{2}}dy+\frac{1}{4}\frac{cos.\,\Theta}{sin.\,\Theta}Dy^{\frac{1}{2}}dy$, dont l'intégrale eſt $=-\frac{1}{10}\frac{cos.\,\Theta}{sin.\,\Theta}y^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{6}\frac{cos.\,\Theta}{sin.\,\Theta}Dy^{\frac{3}{2}}$. Mettant donc pour y ſa valeur $D+x$, on a $\int-\frac{1}{4}\frac{cos.\,\Theta}{sin.\,\Theta}xdx(D+x)^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{10}\frac{cos.\,\Theta}{sin.\,\Theta}(D+x)^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{6}\frac{cos.\,\Theta}{sin.\,\Theta}D(D+x)^{\frac{3}{2}}$, (Voyez la qua-

Digitized by Google

les deux surfaces se rencontrent, c'est-à-dire, leur intersection C, soit horisontale. Si l'on fait maintenant $x = CT = \frac{RT\,fin\,\omega}{cof\,\omega} = \frac{FF\,fin\,\omega}{cof\,\omega} = \frac{u\,fin\,\omega}{cof\,\omega}(fin\,\Theta - fin\,\theta)$ *, θ exprimant l'angle que fait la direction du mouvement avec la ligne CL, EF étant l'espace dont une dénivellation s'étend sur l'autre, on aura la force horisontale qui agit sur la surface $CR = mc\big(\frac{Du\,fin\,\omega\,(fin\,\Theta - fin\,\theta)}{cof\,\omega} + \frac{u^2 fin\,\omega^2\,(fin\,\Theta - fin\,\theta)^2}{2\,cof\,\omega^2}\big) + \ldots$

$\frac{1}{6}mcu\,fin\,\Theta\big(\big(D + \frac{u\,fin\,\omega\,(fin\,\Theta - fin\,\theta)}{cof\,\omega}\big)^{\frac{1}{2}} - L^{\frac{1}{2}}\big) - \ldots\ldots\ldots$

$\frac{mc\,cof\,\omega}{10\,fin\,\omega}\big(D + \frac{u\,fin\,\omega\,(fin\,\Theta - fin\,\theta)}{cof\,\omega}\big)^{\frac{5}{2}} + \frac{mcD\,cof\,\omega}{6\,fin\,\omega}\big(D + \frac{u\,fin\,\omega}{cof\,\omega}(fin\,\Theta - fin\,\theta)\big)^{\frac{3}{2}} -$

$\frac{mc\,cof\,\omega}{15\,fin\,\omega}D^{\frac{5}{2}} + \frac{mcu^3\,(fin\,\Theta^3 - fin\,\theta^3)\,fin\,\omega}{3.6\,cof\,\omega^3}$.

COROLLAIRE I.

(701.) La force horisontale qui agira sur la surface CR, & qui résulte de la dénivellation produite par cette surface, est (611.) $= mc\big(Dx + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}u\big((D+x)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\big)\,fin\,\theta + \frac{1}{6}u^2x\,fin\,\theta^2\big) = \ldots\ldots$

$mc\big(\frac{Du\,fin\,\omega}{cof\,\omega}(fin\,\Theta - fin\,\theta) + \frac{u^2 fin\,\omega^2\,(fin\,\Theta - fin\,\theta)^2}{2\,cof\,\omega^2}\big) + \ldots\ldots\ldots$

$\frac{1}{6}mcu\,fin\,\theta\big(\big(D + \frac{u\,fin\,\omega}{cof\,\omega}(fin\,\Theta - fin\,\theta)\big)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\big) + \frac{mcu\,fin\,\omega^2\,fin\,\omega}{64\,cof\,\omega}(fin\,\Theta - fin\,\theta)$,

en mettant pour x sa valeur (700, *& la Note.*). Donc, en soustrayant cette valeur de la force trouvée ci-dessus, il restera l'excès de force horisontale que lui communique la dénivellation de l'autre surface; & cet excès est $= \frac{1}{6}mcu\big(fin\,\Theta - fin\,\theta\big)\big(D + \frac{u\,fin\,\omega}{cof\,\omega}(fin\,\Theta - fin\,\theta)\big)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\big) -$

---

trième partie du *Cours de Mathématiques* de M. Bezout, Art. 91.). Substituant maintenant cette quantité dans l'intégrale précédente, on aura l'intégrale complette $= \ldots\ldots\ldots$

$mc\big(Dx + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}u(D+x)^{\frac{3}{2}}\,fin\,\Theta\big) + mc\Big(\frac{u^2x}{64}\,fin\,\Theta^2 - \big(\frac{1}{10}(D+x)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6}D(D+x)^{\frac{3}{2}}\big)\frac{cof\,\omega}{fin\,\omega}\Big) -$

$mc\Big(\frac{ux^2\,fin\,\Theta.cof\,\omega}{64\,fin\,\omega} - \frac{x^3\,cof\,\omega^2}{3.64\,fin\,\omega^2}\Big) + H$; en désignant par H la quantité constante qui complette l'intégrale. Pour trouver la valeur de cette constante, je considere que l'intégrale représentant la résistance qu'éprouve la surface NCL, elle doit s'évanouir au point C; c'est-à-dire, lorsque $x = 0$; on aura donc $mc\big(\frac{1}{6}uD^{\frac{3}{2}}\big) + mc\big(\frac{1}{6}D(D^{\frac{3}{2}}) - \frac{1}{10}D^{\frac{5}{2}}\big)\frac{cof\,\omega}{fin\,\omega} + H = 0$; ce qui donne, en transposant & réduisant, $H = mc\big(-\frac{1}{6}uD^{\frac{3}{2}}\big) + mc\big(-\frac{1}{15}D^{\frac{5}{2}}\big)\frac{cof\,\omega}{fin\,\omega}$. Substituant donc cette valeur de H dans l'intégrale, on a l'expression même de l'Auteur.

* Car $BO = u\,fin\,\Theta$, & $BD = OM = u\,fin\,\theta$ (597.): donc $BO - OM = BM = EF = fin\,\Theta - fin\,\theta\big)$; & par conséquent $x = CT = \frac{EF.fin\,\omega}{cof\,\omega} = \frac{u\,fin\,\omega}{cof\,\omega}(fin\,\Theta - fin\,\theta)$.

Digitized by Google

$\frac{mc\,cof^{\alpha}}{fin^{\alpha}}\left(\frac{1}{10}\left(D+\frac{u\,fin^{\alpha}}{cof^{\alpha}}(fin\,\odot-fin\,\theta)\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}D\left(D+\frac{u\,fin^{\alpha}}{cof^{\alpha}}(fin\odot-fin\theta)\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{11}D^{\frac{5}{2}}\right)$
$+\frac{mcu^{3}fin^{\alpha}}{3.64\,cof^{\alpha}}(fin\,\odot-fin\,\theta)^{2}(fin\,\odot+2fin\,\theta).$

COROLLAIRE II.

(702.) La force horisontale qui agit sur toute la surface CL, en vertu de la dénivellation qu'elle produit elle seule, est (611.) $=mc\left(Da+\frac{1}{2}a^{2}+\frac{1}{6}u\,fin\,\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)+\frac{1}{6^{2}}u^{2}a\,fin\,\theta^{2}\right)$, a exprimant toute la hauteur sur la surface de la même surface : donc, en ajoutant cette quantité à l'excès de force horisontale que lui communique l'autre surface, toute la force horisontale qui agit sur la surface CL, sera $=mc\left(Da+\frac{1}{2}a^{2}+\frac{1}{6}u\,fin\,\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)+\frac{1}{6^{2}}u^{2}a\,fin\,\theta^{2}\right)+\ldots$

$\frac{1}{6}mcu\,(fin\,\odot-fin\,\theta)\left((D+\frac{u\,fin^{\alpha}}{cof^{\alpha}}(fin\,\odot-fin\,\theta)\right)^{\frac{1}{2}}-D^{\frac{1}{2}}\right)-\ldots\ldots$

$\frac{mc\,cof^{\alpha}}{fin^{\alpha}}\left(\frac{1}{10}\left(D+\frac{u\,fin^{\alpha}}{cof^{\alpha}}(fin\,\odot-fin\,\theta)\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}D\left(D+\frac{u\,fin^{\alpha}}{cof^{\alpha}}(fin\odot-fin\theta)\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{11}D^{\frac{5}{2}}\right)$
$+\frac{mcu^{3}fin^{\alpha}}{3.64\,cof^{\alpha}}(fin\,\odot-fin\,\theta)^{2}(fin\,\odot+2fin\,\theta).$

SCOLIE.

(703.) Après l'intégration, nous avons substitué $x=\frac{u\,fin^{\alpha}}{cof^{\alpha}}(fin\odot-fin\theta)$ afin d'avoir la force horisontale qui agit sur la surface CR, comprise entre les points C & R, ce dernier point correspondant à la verticale FR qui passe par F, extrêmité de l'espace auquel s'étend la plus grande élévation au-dessus de la moindre. Mais cela ne doit s'entendre que pour le cas où la verticale FR coupe la surface CL, dans un point comme R : si CL étoit moindre que CR, alors il ne faudroit substituer pour x que sa valeur légitime, laquelle seroit $k\,fin\,\alpha$, k marquant la longueur de la surface CL.

SCOLIE II.

(704.) Si BT est moindre que BC, ou si la surface CL tombe dans la partie qui est au-dessus de l'horisontale du point C, les quantités x, a & $fin\,\alpha$ seront négatives ; ainsi il faudra, dans ce cas, avoir attention de faire, dans les formules précédentes, les changements qu'exigent ces circonstances.

PROPOSITION XLIX.

(705.) *Trouver la force horisontale qui agit sur une surface plane*

Digitized by Google

choquée, qui est entièrement submergée dans le Fluide, en ayant égard à la dénivellation produite par une autre surface également choquée.

Cette proposition ne differe de la précédente, qu'en ce que KI, & par conséquent $\frac{x}{6}(u\sin\theta - \frac{x\cos\alpha}{\sin\alpha})$, est négative. Changeant donc les signes des produits correspondants, on aura la force horisontale qui agit sur la surface CR * = ...

$$mc\left(\frac{Du\sin\alpha}{\cos\alpha}(\sin\odot - \sin\theta) + \frac{u^2\sin\alpha^2}{2\cos\alpha^2}(\sin\odot - \sin\theta)^2\right) - \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{6}mcu\sin\odot\left(\left(D + \frac{u\sin\alpha}{\cos\alpha}(\sin\odot - \sin\theta)\right)^{\frac{1}{2}} - D^{\frac{1}{2}}\right) + \ldots\ldots$$

$$mc\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(\frac{1}{10}\left(D + \frac{u\sin\alpha}{\cos\alpha}(\sin\odot - \sin\theta)\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6}D\left(D + \frac{u\sin\alpha}{\cos\alpha}(\sin\odot - \sin\theta)\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{14}D^{\frac{7}{2}}\right)$$

$$+ \frac{mcu^3\sin\alpha}{3.64.\cos\alpha}(\sin\odot^3 - \sin\theta^3).$$

Corollaire I.

(706.) Par les mêmes raisons, l'excès de force horisontale que lui communiquera la dénivellation de l'autre surface, sera = . . .

$$mc\left(-\frac{1}{6}u(\sin\odot - \sin\theta)\left(D + \frac{u\sin\alpha}{\cos\alpha}(\sin\odot - \sin\theta)\right)^{\frac{1}{2}} - D^{\frac{1}{2}}\right) + \ldots\ldots$$

$$\frac{mc\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(\frac{1}{10}\left(D + \frac{u\sin\alpha}{\cos\alpha}(\sin\odot - \sin\theta)\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6}D\left(D + \frac{u\sin\alpha}{\cos\alpha}(\sin\odot - \sin\theta)\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{14}D^{\frac{7}{2}}\right)$$

$$+ \frac{mcu^3\sin\alpha}{3.64\cos\alpha}(\sin\odot - \sin\theta)^2(\sin\odot + 2\sin\theta).$$

Corollaire II.

(707.) Par la même raison, la force horisontale qui agira sur la surface CL, sera $= mc\left(Da + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}u\sin\theta\left((D+a)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}u^2a\sin\theta^2\right) -$

$$\frac{1}{6}mcu(\sin\odot - \sin\theta)\left(\left(D + \frac{u\sin\alpha}{\cos\alpha}(\sin\odot - \sin\theta)\right)^{\frac{1}{2}} - D^{\frac{1}{2}}\right) + \ldots\ldots$$

$$\frac{mc\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(\frac{1}{10}\left(D + \frac{u\sin\alpha}{\cos\alpha}(\sin\odot - \sin\theta)\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6}D\left(D + \frac{u\sin\alpha}{\cos\alpha}(\sin\odot - \sin\theta)\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{14}D^{\frac{7}{2}}\right)$$

$$+ \frac{mcu^3\sin\alpha}{3.64\cos\alpha}(\sin\odot - \sin\theta)^2(\sin\odot + 2\sin\theta).$$

Proposition L.

(708.) *Trouver la force horisontale qui agit sur une surface plane choquée, qui est entièrement submergée dans le Fluide, en ayant égard à la dénivellation que produit une autre surface plane choquante.*

La viteſſe avec laquelle le Fluide jaillira par l'orifice H, & qui réſulte de la dénivellation que produit la ſurface choquante NC, eſt, par ce qui a été dit, *Art.* 700, $= 8(D+x)^{\frac{1}{2}} + u\sin\odot - \frac{x\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

* Pour plus de facilité dans ce changement de ſignes, *Voyez* la premiere note de l'*Art.* 700.

Digitized by Google

mais en supposant maintenant que la surface CL est choquée, ou qu'elle fuit le Fluide avec la vitesse $u \sin \theta$, le Fluide aura cette vitesse de moins, & il en sortira moins par l'orihce H. La vitesse effective du même Fluide sera donc = ... $8(D+x)^{\frac{1}{2}} + u(\sin\odot - \sin\theta) - \frac{x \cos.^n}{\sin.^n}$; expression qui ne differe de la premiere qu'en ce que $\sin\odot - \sin\theta$ y tient la place qu'occupe $\sin\odot$ seul dans la premiere. Ce problême se résoudra donc, en substituant, dans l'expression donnée, *Art.* 700, $\sin\odot - \sin\theta$ en place de $\sin\odot$ seul, & la force horisontale qui agit sur la surface CR, sera = $mc\big(Dx + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}u(\sin\odot - \sin\theta)\big((D+x)^{\frac{1}{2}} - D^{\frac{1}{2}}\big) + \frac{1}{64}u^2x(\sin\odot - \sin\theta)^2\big) - \frac{mc\cos.^n}{\sin.^n}\big(\frac{1}{10}(D+x)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{10}D(D+x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{11}D^{\frac{1}{2}}\big) - mc\big(\frac{ux^2\cos.^n}{64\sin.^n}(\sin\odot - \sin\theta) - \frac{x^3\cos.^n}{3.64\sin.^n}\big)$.

Substituant maintenant la valeur de $x = CT = \frac{RT\sin.^n}{\cos.^n} = \frac{BO\sin.^n}{\cos.^n} = \frac{u\sin.^n\sin\odot}{\cos.^n}$, pour le cas où CL est = ou > CR, la force horisontale qui agit sur la surface CR, sera = ... $mc\big(\frac{Du\sin.^n\sin\odot}{\cos.^n} + \frac{u^2\sin.^{2n}\sin\odot^2}{2\cos.^{2n}} + \frac{1}{6}u(\sin\odot - \sin\theta)\big((D+\frac{u\sin.^n\sin\odot}{\cos.^n})^{\frac{1}{2}} - D^{\frac{1}{2}}\big)\big) - \frac{mc\cos.^n}{\sin.^n}\big(\frac{1}{10}(D+\frac{u\sin.^n\sin\odot}{\cos.^n})^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}D\big(D+\frac{u\sin.^n\sin\odot}{\cos.^n}\big)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{11}D^{\frac{1}{2}}\big) + \ldots - \frac{mcu^3\sin.^n((\sin\odot - \sin\theta)^3 - \sin\theta^3)}{3.64.\cos.^n}$.

COROLLAIRE I.

(709.) La force horisontale qui agit sur la surface CR, & qui résulte de la dénivellation que cette surface produit, est (611.) = $mc\big(\frac{Du\sin.^n\sin\odot}{\cos.^n} + \frac{u^2\sin.^{2n}\sin\odot^2}{2\cos.^{2n}} - \frac{1}{6}u\sin\theta\big((D+\frac{u\sin.^n\sin\odot}{\cos.^n})^{\frac{1}{2}} - D^{\frac{1}{2}}\big)\big) + \ldots - mc\frac{u^3\sin.^n\sin\odot.\sin\theta^2}{64\cos.^n}$: donc, en soustrayant cette valeur de la force trouvée ci-dessus, il restera la force horisontale que lui communique la dénivellation de l'autre surface, laquelle sera = $mc\big(\frac{1}{6}u\sin\odot\big((D+\frac{u\sin.^n\sin\odot}{\cos.^n})^{\frac{1}{2}} - D^{\frac{1}{2}}\big)\big) - \frac{mc\cos.^n}{\sin.^n}\big(\frac{1}{10}\big(D+\frac{u\sin.^n\sin\odot}{\cos.^n}\big)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}D\big(D+\frac{u\sin.^n\sin\odot}{\cos.^n}\big)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{11}L^{\frac{1}{2}}\big) + \ldots - \frac{mcu^3\sin.^n.\sin\odot^2(\sin\odot - \sin\theta)}{3.64\cos.^n}$.

COROLLAIRE II.

(710.) La force horisontale qui agit sur toute la surface CL, & qui résulte de la dénivellation qu'elle produit elle seule, est (611.) = $mc\big(Da + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}u\sin\theta\big((D+a)^{\frac{1}{2}} - D^{\frac{1}{2}}\big) + \frac{1}{64}u^2a\sin\theta^2\big)$, a exprimant

toute la hauteur verticale de la même surface : donc, en ajoutant cette quantité à celle que lui communique l'autre surface, la force horisontale entiere qui agit sur cette surface CL, sera = ... PLANC. III.

$$mc\left(Da+\tfrac{1}{2}a^2-\tfrac{1}{6}u\sin\vartheta\left((D+a)^{\frac{3}{2}}-D^{\frac{3}{2}}\right)+\tfrac{1}{64}u^2a\sin\theta^2\right)+\ldots\ldots$$

$$\tfrac{1}{2}mcu\sin\odot\left(\left(D+\frac{u\sin\eta\sin\odot}{\cos\eta}\right)^{\frac{1}{2}}-L^{\frac{1}{2}}\right)-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{mc\cos\eta}{\sin\eta}\left(\tfrac{1}{10}\left(D+\frac{u\sin\eta\sin\odot}{\cos\eta}\right)^{\frac{5}{2}}-\tfrac{1}{6}D\left(D+\frac{u\sin\eta\sin\odot}{\cos\eta}\right)^{\frac{3}{2}}+\tfrac{1}{15}D^{\frac{5}{2}}\right)+\ldots\ldots$$

$$\frac{mcu^2\sin\eta\sin\odot^2}{3.64.\cos\eta}(\sin\odot-3\sin\vartheta).$$

SCOLIE I.

(711.) Après l'intégration, nous avons substitué, à la place de x, la quantité $\frac{u\sin\eta\sin\odot}{\cos\eta}$, pour le cas où RC est = ou < CL ; mais si RC étoit > CL, il faudroit substituer pour x sa valeur légitime, qui sera $k\sin\eta$; k marquant la longueur de CL.

SCOLIE II.

(712.) Si BT étoit moindre que BC, ou si la surface CL tomboit au-dessus de l'horisontale du point C, les quantités x, a & $\sin\eta$ seroient négatives ; par conséquent les signes correspondants doivent être changés dans les formules. On peut se représenter ce cas, en imaginant la surface choquée étendue jusqu'à sortir du Fluide, comme si au lieu de la position CL, elle avoit la position CV. FIG. 68.

SCOLIE III.

(713.) Lorsque la surface choquée s'étend jusqu'au dehors du Fluide, il se présente deux cas très-distincts ; un lorsqu'elle coupe la droite OR plus bas que le point O, lequel a déjà été résolu dans la *Proposition* précédente & ses *Corollaires* : l'autre cas est celui où cette surface coupe la droite OB, & la dénivellation OA. On résoudra ce cas dans le *Corollaire* suivant.

SCOLIE IV.

(714) La quantité $\frac{x\cos\eta}{\sin\eta}$ qui entre dans l'expression . . . . . $8(D\pm x)^{\frac{1}{2}}+u\sin\odot-\frac{x\cos\eta}{\sin\eta}$ de la vitesse, est zéro, non-seulement lorsque $\sin\eta=1$, mais encore lorsque $\cos\eta$ est négatif, ou que la surface choquée tombe entre AC & NC, parce qu'entre ces deux lignes la dénivellation qui est terminée par la ligne AN parallele

Digitized by Google

à la superficie OQ, est constante, étant toujours $=\frac{1}{64}u^2 \sin\Theta^2$; de sorte que le second terme de la quantité $\frac{1}{64}(u\sin\Theta - \frac{x\cos n}{\sin n})^2$, laquelle donnoit auparavant la valeur de KI, s'évanouit.

COROLLAIRE III.

(715.) Quand la surface choquée s'étend jusqu'au dehors du Fluide, & qu'elle coupe la dénivellation OA, la viteſſe du Fluide dans le point le plus élevé, ou dans le point même M où la surface sort du Fluide, est $=0$; c'est-à-dire que $8(D\pm x)^{\frac{1}{2}} + u(\sin\Theta - \sin\theta) - \frac{x\cos n}{\sin n} = 0$, laquelle équation donne $x =$ . . . . . $\frac{u\sin n}{\cos n}(\sin\Theta - \sin\theta) \pm \frac{64\sin n^2}{2\cos n^2} \pm \frac{8\sin n}{\cos n}\left(D \pm \frac{u\sin n}{\cos n}(\sin\Theta - \sin\theta) + \frac{64\sin n^2}{4\cos n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$; c'est la valeur qu'on doit substituer pour x, après avoir intégré.

COROLLAIRE IV.

(716.) Si l'on avoit $\sin n = -1$, il resteroit $x = D - \frac{1}{64}u^2(\sin\Theta - \sin\theta)^2$; & la même chose aura lieu pour tous les cas où la surface choquée tombe entre AC & NC, sur AC, ou sur NC.

COROLLAIRE V.

(717.) La même surface tombant sur CN, c'est-à-dire, les deux surfaces, choquante & choquée, se réduisant à une seule surface, on a $\sin\Theta = \sin\theta$: donc, pour ce cas, on a $x = D$: ce qui montre que le Fluide se terminera à la surface OQ, demeurant parfaitement de niveau, & sans laisser la moindre cavité derrière la surface choquée.

COROLLAIRE VI.

(718.) Pour l'un quelconque des cas, dans lesquels la surface choquée tombe entre AC & NC, $\cos n$ devant s'évanouir, la force horisontale qui agit sur elle, devient = ... $mc\left(-Dx + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}u(\sin\Theta - \sin\theta)\left((D+x)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{1}{64}u^2x(\sin\Theta - \sin\theta)^2\right)$.

COROLLAIRE VII.

(719.) Si les deux surfaces, choquante & choquée, se réduisent à une seule, on vient de voir qu'on aura $x = D$, & $\sin\Theta = \sin\theta$: donc en substituant ces valeurs, on aura la force qui agit sur la surface choquée $= -\frac{1}{2}mcD^2$, le signe négatif exprimant que la force agit dans une direction opposée à celle de la force choquante.

COROLLAIRE VIII.

Digitized by Google

Corollaire VIII.

(720.) Si x étoit négligeable à l'égard de D, la force horisontale qui agiroit sur la surface choquée, seroit = ... $mc\left(-Dx+\frac{1}{2}u(\sin\Theta-\sin\theta)D^2x-\frac{1}{6}u^2x(\sin\Theta-\sin\theta)^2\right)$; expression qui devient $=-mcDx$, lorsque $\sin\Theta=\sin\theta$.

Proposition LI.

(721.) *Trouver les forces horisontales qui agissent sur une surface choquante, ou choquée, en ayant égard à la dénivellation produite par une autre surface, lorsque ces deux surfaces sont séparées par quelque distance.* Fig. 67.

Supposons que NC soit une surface choquante, qui produise la dénivellation AO. Supposons aussi qu'en C il y ait une autre surface CG unie à la premiere, & à celle-ci une troisieme surface GH, unie avec elle en G : il est question de trouver la force qui agit sur cette surface, en ayant égard à la dénivellation AO. Considérant que cette force dépend de la hauteur de la dénivellation, & que la hauteur qui correspond au point G est FB, & non AE que nous avons employée ci-dessus; il est visible qu'il ne s'agit ici que de substituer BF en place de AE, & le problême sera résolu. AE est égal à $\frac{1}{6}\overline{OE}^2=\frac{1}{6}u^2\sin\Theta^2$, & $BF=\frac{1}{6}\overline{OF}^2=\frac{1}{6}(OE-EF)^2$: donc il n'y aura qu'à substituer $(OE-EF)^2$ en place de $\overline{OE}^2$, ou $OE-EF$ en place de OE; c'est-à-dire, $u\sin\Theta-EF$ en place de $u\sin\Theta$ seul, pour que les formules précédentes correspondent au cas présent. La même chose aura lieu, quoique ce soit la surface NC qui soit choquée, parce qu'on peut appliquer le même raisonnement à un cas quelconque. Si la distance horisontale EF comprise entre les deux verticales AC, BG est $=q$, nous n'aurons qu'à substituer $u\sin\Theta-q$, en place de $u\sin\Theta$ seul.

Corollaire I.

(722.) La distance horisontale q étant $=u\sin\Theta$, ou égale à toute l'amplitude de la dénivellation EO, on aura $u\sin\Theta-q=0$; & par conséquent la dénivellation ne communiquera aucune force qui agisse sur la surface.

Corollaire II.

(723.) Comme la même chose a lieu, lorsqu'on a $EF>EO=u\sin\Theta$, ou $q\geq EO=u\sin\Theta$, il s'ensuit que pour le cas où

Digitized by Google

q eſt $=$ ou $> EO = u \sin \odot$, on doit ſubſtituer dans les formules, q à la place de $u \sin \odot$.

COROLLAIRE III.

(724.) Comme les quantités qui expriment la force que communique la dénivellation produite par l'autre ſurface, ſont toutes affectées de la quantité $u(\sin \odot - \sin \theta)$, quand il ſera queſtion de la combinaiſon de ſurfaces choquantes ou choquées entre elles, & qu'il faudra ſubſtituer $u \sin \odot - q$ en place de $u \sin \odot$ ſeul, toutes les quantités ſeront affectées par $u(\sin \odot - \sin \theta) - q$: donc ſi l'on avoit $u \sin \odot = u \sin \theta + q$, il n'y auroit, dans ces cas, aucune force communicante.

COROLLAIRE IV.

(725.) Comme la différence entre les angles $\odot$ & θ eſt très-petite dans les courbes, lorſque les différencielles ſont peu éloignées, & comme dans celles où la diſtance augmente, il eſt néceſſaire de ſouſtraire de la différence des ſinus de ces angles la quantité $\frac{q}{u}$: il s'enſuit que, dans les courbes, on peut négliger la force que les parties de ſurface ſe communiquent les unes aux autres, ce qui ſimplifiera les calculs, & les rendra plus faciles.

PROPOSITION LII.

(726.) *Trouver la réſiſtance horiſontale qu'éprouve un parallélipipede rectangle qui flotte ſur un Fluide, deux de ſes côtés étant paralleles à l'horiſon, en ſuppoſant que c'eſt le parallélipipede qui ſe meut, & non le Fluide, ſuivant une direction parallele à deux de ſes autres côtés, dans le cas où l'on auroit* $a = ou > \frac{1}{64} u^2 \sin \theta^2$, *& en ayant égard à la force que la dénivellation produite par la ſurface choquante, communique à la ſurface choquée.*

Puiſque, dans ce cas, $\sin n = 1$, on aura (708.) la force qui agit ſur la ſurface choquée $= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $mc\left(Dx + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}u(\sin \odot - \sin \theta)\left((D+x)^{\frac{1}{2}} - D^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{64}u^2 x(\sin \odot - \sin \theta)^2\right)$; expreſſion dans laquelle on doit faire x négative, & (716.) $= \ldots$ $D - \frac{1}{64}u^2(\sin \odot - \sin \theta)^2$. Subſtituant maintenant $u \sin \odot - q$ pour $u \sin \odot$, q marquant la longueur du parallélipipede, & obſervant que, dans le cas préſent, $\sin \odot = \sin \theta$, la force deviendra $= -mc\left(Dx - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}q\left((D+x)^{\frac{3}{2}} - D^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{64}q^2 x\right)$, & la valeur de $x =$

Digitized by Google

$D-\frac{1}{6.4}q^2$. Substituant cette valeur de x dans l'expression de la force, elle deviendra $= mc\left(\frac{1}{3}D^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}qD^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{64}q^2D^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{6.64^2}q^3\right)$, ou en faisant à présent $D=a$, qui est toute la profondeur à laquelle l'une & l'autre extrêmité du parallélipipede est enfoncée au-dessous de la surface du Fluide, la force qui agit sur la surface choquée, sera $=$ $=mc\left(\frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}qa^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{64}q^2a^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{6.64^2}q^3\right)$. Celle qui agit sur la superficie choquante, le Fluide étant supposé ne pas passer par-dessus, est (600.) $= mc\left(\frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{8}ua^{\frac{1}{2}}\sin\theta+\frac{1}{64}u^2a\sin\theta^2+\frac{u^4\sin\theta^4}{6.64^2}\right)$: donc la résistance qu'éprouvera le parallélipipede, sera $=$ . . . . . $mc\left(\frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}(u\sin\theta+q)+\frac{1}{64}a(u^2\sin\theta^2-q^2)+\frac{1}{6.64^2}(u^4\sin\theta^4+q^4)\right)$.

Corollaire I.

(727.) Si la longueur du parallélipipede étoit égale, ou plus grande que $u\sin\theta$, on substitueroit $u\sin\theta$ au lieu de q, & la résistance qu'il éprouveroit seroit $= mc\left(\frac{1}{3}uc^{\frac{3}{2}}\sin\theta+\frac{1}{3.64^2}u^4\sin\theta^4\right)$; c'est la même que nous avons trouvée, *Art.* 640.

Corollaire II.

(728.) Si l'on avoit $q=0$; c'est-à-dire, si le parallélipipede se réduisoit à un plan, la résistance qu'il éprouveroit, se réduiroit à $mc\left(\frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}u\sin\theta+\frac{1}{64}au^2\sin\theta^2+\frac{1}{6.64^2}u^4\sin\theta^4\right)$.

Corollaire III.

(729.) La résistance qu'éprouvera le parallélipipede (727.) sera plus grande que celle qu'éprouvera le plan de la quantité . . . $mc\left(\frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}u\sin\theta-\frac{1}{64}au^2\sin\theta^2+\frac{1}{6.64^2}u^4\sin\theta^4\right)$.

Corollaire IV.

(730.) La résistance qu'éprouve le parallélipipede, sera donc double de celle du plan, moins la quantité $\frac{1}{32}mcau^2\sin\theta^2$; ou la résistance qu'éprouve le plan est la moitié de celle qu'éprouve le parallélipipede, plus la quantité $\frac{1}{64}mcau^2\sin\theta^2$.

Corollaire V.

(731.) Si la vitesse u étoit fort petite, on pourroit négliger le

Digitized by Google

terme $\frac{1}{144}mcau^2 \sin\theta^2$, comme très-petit à l'égard du premier terme $\frac{1}{6}mca^{\frac{1}{2}}u \sin\theta$, & dans ce cas, la réſiſtance du plan ſe trouveroit préciſément égale à la moitié de celle du parallélipipede.

COROLLAIRE VI.

(732.) Si le parallélipipede eſt tellement enfoncé dans le Fluide, que a ſoit négligeable à l'égard de D, la force qu'éprouvera la ſurface choquée, ſera (720.) $= mcDa$; & celle qui agit ſur la ſurface choquante étant en ce cas $= mc\,(Da + \frac{1}{2}au\,D^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}au^2)$, la réſiſtance qu'éprouvera le parallélipipede deviendra $= \frac{1}{4}mcau\,(D^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{12}u)$; ou $= \frac{1}{4}mcau\,D^{\frac{1}{2}}$, ſi u eſt fort petit à l'égard de D; réſiſtance qui eſt la moitié de celle qu'il éprouve, en faiſant abſtraction de la dénivellation (654.).

COROLLAIRE VII.

(733.) La réſiſtance qu'éprouve un parallélipipede dont la hauteur & la largeur ſont égales, eſt (654.) $= \frac{1}{4}ma^2uD^{\frac{1}{2}}$, lorſqu'on n'a point égard à la dénivellation, & lorſqu'on peut négliger a par rapport à D. La réſiſtance qu'éprouve une ſphere eſt (664.) $= \frac{1}{10}a^2mcuD^{\frac{1}{2}}$. Ces deux réſiſtances ſont donc entre elles comme 1 eſt à $\frac{2}{5}c$: mais la réſiſtance du même parallélipipede, en ayant égard à la dénivellation, eſt $= ma^2u\,(D^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{12}u)$, celle qu'éprouve la ſphere ſera donc dans les mêmes circonſtances, $= \frac{1}{10}mca^2u(D^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{12}u)$.

SCOLIE I.

(734.) C'eſt d'après ce qui eſt démontré dans le *Corollaire V*, (731.), que, dans le calcul appliqué aux expériences rapportées dans le *Scolie* de la *Propoſition XXXVI*, *Art.* 644, on a pris, pour la réſiſtance que devoit éprouver la planche, la moitié de la réſiſtance qui a lieu pour un parallélipipede.

SCOLIE II.

(735.) On peut trouver de la même maniere la réſiſtance qu'éprouvent les autres corps terminés par des ſurfaces rectilignes, en ayant égard à la dénivellation qui altere les forces; mais ce que nous avons dit ſuffit d'autant plus pour notre objet, que nous nous réduirons à la conſidérations des ſurfaces courbes, dans leſquelles cette attention devient ſuperflue.

Digitized by Google

CHAPITRE VIII.

Des dimensions & de la figure que doivent avoir les lignes & les surfaces, pour qu'étant mues dans un Fluide, elles éprouvent la plus grande ou la moindre résistance.

Lemme II.

(736.) *Trouver la ligne, ou la surface, qui jouisse d'une certaine propriété dans le plus haut, ou le plus bas, degré; ou celle qui, entre différentes lignes, ou surfaces, qui jouissent d'une certaine propriété dans un degré égal, jouisse aussi d'une autre propriété distincte dans le plus haut, ou le plus bas, degré.*

Ayant divisé la ligne, ou la surface, en différencielles, on peut exprimer par une quantité différencielle la propriété dont chacune d'elles doit jouir; & comme on demande la plus grande, ou plus petite, la différencielle de cette quantité doit être constante : car, dans ce cas, l'expression d'une différencielle ne peut augmenter, qu'une autre ne diminue d'autant, cette condition étant essentielle, & absolument nécessaire, pour que la propriété dont il s'agit ne puisse être ni plus grande ni plus petite. Qu'on différencie donc la quantité, ou l'expression différencielle, qui exprime la propriété, en la divisant par la quantité commune qui multipliera tous les termes, on égalera le quotient à une quantité constante. Cette équation étant réduite, sera celle de la ligne, ou de la surface, qui jouira de la propriété en question dans le plus haut, ou le plus bas, degré.

Dans le cas où il s'agit de trouver une ligne, ou une surface, qui jouisse d'une certaine propriété dans le plus haut, ou le plus bas, degré, sans cesser de jouir d'une autre propriété qu'elle auroit déjà dans le même degré, les différencielles des deux quantités différencielles qui expriment les propriétés, doivent, dans ce cas, être égales entre elles, attendu que l'une ne doit point augmenter au préjudice de l'autre. Cette équation étant réduite, sera celle de la ligne, ou de la surface, qui jouira de la propriété dont il s'agit, dans le degré le plus haut, ou le plus bas, sans avoir rien perdu de celle dont elle jouissoit auparavant dans le même degré.

Digitized by Google

PROPOSITION LIII.

(737.) *Une surface plane verticale étant donnée de grandeur, & étant supposée se mouvoir horisontalement dans un Fluide immobile, trouver la figure qu'elle doit avoir pour éprouver la plus grande, ou la moindre, résistance.*

Soit x les abscisses mesurées verticalement depuis la superficie du Fluide, & y les ordonnées horisontales, dont la relation avec les abscisses exprime l'équation de la ligne qui termine la surface. D'après cela on voit que ydx sera une différencielle horisontale de la même surface, laquelle doit être constante, par la condition du problême. La résistance qu'éprouvera la même différencielle sera (654.) $= \frac{1}{3}muyx^{\frac{1}{2}}dxu\,sin\,\theta$: donc, suivant le *Lemme* précédent (736.), nous devons égaler la différencielle de cette quantité à celle de ydx; mais cette derniere expression étant constante, nous pouvons substituer q à sa place, & nous aurons $\frac{1}{3}mqu\,sin\,\theta\frac{dx}{2\sqrt{x}} = 0 = \frac{mqu\,sin\,\theta}{4y\sqrt{x}}$. Donc pour que la surface éprouve la plus grande, ou la plus petite, résistance, il faut que x ou y soit infinie, & par conséquent que y, ou x, soit zéro. La surface devra donc être d'une extension horisontale infinie, & d'une profondeur infiniment petite, pour qu'elle éprouve la moindre résistance possible.

COROLLAIRE.

(738.) Si la dimension de la surface dans le sens horisontal est déterminée, de façon qu'on ne puisse nullement l'excéder, la surface qui éprouvera la moindre résistance, sera celle d'un rectangle qui se meut, ayant deux de ses côtés paralleles à l'horison.

PROPOSITION LIV.

(739.) *Déterminer les dimensions que doit avoir la même surface verticale, ou le rectangle qui doit éprouver la plus grande, ou la moindre, résistance possible; dans le cas où l'on a égard à la dénivellation.*

La résistance qu'éprouve le rectangle, en ayant égard à la dénivellation, est (640 & 658.) $= \frac{1}{3}muy\,sin\,\theta\left(x^3 + \frac{u^3 sin\,\theta^3}{64^3}\right)$; & comme on demande que cette résistance soit la moindre possible, sa différencielle sera égale à zéro; c'est-à-dire que . . . . . $\frac{1}{3}muyx^{\frac{1}{2}}dx\,sin\,\theta + \frac{1}{3}mux^{\frac{3}{2}}dy\,sin\,\theta + \frac{mu^4dy\,sin\,\theta^4}{3.64^3} = 0$; mais, puisque

Digitized by Google

l'aire du rectangle doit être constante, on a $xy = q^2$, q exprimant une constante : donc $xdy + ydx = 0$, ou $dx = -\frac{xdy}{y}$. Cette valeur étant substituée dans l'équation précédente, donne, après avoir divisé par $mudy \sin\theta$, $-\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}} + \frac{u^3 \sin^3\theta}{3.64^2} = 0$, ou $\frac{2u^3 \sin^3\theta}{64^2} = x^{\frac{1}{2}}$; d'où l'on tire $x = \frac{u^6 \sin^6\theta (4)^{\frac{1}{3}}}{16^2}$, & $y = \frac{16^2 q^2}{u^6 \sin^6\theta (4)^{\frac{1}{3}}}$. Telles sont les dimensions que doit avoir le rectangle pour éprouver la moindre résistance possible.

Corollaire I.

(740.) Les dimensions du rectangle dépendent donc, non-seulement de la vitesse u avec laquelle il se meut, mais encore de l'angle θ sous lequel le Fluide le frappe. Plus l'une quelconque de ces deux quantités sera grande, plus doit être grande la profondeur x, ou la dimension verticale du rectangle, & plus la largeur y, ou la dimension dans le sens horisontal, doit être petite. Ce sera le contraire lorsque ces quantités diminueront.

Corollaire II.

(741.) La largeur infinie y que nous avons déterminée (737.) ne convient donc au rectangle, que dans le cas où l'on négligeroit la dénivellation, ou lorsqu'on auroit $u \sin\theta = 0$.

Corollaire III.

(742.) Si l'on substitue la valeur de $x = \frac{u^6 \sin^6\theta (4)^{\frac{1}{3}}}{16^2}$, & celle de $y = \frac{16^2 q^2}{u^6 \sin^6\theta (4)^{\frac{1}{3}}}$ dans l'expression $\frac{1}{3} mu y \sin\theta \left(x^{\frac{1}{2}} + \frac{u^3 \sin^3\theta}{64^2}\right)$ de la résistance qu'éprouve le rectangle, on aura la moindre résistance que l'aire rectangulaire puisse éprouver $= \frac{mq^2 u^4 \sin^6\theta}{16(4)^{\frac{1}{3}}}$.

Corollaire IV.

(743.) Ce qui a été dit dans les deux *Propositions* précédentes & leurs *Corollaires*, convient également à un parallélipipede rectangle, qui flotte ayant sa base parallele à l'horison, lorsqu'on n'a point égard à l'effet que la dénivellation produit sur sa base.

Proposition LV.

(744.) *Trouver la ligne qui doit terminer un plan horisontal, pour*

Digitized by Google

PLANC. IV. *qu'étant mu horiſontalement dans un Fluide, il éprouve la plus grande, ou la moindre réſiſtance poſſible.*

FIG. 68. Soit ABC le plan horiſontal compoſé de deux moitiés égales & ſemblables, ſéparées l'une de l'autre par la ligne, ou axe BD, dans la direction duquel ſe fait le mouvement. Soit pris auſſi les abſciſſes x ſur BD, & les ordonnées y ſur ſes perpendiculaires. Soit ſuppoſé de plus, que le plan ait une épaiſſeur infiniment petite da, & que cette épaiſſeur forme par-tout un angle droit avec l'horiſon, on aura la force qu'éprouvera une différencielle de AB, ou $BC = mdady\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{udy}{8\sqrt{dx^2+dy^2}}\right)^2$, attendu que $\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$ exprime ici le ſinus de l'angle ſous lequel la différencielle rencontre le Fluide, & a la profondeur à laquelle le plan ſe trouve abaiſſé au-deſſous de la ſuperficie du Fluide. La différencielle de cette expreſſion eſt . . .

$$mdaddy\left(a \pm \frac{a^{\frac{1}{2}}udv}{2\sqrt{dx^2+dy^2}} \mp \frac{a^{\frac{1}{2}}udy^3}{4(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$mdaddy\left(\frac{3u^2dy^2}{64\cdot(dx^2+dy^2)} - \frac{2u^2dy^4}{64(dx^2+dy^2)^2}\right),$$ en ſuppoſant dx conſtante. Diviſant maintenant par $mdaddy$, & faiſant $-dy = \frac{bd\zeta}{\zeta}$, ζ exprimant une variable, ou une indéterminée quelconque, & b une conſtante, on aura (736.) $a \mp \frac{a^{\frac{1}{2}}ub}{2\sqrt{b^2+\zeta^2}} \pm \frac{a^{\frac{1}{2}}ub}{4\sqrt{(b^2+\zeta^2)^3}} + \frac{3u^2b^2}{64(b^2+\zeta^2)} - \frac{2u^2b^4}{64(b^2+\zeta^2)^2} = n$, n exprimant une autre conſtante. Connoiſſant donc a & u, on déterminera ζ par cette équation, par conſéquent cette quantité era conſtante dans toute la ligne ABC, & dans l'équation $-dy = \frac{bdx}{\zeta}$. On aura donc, en intégrant, $b - y = \frac{bx}{\zeta}$, équation à la ligne droite; donc les lignes AB, BC, qui terminent le plan, ou qui couvrent la baſe AC doivent être droites.

COROLLAIRE I.

(745.) Ayant ſuppoſé $-dy = \frac{bdx}{\zeta}$, ou que les ordonnées diminuent, tandis que les abſciſſes augmentent, il s'enſuit que l'origine des abſciſſes ſe trouvera en D.

COROLLAIRE II.

(746.) Faiſant $x = 0$, on a $b - y = 0$, ou $y = b$. Donc la demi-ordonnée DC correſpondante à l'abſciſſe $x = 0$, ſera $= b$.

COROLLAIRE III.

Digitized by Google

Corollaire III.

(747.) Pour déterminer le point B, dans lequel les droites AB ou CB coupent l'axe DB, nous n'avons qu'à supposer $y=0$; ce qui donnera, pour ce point, $b=\frac{bx}{\zeta}$, & par conséquent $x=DB=\zeta$.

Corollaire IV.

(748.) Comme la quantité $\zeta=DB$ dépend de l'équation ... $n\mp\frac{a^{\frac{1}{2}}\zeta^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{b^2+\zeta^2}}\pm\frac{a^{\frac{1}{2}}\zeta^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{(b^2+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}}+\frac{3u^{\frac{1}{2}}\zeta^{\frac{1}{2}}}{64(b^2+\zeta^2)}-\frac{2u^{\frac{1}{2}}\zeta^{\frac{3}{2}}}{64(b^2+\zeta^2)^2}=n$, on voit que sans faire varier les quantités a & u, on trouveroit autant de valeurs différentes de cette quantité, qu'on substitueroit de quantités différentes pour n: il s'ensuit donc que même, sans faire varier ni a ni u, il y a une infinité de lignes droites différentes qui satisfont à la question.

Corollaire V.

(749.) La force qu'éprouvera l'une quelconque de ces lignes droites, comme CB, qui couvrent la demi-ordonnée CD, sera $=mda.b\left(a^{\frac{1}{2}}+\frac{bu}{8(b^2+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$: d'où l'on voit que, u étant positif, la force sera d'autant plus petite que $\zeta=DB$ sera plus grande, & au contraire: c'est une connoissance que nous avions déjà par anticipation.

Corollaire VI.

(750.) Si u est négatif, plus ζ sera grand, plus la force le sera; & au contraire.

Corollaire VII.

(751.) Si l'on prolonge l'axe BD jusqu'en K, & si l'on termine le plan par les quatre droites AB, BC, CK, KA, la force qui agira sur ABC sera $=2bmda\left(a^{\frac{1}{2}}+\frac{bu}{8(b^2+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$; & celle qui agira sur CKA sera $=2bmda\left(a^{\frac{1}{2}}-\frac{bu}{8(b^2+Z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$, DB étant $=\zeta$, & $DK=Z$: donc la résistance sera $=2bmda\left(\left(a^{\frac{1}{2}}+\frac{bu}{8(b^2+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2-\left(a^{\frac{1}{2}}-\frac{bu}{8(b^2+Z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2\right)$; & par conséquent plus les axes DB & DK seront grands, plus la résistance sera petite.

Scolie.

(752.) De la solution de ce Problême & de ses Corollaires, nous déduisons seulement que les lignes AB, CB doivent être droites

pour qu'elles éprouvent la plus grande, ou la plus petite réſiſtance, & que cette réſiſtance devient toujours de plus en plus petite, à meſure que le point B s'éloigne. Ce point peut cependant être donné, ou déterminé, ou, ce qui revient au même, la longueur du plan peut être déterminée, comme ſi elle devoit ſe réduire à DE. Il paroît évident que, dans ce cas, le plan doit ſe terminer par les droites AE, CE; & c'eſt ce qui arrive auſſi dans quelques cas: mais dans d'autres il y a moins de réſiſtance, lorſque la terminaiſon eſt faite par trois lignes droites AG, GF, & FC, la ſeconde étant parallele à la baſe AC, ou perpendiculaire à l'axe, & AG étant $= CF$, de même que $GE = EF$; c'eſt ce qu'on va démontrer dans le Problême ſuivant.

PROPOSITION LVI.

(753.) *Etant donnés la demi-baſe* DC, *& l'axe, ou longueur* DE *du plan horiſontal, avec la parallele* EF *à la baſe; trouver le point* F, *par lequel tirant la ligne* CF, *on termine le plan* DEFC, *de maniere que ce plan, étant mu horiſontalement, ſuivant la direction de l'axe* DE, *éprouve la plus grande, ou la moindre reſiſtance.*

Ayant tiré FH parallele à l'axe, & faiſant $DE = x$, & $EF = DH = y$; la force qui agit ſur EF ſera $= mda.y(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{4}u)^2$; & celle qui agit ſur FC ſera $= mda(b-y)\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{u(b-v)}{8(x^2+(b-y)^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$; & les deux expreſſions reunies $= mda\left(ab \pm \frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}uy + \frac{1}{64}u^2y \pm \frac{a^{\frac{1}{2}}u(b-v)^2}{4(x^2+(b-y)^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{u^2(b-v)^3}{64(x^2+(b-y)^2)}\right)$. Cette quantité devant être ou un *maximum*, ou un *minimum*, ſa différencielle ſera $= 0$; on aura donc . . . . . .

$$mda\left(\pm\tfrac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}udy + \tfrac{1}{64}u^2dy \mp \frac{2a^{\frac{1}{2}}u(b-y)dy}{4(x^2+(b-y)^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \pm \ldots\ldots\ldots$$

$$mda\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}u(b-y)^3dy}{4(x^2+(b-y)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3u^2(b-y)^2dy}{64(x^2+(b-y)^2)} + \frac{2u^2(b-y)^4dy}{64(x^2+(b-y)^2)^2}\right) = 0\,*;$$

d'où l'on tire, en diviſant par $\frac{1}{4}adymda$, & en ſubſtituant t pour $b-y$,

---

* On remarquera dans ce calcul, 1°. que $\sin\theta = \frac{(b-y)}{(x^2+(b-y)^2)^{\frac{1}{2}}}$; car $\sin\theta = \sin HFC$, & dans le triangle rectangle HFC, on a $FC : 1 :: HC : \sin HFC = \frac{HC}{FC}$: or $HC = CD - EF = b-y$, & $CF = (HF^2+HC^2)^{\frac{1}{2}} = (x^2+(b-y)^2)^{\frac{1}{2}}$; donc $\sin HFC$, ou $\sin\theta = \frac{b-y}{(x^2+(b-y)^2)^{\frac{1}{2}}}$. 2°. Que dans la différenciation on ſuppoſe x conſtante, comme cela doit être, *Art.* 752.

Digitized by Google

$\pm a^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{16}u \mp \frac{2a^{\frac{5}{2}}x^2t + a^{\frac{5}{2}}t^3}{(x^2t+t^3)^{\frac{1}{2}}} - \frac{3ux^2t^2+ut^4}{16(x^2+t^2)^2} = 0$, ou . . . . . .

$\pm 16a^{\frac{5}{2}}(x^2+t^2) \mp 16a^{\frac{1}{2}}(2x^2t+t^3)\sqrt{(x^2+t^2)} + ux^2(x^2-t^2) = 0$; expreſſion qui donnera, en reduiſant & ordonnant, ...

$$\left.\begin{array}{l} 16^2a\ t^6 + 2.16^2ax^2t^4 \ldots * \ldots - 16^2a\ x^6 \\ \pm 32a^{\frac{5}{2}}ut^6 \pm 32a^{\frac{1}{2}}ux^2t^4 \mp 32a^{\frac{3}{2}}ux^4t^2 \mp 32a^{\frac{5}{2}}u\ x^6 \\ \quad - u^2x^2t^4 + 2u^2x^4t^2 - u^2x^6 \end{array}\right\} = 0$$; équation du troiſieme degré, qui contient une racine, ou valeur de t^2, réelle & poſitive ; c'eſt cette valeur qui ſatisfait à la queſtion *.

Corollaire I.

(754.) Si l'on fait, dans cette équation, $t = 0$, il en réſulte $-x^6(16a^{\frac{1}{2}} \pm u)^2$, quantité négative ; & ſi l'on fait $t = x$, il en réſulte 2.16^2ax^6, quantité poſitive : donc t eſt moindre que x, toutes les fois que a a quelque valeur, ou que le plan eſt ſubmergé à quelque profondeur dans le Fluide. Si l'on avoit $a = 0$, ou ſi le plan coïncidoit avec la ſuperficie du Fluide, on auroit $t = x$: de ſorte que la plus grande valeur de l'angle HFC ſera alors de 45°, & cet angle diminue à meſure que le plan doit être ſubmergé à une plus grande profondeur.

Corollaire II.

(755.) Ayant $a = \infty$, l'équation ſe change en celle-ci . . . . $t^6 + 2x^2t^4 - x^6 = 0$, ou $t^6 + 2x^2t^4 = x^6$, qui, en ajoutant de part & d'autre x^4t^2, & diviſant par t^2+x^2, devient $t^4+x^2t^2 = x^4$. Cette équation étant réſolue, donne $t = x\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}}$; expreſſion de la moindre valeur de t ; & dans ce cas, l'angle HFC eſt, à fort peu près, de 37° 57' **.

Corollaire III.

(756.) La valeur de t varie également, en faiſant varier la viteſſe u. Le cas dans lequel $u = \infty$, correſpond à celui où $a = 0$, & l'on a, dans ces deux cas, $t = x$. Lorſque $u = 0$, ce qui correſpond au cas où $a = \infty$, l'on a, comme ci-deſſus, $t = x\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}}$.

---

* Ceci eſt évident, puiſque le dernier terme $(16^2a \pm 32a^{\frac{1}{2}}u + u^2) - x^6$, ou $-x^6(16a^{\frac{1}{2}} \pm u)^2$ eſt négatif. (Voyez la *Troiſieme Partie* du *Cours de Mathématiques* de M. *Bezout*, *Art.* 201.)

** On trouve dans l'original 31° 44', mais il eſt évident que c'eſt une faute de calcul ; car $\frac{1}{2}\sqrt{5} = 1,118$, & $\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}} = 0,78$. Donc $t = x\ (0,78)$; c'eſt-à-dire que ſi $x = 100$, t ſera $= 78$. Faiſant la proportion $HF : HC :: 1 : tang\ HFC$, ou $x : t :: 1 : tang\ \theta$, on trouve $\theta = 37° 57'$. On voit par-là que t eſt à peu près $= \frac{4}{5}x$.

Digitized by Google

COROLLAIRE IV.

(757.) Comme t eſt plus petit que x, la quantité $\ldots\ldots \pm 32a^{\frac{1}{2}}ut^6 + x^2t^4 - x^4t^2 - x^6$) ſera négative pour la partie choquante $AGFC$ du plan, & elle ſera poſitive pour la partie choquée $AOLC$; donc la valeur de t correſpondante à la premiere, & $= CH$, ſera plus grande que la valeur de t correſpondante à la ſeconde, & qui eſt $= CM$; de ſorte que, ſuppoſant $DE = DN$, on doit avoir $GF < OL$, pour que le plan éprouve la moindre réſiſtance.

COROLLAIRE V.

(758.) Le point F tombera ſur l'axe DB toutes les fois que la valeur de t, déduite de l'équation, ſera égale à la demi-baſe CD; & dans ce cas, le demi-plan ſe réduira à un triangle. Mais ſi la valeur de t étoit plus grande que la demi-baſe, le point F tomberoit de l'autre côté de l'axe ſur EG, & la ligne CF couperoit l'axe entre D & E. Dans ce cas, ſi l'on termine le plan par une droite tirée depuis C juſqu'à E, on aura la Figure ſuſceptible de la moindre réſiſtance.

COROLLAIRE VI.

(759.) Les lignes EF & NL ſeront donc nulles dans tous ces cas, & le demi-plan ſe réduira à un triangle, comme AEC, ou AKC. Tous les cas de cette eſpece ſe préſentent, quelles que ſoient les valeurs de a & de u, lorſque DC eſt égale, ou moindre que $ED\sqrt{-\frac{1}{2} + \sqrt{5}}$, ou lorſque DC eſt à peu près égale, ou moindre que $\frac{1}{7}ED$ (755. *Note.*).

COROLLAIRE VII.

(760.) Puiſque les deux lignes CF, FE ſont celles qui éprouvent la moindre réſiſtance, elles en éprouveront donc une moindre que deux autres lignes CQ, QE; & celles-ci une moindre que deux autres, l'une deſquelles ſeroit plus éloignée de CF. C'eſt une conſéquence néceſſaire de ce que toutes les racines de l'équation d'où l'on tire la valeur de t ſont imaginaires, excepté celle qui donne la poſition de CF.

COROLLAIRE VIII.

(761.) Si entre les deux paralleles DC, EF, on prend un point

Digitized by Google

quelconque comme I, & que de ce point on tire aux points C & E deux lignes droites CI & IE, ces droites éprouveront une plus grande réſiſtance que celle qu'éprouvent les droites CF, FE. Car la ligne CI étant prolongée juſqu'en Q, il eſt clair, par le *Corollaire* précédent, que la réſiſtance qu'éprouveront les lignes IQ & QE, ſera moindre que celle qu'éprouvera IE, & par conſéquent CQ & QE éprouveront moins de réſiſtance que CI & IE : donc à plus forte raiſon CF & FE, qui éprouvent moins de réſiſtance que CQ & QE, en éprouveront beaucoup moins que CI & IE.

Corollaire IX.

(762.) De-là on conclut encore qu'avec quelques lignes qu'on termine le plan, qu'elles ſoient droites, courbes ou mixtes, pourvu que ces lignes ſoient compriſes entre les deux paralleles EF, DC qui terminent le plan, elles éprouveront toujours une réſiſtance plus grande que les deux lignes CF & FE.

Corollaire X.

(763.) Plus la longueur du plan, ou de l'axe DE, ſera grande, plus la réſiſtance qu'il éprouvera ſera petite; car FR & RS éprouvent une moindre réſiſtance que FE : donc CR & RS en éprouvent auſſi une moindre que CF & FE.

Corollaire XI.

(764.) Un corps compoſé de deux priſmes triangulaires ABC, AKC, dans lequel BD & DK ſont plus grandes que $\frac{1}{4}DC$, étant mu ſuivant la direction de l'axe horiſontal KB, de façon que les côtés $AB=BC$, & $CK=KA$, ſoient verticaux, éprouvera une moindre réſiſtance que s'il étoit terminé par quelque ſurface courbe que ce ſoit : car on vient de voir, par la *Propoſition* précédente, qu'une ſection quelconque horiſontale, terminée par les droites AB, BC, CK & KA, éprouvera moins de réſiſtance que ſi elle étoit terminée par d'autres lignes, quelles qu'elles fuſſent.

Corollaire XII.

(765.) On doit entendre la même choſe d'un autre priſme quelconque, quoique ſes côtés AB, BC, CK & KA ne ſoient pas verticaux, pourvu que les ſections, ou différencielles horiſontales, forment un angle conſtant avec l'horiſon : car, en ce cas, la force

Digitized by Google

qu'éprouvera une différencielle quelconque, ſera exprimée par $mbda\left(a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{ub\,\sin n}{8(b^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}$; b exprimant la moitié de la largeur du priſme; & l'angle n que forme la différencielle horiſontale du corps avec l'horiſon étant conſtant : il eſt par conſéquent évident que les réſultats qu'a donné la ſolution du Problême, ne peuvent changer, que ce Problême contient également le cas dont il s'agit ici, & qu'il n'eſt queſtion que de ſubſtituer $u \sin n$ à la place de u (584 & 586.).

PROPOSITION LVII.

(766.) *Connoiſſant la longueur* BK *du plan horiſontal, ainſi que ſa largeur* AC, *on demande* BD, *ou le point* D, *où l'on doit placer cette largeur, pour qu'en formant les deux triangles iſocelles,* ABC, CKA *qui terminent le plan, ce plan éprouve la plus grande, ou la moindre réſiſtance poſſible, étant mu horiſontalement dans la direction de l'axe* BK.

Faiſant $BK = c$, $DC = b$, & $BD = x$, la force qui agit ſur BC ſera (753.) $= mda\left(ab + \frac{a^{\frac{1}{2}}ub^2}{4(x^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{u^2b^3}{64(x^2+b^2)}\right)$; & celle qui agit ſur CK ſera $= mda\left(ab - \frac{a^{\frac{1}{2}}ub^2}{4((c-x)^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{u^2b^3}{64((c-x)^2+b^2)}\right)$. La réſiſtance qui réſulte de ces deux forces ſera donc $=$ . . . . . $mda\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}ub^2}{4(x^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{u^2b^3}{64(x^2+b^2)} + \frac{a^{\frac{1}{2}}ub^2}{4((c-x)^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{u^2b^3}{64((c-x)^2+b^2)}\right)$; or cette réſiſtance devant être la plus grande, ou la plus petite, ſa différencielle ſera $= 0$. Donc $mda\left(-\frac{a^{\frac{1}{2}}ub^2xdx}{4(x^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2u^2b^3xdx}{64(x^2+b^2)^2}\right) +$ $mda\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}ub^2(c-x)dx}{4((c-x)^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2u^2b^3(c-x)dx}{64((c-x)^2+b^2)^2}\right) = 0$. Diviſant cette expreſſion par $\frac{1}{2}mda.ub^2dx$, & tranſpoſant, on aura . . . . . $\frac{a^{\frac{1}{2}}(c-x)}{((c-x)^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{ub(c-x)}{8((c-x)^2+b^2)^2} = \frac{a^{\frac{1}{2}}x}{(x^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{ubx}{8(x^2+b^2)^2}$. En réſolvant cette équation, on en déduira la valeur de $x = BD$, & cela pour toutes les différentes valeurs qu'on peut donner aux quantités a & u.

COROLLAIRE I.

(767.) L'équation ne réſout pas le cas dans lequel $a = 0$, ou $\frac{a}{u} = 0$, parce qu'il en réſulteroit $-\frac{ub(c-x)}{8((c-x)^2+b^2)^2} = \frac{ubx}{8(x^2+b^2)^2}$; ce qui eſt impoſſible.

Digitized by Google

Corollaire II.

(768.) Au contraire, si l'on avoit $\frac{u}{a} = 0$, l'équation deviendroit $\frac{a^{\frac{1}{2}}(e-x)}{((e-x)^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}x}{(x^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}$: ce qui donne $x = \frac{1}{2}e$; c'est la valeur de x qui produit la moindre résistance.

Corollaire III.

(769.) A mesure que le rapport $\frac{u}{a}$ augmente, la valeur de x, pour produire la moindre résistance, augmente aussi, mais cependant sans jamais parvenir à être $= e$; puisque, dans ce cas, l'équation deviendroit $0 = \frac{a^{\frac{1}{2}}e}{(e^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{ube}{8(e^2+b^2)^2}$; ce qui est impossible.

Corollaire IV.

(770.) Au contraire, la valeur de x qui produit la plus grande résistance, est moindre que $\frac{1}{2}e$; & l'on a $x = 0$, lorsque $a^{\frac{1}{2}} = \frac{ub}{8(e^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}$.

Proposition LVIII.

(771.) *Soit un corps* ABFA *terminé par deux bases horisontales triangulaires & semblables* ABC, DEF, *rectangles en* A & D, *& par les trois autres plans* ABED, CBEF, & ACFD, *l'un desquels* ABED *est vertical. Soit supposé que ce corps se meuve horisontalement dans un Fluide, & dans la direction de ce même plan vertical* ABED; *on propose de trouver la relation entre la profondeur* AD, *& la largeur* DF *de la base, pour que, le volume du corps étant constant, ce corps éprouve la moindre résistance possible.* Fig. 69.

Supposons que *GHI* soit une section, ou différencielle horisontale du corps, laquelle par conséquent sera un triangle semblable aux bases : soit prolongé *GH*, & tiré la verticale *CK*, qui sera parallele à *AG*, & faisons $AB = e$, $AC = b$, $AG = CK = a$, & $HK = z$. D'après cela on aura $GH = b - z$; le sinus de $GIH = ABC = \frac{b}{(b^2+e^2)^{\frac{1}{2}}}$; & la force qui agira sur la différencielle horisontale (584 & 586.) $= mda(b-z)\left(a^{\frac{1}{2}} + \frac{ubS}{8(b^2+e^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$; S exprimant le sinus de l'angle qui forme le plan *CBEF* avec le plan horisontal *GHI*. Mais on a $S = \frac{a^{\frac{1}{2}}(b^2+e^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2(b^2+e^2)+e^2b^2)^{\frac{1}{2}}}$ * : donc la force qui agit

* Voici le procédé qu'il faut suivre pour trouver cette valeur de S. Soit mené par la ligne

Digitized by Google

sur la différencielle $= mda\,(b-\zeta)\left(a^{\frac{1}{2}}+\frac{uba\,(b^2+e^2)^{\frac{1}{2}}}{8(a^2(b^2+e^2)+e^2\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2 = mada\,(b-\zeta)\left(1+\frac{ub^{\frac{1}{2}}}{8(a^2(b^2+e^2)+e^2\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$.

Pareillement, les deux triangles ABC, GIH étant semblables, on aura $b:e::b-\zeta:GI=\frac{e(b-\zeta)}{b}$: donc l'aire du triangle $GIH=\frac{e(b-\zeta)^2}{2b}$; & l'espace qu'occupe la différencielle horisontale $=\frac{eda\,(b-\zeta)^2}{2b}$. Cet espace devant être constant par la condition du problême, on aura $\frac{eda\,(b-\zeta)^2}{2b}=q^3$, & par conséquent $da=\frac{2bq^3}{e(b-\zeta)^2}$, q exprimant une constante. Substituant maintenant cette valeur de da dans l'expression de la force, elle se changera en $\frac{2mbaq^3}{e(b-\zeta)}\left(1+\frac{uba^{\frac{1}{2}}}{8(a^2(b^2+e^2)+e^2\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$. Pour parvenir à la résolution du problême, nous n'avons qu'à égaler la différencielle de cette force à celle de l'espace q^3 ; mais cette derniere étant $=0$, la premiere le sera aussi, & nous aurons par conséquent $-\frac{d\zeta}{(b-\zeta)^2}-\frac{2ubae^2\zeta d\zeta}{8(b-\zeta)^2(a^2(b^2+e^2)+e^2\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{2ubae^2\zeta d\zeta}{8(b-\zeta)(a^2(b^2+e^2)+e^2\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{u^2b^2ad\zeta}{64(b-\zeta)^2(a^2(b^2+e^2)+e^2\zeta^2)}-\frac{2u^2b^2ae^2\zeta d\zeta}{64(b-\zeta)(a^2(b^2+e^2)+e^2\zeta^2)^2}=0$ * ; or cette équa-

---

CK le plan vertical *CRK*, perpendiculaire au plan *CBEF*, lequel coupera ce dernier dans la ligne *CR*, & le plan horisontal *GHI* dans la ligne *KR*. Dans le triangle rectangle *BAC*, on a $BC=(b^2+e^2)^{\frac{1}{2}}$, & par conséquent *sin* $ACB=sin\,GHI=sin\,RHK=\frac{e}{(b^2+e^2)^{\frac{1}{2}}}$. Dans le triangle *HRK* rectangle en *R*, on a $RK=HK\,sin\,RHK=\frac{e\zeta}{(b^2+e^2)^{\frac{1}{2}}}$; & dans le triangle *CRK* rectangle en *K*, on a $CR=(CK^2+KR^2)^{\frac{1}{2}}=\left(a^2+\frac{e^2\zeta^2}{b^2+e^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{(a^2(b^2+e^2)+e^2\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}{(b^2+e^2)^{\frac{1}{2}}}$. Ceci posé, on trouvera le *sin CRK*, ou S, par cette proportion, $CR:1::CK:sin\,CRK$, ce qui donne *sin CRK*, ou $S=\frac{CK}{CR}=\frac{a(b^2+e^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2(b^2+e^2)+e^2\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}$.

* Ce passage présente une difficulté qui pourroit embarrasser quelques lecteurs, la voici. La différencielle de $\frac{2mbaq^3}{e(b-\zeta)}\left(1+\frac{uba^{\frac{1}{2}}}{8(a^2(b^2+e^2)+e^2\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$, ou en divisant par la quantité constante $\frac{2mbaq^3}{e}$, la différencielle de $\frac{1}{b-\zeta}\left(1+\frac{uba^{\frac{1}{2}}}{8(a^2(b^2+e^2)+e^2\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$, doit être égalée à zéro. Or, d'après les regles générales du calcul, cette différencielle, égalée à zéro, est incontestablement $\frac{d\zeta}{(b-\zeta)^2}+\frac{2ubae^2\zeta d\zeta}{8(b+\zeta)(a^2(b^2+e^2)+e^2\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{u^2b^2ad\zeta}{64(b-\zeta)^2(a^2(b^2+e^2)+e^2\zeta^2)}+\frac{2ubae^2\zeta d\zeta}{8(b-\zeta)(a^2(b^2+e^2)+e^2\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{2u^2b^2ae^2\zeta d\zeta}{64(b-\zeta)(a^2(b^2+e^2)+e^2\zeta^2)^2}=0$ Divisant ensuite, comme le

tion

tion se divise exactement par $-\frac{d\zeta}{b-\zeta}$: ainsi elle devient . . .

$$\frac{x}{(b-\zeta)} + \frac{2ub\alpha^{\frac{1}{2}}}{8(b-\zeta)(\alpha^2(b^2+e^2)+e^2\zeta^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2ub\alpha^{\frac{1}{2}}\cdot 2\zeta}{8(\alpha^2(b^2+e^2)+e^2\zeta^2)^{\frac{1}{2}}} + \ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{u^2b^2\alpha}{64(b-\zeta)(\alpha^2(b^2+e^2)+e^2\zeta^2)} + \frac{2u^2b^2\cdot 2\zeta}{64(\alpha^2(b^2+e^2)+e^2\zeta^2)^2}.$$

Comme en prenant ζ positivement, ou de K vers H, elle ne peut jamais parvenir à être plus grande que b, tous les termes de cette équation sont positifs, & par conséquent on n'en peut tirer aucune valeur pour ζ. Ainsi il nous reste seulement à faire usage de celle qui résulte de la quantité $-\frac{d\zeta}{b-\zeta}$, par laquelle on a divisé la premiere équation. Cette quantité égalée à zéro, en supposant ζ négative, donne $\zeta = -\infty$; c'est-à-dire que la base GH de la différencielle horisontale doit être infinie, pour qu'elle éprouve la moindre résistance possible ; & par conséquent tout le corps entier doit se réduire à un plan horisontal de la même étendue, pour qu'il éprouve la moindre résistance possible.

Corollaire I.

(772.) Un double prisme $AFCHA$, dont les deux bases hori- Fig. 70.

---

veut l'Auteur, par $\frac{-d\zeta}{b-\zeta}$, on aura $\frac{x}{b-\zeta} - \frac{2ub\alpha^{\frac{1}{2}}}{8(b-\zeta)(\alpha^2(b^2+e^2)+e^2\zeta^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{u^2b^2\alpha}{64(b-\zeta)(\alpha^2(b^2+e^2)+e^2\zeta^2)} +$
$\frac{2ub\alpha^{\frac{1}{2}}e^2\zeta}{8(\alpha^2(b^2+e^2)+e^2\zeta^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2u^2b^2\alpha e^2\zeta}{64(\alpha^2(b^2+e^2)+e^2\zeta^2)^2} = 0$. Cette équation est fort différente de celle de l'Auteur, & tous ses termes ne sont point positifs, soit qu'on prenne ζ positivement, soit même qu'on le prenne négativement. Si l'équation donnée par l'Auteur ne pouvoit avoir lieu, il est clair que les conséquences qu'il en tire, tant dans la *Proposition* que dans ses *Corollaires*, tomberoient d'elles-mêmes ; mais nous croyons que c'est avec raison que l'Auteur a modifié les regles générales du calcul différenciel, parce que la nature de la question l'exige. La différencielle qu'il donne, diffère de celle qu'on trouve directement par le calcul, en ce qu'il a pris pour la différencielle du facteur $\frac{1}{b-\zeta}$, la quantité $\frac{-d\zeta}{(b-\zeta)^2}$; au lieu que le calcul donne $\frac{d\zeta}{(b-\zeta)^2}$, & c'est cette différence qui en produit dans les signes des trois premiers termes de la différencielle. Or cette modification est indiquée par la nature de la question. En effet, AG étant $= a$, hauteur de la surface supérieure au-dessus de la section, ou différencielle, GHI, à mesure que u diminuera, HK ou ζ diminuera : par conséquent $d\zeta$ est l'expression du décrément de la quantité ζ, lequel est égal à l'incrément de $GH = b-\zeta$, qui est celui qu'on doit considérer. Comme la partie variable de cette quantité est négative, ou est exprimée par $-\zeta$, son décrément devra être pris positivement, ainsi pour $d(-\zeta)$ il faudra écrire $d\zeta$. Au reste, on fera attention que la Figure suppose la base inférieure du corps plus petite que la supérieure : si on l'avoit supposée plus grande, ce qui eût été conforme à la conséquence de la *Proposition*, alors le point H ayant tombé de l'autre côté de K, par rapport à G, on auroit eu $GH = b+\zeta$, & la difficulté qui résulte des signes n'auroit plus eu lieu.

ſontales ſont égales, & dont les arrêtes *AE*, *BF*, *CG* & *DH* ſont verticales, éprouvera donc moins de réſiſtance qu'aucun autre priſme qui lui ſeroit égal, & dont la baſe inférieure *EFGH* ſeroit moindre que la ſupérieure *ABCD*.

COROLLAIRE II.

(773.) Ce qu'on vient de dire des priſmes doit s'entendre de même de tout autre corps, dont les baſes, ou ſections horiſontales, ne ſeroient pas des triangles, mais des plans terminés par une courbe quelconque comme *ABC*. Car la différencielle horiſontale étant diviſée en différents petits quadrilateres ſenſiblement plans, on démontrera la même choſe pour chacun en particulier, & par conſéquent pour le tout, ou pour toute la différencielle horiſontale, ainſi que pour tout le corps.

PROPOSITION LIX.

(774.) *Trouver la ligne qui doit terminer un plan horiſontal, pour qu'étant mu horiſontalement dans un Fluide, il éprouve la plus grande, ou la moindre, force poſſible, & qu'en même temps il renferme l'aire la plus grande, ou la plus petite.*

On a déjà réſolu ce problême, *Art.* 744, quant à la pemiere partie, ou condition; & nous avons trouvé que la différencielle de la force qui agit ſur une différencielle de la ligne cherchée, eſt = ...

$$mdaddy\left(a \pm \frac{a^{\frac{1}{2}}udv}{2(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}} \mp \frac{a^{\frac{1}{2}}udv^3}{4(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}\right) + \ldots\ldots\ldots$$

$$mdaddy\left(\frac{3u^2dv^2}{64.dx^2+dy^2)} - \frac{2u^2dv^4}{64(dx^2+dy^2)^3}\right).$$

Cette différencielle doit maintenant être égalée à celle qui reſulte de la différenciation de $mdaxdy$, qui eſt la différencielle de l'aire: or cette différencielle eſt $mdaxddy$ *: donc, après avoir diviſé par $mdaddy$, nous aurons . . . . . .

$$a \pm \frac{a^{\frac{1}{2}}udv}{2(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}} \mp \frac{a^{\frac{1}{2}}udv^3}{4(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3u^2dv^2}{64(dx^2+dy^2)} - \frac{2u^2dv^4}{64(dx^2+dy^2)^3} = x.$$

Faiſant maintenant $-dy = \frac{3dr}{b}$, ζ exprimant une quantité variable, & b une conſtante, on aura ** $x = a \mp \frac{a^{\frac{1}{2}}u\zeta}{4(b^2+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}(2b^2+\zeta^2) + \frac{u^2\zeta^2}{64(b^2+\zeta^2)^2}(3b^2+\zeta^2)$. Prenant la différencielle de cette équation, on aura

* On regarde encore x comme conſtante, par les mêmes raiſons que ci-deſſus.

** Le calcul de l'Auteur paroît ici en défaut. On eſt parvenu à l'équation . . . $x = \pm a \frac{a^{\frac{1}{2}}udy}{2(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}} \mp \frac{a^{\frac{1}{2}}udy^3}{4(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3u^2dy^2}{64(dx^2+dy^2)} - \frac{2u^2dy^4}{64(dx^2+dy^2)^3}$. On ſuppoſe

Digitized by Google

$dx = \mp \frac{a^{\frac{1}{2}} u b^2 d\zeta}{4(b^2+\zeta^2)^{\frac{5}{2}}} (2b^2-\zeta^2) + \frac{2u^2b^2\zeta d\zeta}{64(b^2+\zeta^2)^3} (3b^2-\zeta^2)$; & cette valeur étant substituée dans l'équation précédente $-dy = \frac{\zeta dx}{b}$, on aura $-dy = \mp \frac{a^{\frac{1}{2}} u b \zeta d\zeta}{4(b^2+\zeta^2)^{\frac{5}{2}}} (2b^2-\zeta^2) + \frac{2u^2b^2\zeta d\zeta}{64(b^2+\zeta^2)} (3b^2-\zeta^2)$; & en intégrant $b-y = \mp \frac{a^{\frac{1}{2}} u \zeta^2}{4(b^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{u^2b}{32} \int \frac{\zeta^3 d\zeta}{(b^2+\zeta^2)^3} (3b^2-\zeta^2)$. En supposant qu'on connoisse la valeur de ζ, on aura par conséquent les valeurs de x & de y, & on pourra décrire la ligne.

Corollaire I.

(775.) Si, au lieu de la plus grande, ou de la plus petite, force, on demandoit la ligne qui doit éprouver la plus grande, ou la moindre, résistance: comme elle est composée de deux parties, l'une choquante, & l'autre choquée, la différencielle de la résistance qui résulte de la somme des forces qui agissent sur les deux différencielles opposées de la ligne cherchée, sera . . . . . $mdaddy \left(\frac{a^{\frac{1}{2}} u dy}{2(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{a^{\frac{1}{2}} u dy}{2(dX^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}} u dy^3}{4(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{a^{\frac{1}{2}} u dy^3}{4(dX^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}} \right) +$ $mdaddy \left(\frac{3u^2dy^2}{64(dx^2+dy^2)} - \frac{3u^2dy^2}{64(dX^2+dy^2)} - \frac{2u^2dy^4}{64(dx^2+dy^2)^2} - \frac{2u^2dy^4}{64(dX^2+dy^2)^2} \right)$. La différencielle de l'aire est $= mdaddy\,(x+X)$, & la différencielle de cette différencielle est $= mdaddy\,(x+X)$, x exprimant les abscisses de la partie choquante, & X celles de la partie choquée. Or c'est à cette derniere différencielle qu'il faut égaler celle de la résistance: formant donc cette équation, divisant par $mdaddy$, & faisant $-dy = \frac{\zeta dx}{b} = \frac{ZdX}{b}$, on aura . . . .

$x + X = -\frac{a^{\frac{1}{2}} u \zeta}{4(b^2+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}} (2b^2+\zeta^2) - \frac{a^{\frac{1}{2}} u Z}{4(b^2+Z^2)^{\frac{1}{2}}} (2b^2+Z^2) + \ldots$ $\frac{u^2\zeta^2}{64(b^2+\zeta^2)^2} (2b^2+\zeta^2) - \frac{u^2Z^2}{64(b^2+Z^2)^2} (2b^2+Z^2)$ *.

$-dy = \frac{\zeta dx}{b}$, ou $dy = \frac{-\zeta dx}{b}$, & l'on substitue, dans l'équation ci-dessus, cette valeur supposée de dy. Or il est évident que la substitution faite, on aura . . . . . $x = a \mp \frac{a^{\frac{1}{2}} u \zeta}{4(b^2+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}} (2b^2+\zeta^2) + \frac{u^2\zeta^2}{64(b^2+\zeta^2)^2} (3b^2+\zeta^2)$, & non $x = a \pm \frac{a^{\frac{1}{2}} u \zeta}{4(b^2+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}} (2b^2+\zeta^2)$ &c. comme on le trouve dans le texte Espagnol. Cette erreur, si elle est réelle, seroit de la plus grande conséquence; si l'on faisoit usage de cette expression générale. Comme la différence n'est que dans les signes, nous avons rétabli ce passage.

* On retrouve ici la même erreur que dans l'*Article* précédent. Ceci nous fait penser que l'Auteur

Digitized by Google

COROLLAIRE II.

PLANC. IV. (776.) Si l'on suppose, en outre, qu'on prenne constamment les abscisses x de la partie choquante égales aux abscisses X de la partie choquée, de façon qu'on ait constamment $x = X$, on aura aussi $\zeta = Z$, & l'équation deviendra $x = \frac{a^{\frac{1}{2}} u \zeta}{4(b^2+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}(2b^2+\zeta^2)$ *: & $b - y = \frac{a^{\frac{1}{2}} u b \zeta^2}{4(b^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}$, ou enfin $y = b - \frac{a^{\frac{1}{2}} u b^3 \zeta^2}{4(b^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}$.

COROLLAIRE III.

(777.) Multipliant en croix les deux équations précédentes, on aura $\frac{(b-y) a^{\frac{1}{2}} u \zeta (2b^2+\zeta^2)}{4(b^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^{\frac{1}{2}} u b \zeta^2 x}{4(b^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}$; & en divisant par $\frac{a^{\frac{1}{2}} u \zeta}{4(b^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}$, il vient $(b-y)(2b^2+\zeta^2) = b\zeta x$; ou $b - y = \frac{b\zeta x}{2b^2+\zeta^2}$; c'est l'équation de la courbe.

COROLLAIRE IV.

FIG. 72. (778.) Si l'on suppose $b - y = 0$, on aura $x = 0$, & $y = b$: prenant donc C pour l'origine, & menant, perpendiculairement à l'axe CA des abscisses, la droite $CB = b$, le point B sera l'origine de la courbe pour les deux parties choquantes & choquées.

---

n'a pas fait à part les calculs de ce *Corollaire*, & qu'il s'est contenté d'employer le résultat de la *Proposition*, en y faisant les changements de signe convenables. Si nos réflexions sont justes, on ne peut avoir $x + X = \frac{c^{\frac{1}{2}} \zeta}{4(b^2+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}(2b^2+\zeta^2) + \frac{a^{\frac{1}{2}} u Z}{4(b^2+Z^2)^{\frac{1}{2}}}(2b^2+Z^2) + \&c.$ comme on le trouve dans le texte. Mais $x + X = -\frac{a^{\frac{1}{2}} u \zeta}{4(b^2+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}(2b^2+\zeta^2) - \frac{a^{\frac{1}{2}} u Z}{4(b^2+Z^2)^{\frac{1}{2}}}(2b^2+Z^2) + \&c.$

* Par une suite de la même faute, l'expression du *Corollaire* précédent ne donne point $x = \frac{a^{\frac{1}{2}} u \zeta}{4(b^2+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}(2b^2+\zeta^2)$; mais $x = -\frac{a^{\frac{1}{2}} u \zeta}{4(b^2+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}(2b^2+\zeta^2)$. On doit cependant employer la valeur donnée par l'Auteur, & par conséquent l'erreur dont il est question dans la note des deux *Articles* précédents ne peut altérer les conséquences que l'Auteur tire dans les *Corollaires* suivants; puisqu'elles dérivent toutes de l'équation particulière de l'*Article* présent. En effet, l'Auteur supposant ici qu'on a constamment $x = X$, & faisant en conséquence $x + X = 2x$, il s'ensuit que, dans cette hypothèse, x représente tout à la fois les abscisses de la partie choquante, & celles de la partie choquée, selon qu'on la prendra positivement ou négativement. Le calcul donne directement les abscisses négatives, & si on les prend positivement, comme cela doit être, puisqu'il s'agit de la partie choquante, on trouve pour x & pour y les mêmes valeurs que l'Auteur.

Digitized by Google

COROLLAIRE V.

(779.) Si nous prenons la différencielle de $x = \frac{a^{\frac{1}{2}} b \zeta (2b^2+\zeta^2)}{4(b^2+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}$, nous trouverons $dx = \frac{1}{4} a^{\frac{1}{2}} u d\zeta \left(\frac{2b^2+2\zeta^2}{(b^2+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{6b^2\zeta^2+3\zeta^4}{(b^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$; différencielle qui, étant égalée à zéro, donne, en réduisant, $2b^2 - \zeta^2 = 0$, ou $\zeta = b\sqrt{2}$. Cette valeur étant substituée dans celle de x, donne .... $x = \frac{a^{\frac{1}{2}} ub\sqrt{2}(2b^2+2b^2)}{4(b^2+2b^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3} a^{\frac{1}{2}} u \sqrt{6}$. Cette quantité est la valeur de la plus grande x, & par conséquent CA étant égal à $\frac{1}{3} a^{\frac{1}{2}} u \sqrt{6}$, A sera le point jusqu'où doit s'étendre la courbe.

COROLLAIRE VI.

(780.) Si l'on prend de même la différencielle de $y = b - \frac{a^{\frac{1}{2}} ub\zeta^2}{4(b^2+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}$, on aura $dy = -\frac{1}{4} a^{\frac{1}{2}} ubd\zeta \left(\frac{2\zeta}{(b^2+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{3\zeta^3}{(b^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$; cette différencielle étant égalée à zéro, donne $\zeta = 0$, & $2b - \zeta^2 = 0$, ou $\zeta = b\sqrt{2}$, comme dans le *Corollaire* précédent. La première valeur, $\zeta = 0$, étant substituée dans celle de y, donne $y = b$; b est donc la valeur d'une des plus grandes ordonnées, & celle qui correspond à l'origine C; car ayant $\zeta = 0$, on a (777.) $x = 0$. La seconde valeur, $\zeta = b\sqrt{2}$, étant substituée dans celle de y, donne la moindre $y = b - \frac{a^{\frac{1}{2}} u}{6\sqrt{3}}$; & elle correspond au point A de la plus grande x.

COROLLAIRE VII.

(781.) Si l'on a donc $y = b - \frac{a^{\frac{1}{2}} u}{6\sqrt{3}} = 0$, le point A tombera sur l'axe CA; si l'on a $b > \frac{a^{\frac{1}{2}} u}{6\sqrt{3}}$, la courbe ne s'étendra pas jusqu'à l'axe, & elle ne renfermera pas d'espace; enfin si l'on a $b < \frac{a^{\frac{1}{2}} u}{6\sqrt{3}}$, la courbe coupera l'axe.

COROLLAIRE VIII.

(782.) Dans le cas où $\frac{dy}{dx} = \frac{\zeta}{b} = \infty$, on aura $\zeta = \infty$, cette valeur étant substituée dans celle de $y = b - \frac{a^{\frac{1}{2}} b\zeta^2}{4(b^2+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}$, donne $y = b - 0$, ou $y = b$: c'est la valeur de l'autre plus grande ordonnée, & celle qui correspond au point F des abscisses.

Digitized by Google

COROLLAIRE IX.

(783.) Par les *Corollaires V* & *VI*, *Art.* 779 & 780, nous avons $-\frac{dy}{dx}=\frac{l\zeta(2b^2+\zeta^2)-\zeta^3)}{(2b^2+3\zeta^2)\sqrt{(b^2+\zeta^2)}-ob^2\zeta^2-3\zeta^4}=\frac{\zeta}{b}$. Dans le point B, où $\zeta=0$, on a $-\frac{dy}{dx}=0$; ce qui indique que la courbe, en ce point, eſt parallele à l'axe. De même dans le point D, où $\zeta=\infty$, on a $-\frac{dy}{dx}=\infty$; c'eſt-à-dire que la courbe, en ce point, eſt perpendiculaire à l'axe. Enfin dans le point A, où $\zeta=b\sqrt{2}$, on a $\frac{-dy}{dx}=\frac{b\sqrt{2}}{b}=\frac{\sqrt{2}}{1}$: donc ſi AG eſt ſuppoſée une tangente à la courbe en A, on aura $\frac{AE}{EG}=\frac{\sqrt{2}}{1}$.

COROLLAIRE X.

(784.) En ſuppoſant $2b^{\frac{1}{2}}\zeta+\zeta^{\frac{3}{2}}=(b^{\frac{1}{2}}+\zeta^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}$, on aura $x=\frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}u=CF$. Il réſulte de cette équation deux valeurs de ζ, l'une $\zeta=\infty$ *, qui nous a déjà donné $y=FD$; & l'autre $\zeta=b\sqrt{(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5})}$, qui donne $y=FH=b-\frac{a^{\frac{1}{2}}u(-1+\sqrt{5})}{(2+2\sqrt{5})^{\frac{1}{2}}}$.

COROLLAIRE XI.

(785.) On voit, par ce qu'on vient de dire, que la courbe a deux branches : la premiere BHA, eſt celle qui éprouve la moindre réſiſtance; & la ſeconde AD, eſt celle qui éprouve la plus grande.

COROLLAIRE XII.

(786.) L'amplitude ED de cette derniere branche eſt $=\frac{1}{32}a^{\frac{1}{2}}u\sqrt{6}-\frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}u=\frac{1}{16}a^{\frac{1}{2}}u\,(4\sqrt{6}-9)$; donc la relation entre ſon amplitude ED & ſa longitude $EA=b$, ſera $\frac{a^{\frac{1}{2}}u(4\sqrt{6}-9)}{36b}$. Pareillement, la relation entre l'amplitude $CB=b$ de l'autre branche, & ſa longitude $AÇ=\frac{1}{9}a^{\frac{1}{2}}u\sqrt{6}=\frac{9b}{a^{\frac{1}{2}}\sqrt{6}}$. Mais dans le point A, où l'axe eſt coupé par la courbe, on a (781.) $b=\frac{a^{\frac{1}{2}}u}{6\sqrt{3}}$: donc la relation entre l'amplitude & la longitude de la ſeconde branche, ou la premiere relation ci-deſſus, ſera $=\frac{6\sqrt{3}(4\sqrt{6}-9)}{36}=\frac{4\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{2}$: & la même rela-

* Car $dx=0$, & par conſéquent $\frac{\zeta}{b}=-\frac{dv}{dx}=\frac{-dy}{0}=\infty$.

Digitized by Google

tion pour la premiere branche eſt pareillement $= \frac{9}{6\sqrt{3}\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Corollaire XIII.

(787.) Les deux branches de la courbe ſont donc, comme on le voit, très-diſtinctes, la branche AD étant beaucoup plus aiguë en EAD, que l'autre branche BHA en BAC.

Corollaire XIV.

(788.) Comme l'abſciſſe $x = \frac{a^{\frac{1}{2}}u(2b\zeta^2+\zeta^3)}{4(b^2+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}$, & l'ordonnée . . . . : $b-y = \frac{a^{\frac{1}{2}}u\zeta^2}{4(b^2+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}$, ſont chacune multipliées par $a^{\frac{1}{2}}u$, leur rapport demeurera conſtant, quelque valeur qu'on donne aux quantités a & u. Donc ſi la valeur de b eſt la même pour toutes les profondeurs dans le Fluide, comme pour toutes les viteſſes, la courbe ſera la même pour tous les cas.

Corollaire XV.

(789.) Le corps qui éprouvera le moins de réſiſtance dans le Fluide, en ſuppoſant la même largeur, ou la même relation entre CB & CA, & qui en même temps renfermera le plus grand eſpace, ſera celui dont toutes les ſections horiſontales ſeront comme IBA.

Corollaire XVI.

(790.) Si l'on vouloit prendre une partie de la courbe comme KB, de ſorte que la longueur KL fût à la largeur LB, comme un nombre donné n, eſt à l'unité, l'on auroit $KL = x = \frac{a^{\frac{1}{2}}u(2b^2\zeta+\zeta^3)}{4(b^2+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}$, & $LB = b-y = \frac{a^{\frac{1}{2}}ub\zeta^2}{4(b^2+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}$, & l'on en déduiroit $2b^2\zeta+\zeta^3 = nb\zeta^2$, ou $2b^2+\zeta^2 = nb\zeta$, ce qui donne $\zeta = \frac{1}{2}b(n \pm \sqrt{(n^2-8)})$. Subſtituant cette valeur de ζ dans celle de $LB = \frac{a^{\frac{1}{2}}ub\zeta^2}{4(b^2+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}$, il en réſulte . . . $LB = \frac{a^{\frac{1}{2}}u\left(n+n^2\pm n\sqrt{(n^2-8)}-4\right)}{(4+2(n^2\pm n\sqrt{(n^2-8)}-4))^{\frac{1}{2}}}$, & $a^{\frac{1}{2}}u = \frac{LB\left(4+2(n^2\pm n\sqrt{(n^2-8)}-4)\right)^{\frac{1}{2}}}{n^2\pm n\sqrt{(n^2-8)}-4}$. Cette valeur de $a^{\frac{1}{2}}u$ étant ſubſtituée dans celle de la plus grande abſciſſe CA (779.) $= \frac{1}{6}a^{\frac{1}{2}}u\sqrt{6}$, & dans celle de la plus grande ordonnée CB (781) $= \frac{a^{\frac{1}{2}}b}{6\sqrt{3}}$, on aura les dimenſions CB & CA, au moyen deſquelles on pourra décrire, comme auparavant, la courbe, qui paſſera par le point K.

Digitized by Google

SCOLIE.

(791.) On trouve dans la Table ſuivante les valeurs de x & de y qui correſpondent aux différentes valeurs de ζ dans la ſuppoſition de $b = 1$. La premiere colonne à gauche de cette Table contient les valeurs de ζ; la ſeconde & la troiſieme colonne contiennent, pour la premiere branche, les valeurs des abſciſſes & des ordonnées qui leur correſpondent. Les quatrieme, cinquieme & ſixieme colonnes contiennent les mêmes éléments pour la ſeconde branche.

TABLE des Abſciſſes & des Ordonnées de la Courbe qui, en renfermant le plus grand, ou le moindre, eſpace, éprouve la moindre, ou la plus grande, réſiſtance.

Premiere Branche.			Seconde Branche.		
ζ	x	$b-y$	ζ	x	$b-y$
0	0	0	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	1
$\frac{1}{10}$	$\frac{1809}{102\sqrt{303}}$	$\frac{45}{101\sqrt{303}}$	2	$\frac{18\sqrt{15}}{25}$	$\frac{6\sqrt{15}}{25}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{93\sqrt{51}}{2.17^2}$	$\frac{6\sqrt{51}}{17^2}$	4	$\frac{108\sqrt{51}}{17^2}$	$\frac{24\sqrt{51}}{17^2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{27\sqrt{15}}{50}$	$\frac{3\sqrt{15}}{25}$	∞	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	0
1	$\frac{9\sqrt{6}}{8}$	$\frac{3\sqrt{6}}{8}$			
$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	1			

* Si, dans les formules qui donnent la valeur de x & de $b-y$, l'on ſubſtitue pour $a^{\frac{1}{3}}u$ ſa valeur; ſi l'on fait $b=1$, & ζ ſucceſſivement égal aux nombres de la premiere colonne, on aura tous les nombres de cette Table. Or, $a^{\frac{1}{3}}u$ étant conſtant, on peut en prendre la valeur pour n'importe quel point de la courbe. Au point A, où la courbe coupe l'axe, on a (781) $b=\frac{a^{\frac{1}{3}}u}{6\sqrt{3}}$; donc $a^{\frac{1}{3}}u=6b\sqrt{3}=6\sqrt{3}$, puiſque $b=1$: c'eſt la quantité qu'on a ſubſtituée dans les valeurs de x & de $b-y$.

Digitized by Google

CHAPITRE IX.

Du Mouvement progreſſif horiſontal que prennent les corps flottants, lorſqu'ils ſont pouſſés par une ou par pluſieurs puiſſances.

Proposition LX.

(792.) *Trouver la relation entre le temps & la viteſſe qu'acquiert un corps flottant, lorſqu'il eſt pouſſé par une puiſſance dont la direction eſt horiſontale, & placée dans le centre des réſiſtances, en ſuppoſant que celui-ci coïncide avec le centre de gravité.*

La direction de la puiſſance étant horiſontale, celle de la réſiſtance le ſera pareillement ; & comme elles concourent toutes les deux dans un point, la réſultante des forces ſera comme une ſeule puiſſance qui agit ſur le centre de gravité, puiſqu'on ſuppoſe que ce centre coïncide avec celui des réſiſtances. En conſéquence, le corps ne prendra pas de mouvement de rotation, & il ſe mouvera ſeulement horiſontalement, ſuivant la direction de la puiſſance. Cette puiſſance étant nommée π, & M repréſentant la maſſe du corps, nous aurons (19.) $dt(\pi - Ru \mp Qu^2 - Nu^4) = Mdu$, la quantité $Ru \pm Qu^2 + Nu^4$ exprimant les réſiſtances qu'éprouve le corps (674.), ou $dt = \frac{Mdu}{\pi - Ru \mp Qu^2 - Nu^4}$. Cette équation, étant intégrée, donne $t = M\int \frac{du}{\pi - Ru \mp Qu^2 - Nu^4}$, ou, en diviſant le numérateur & le dénominateur par N, $t = \frac{M}{N}\int \frac{du}{\frac{\pi}{N} - \frac{Ru}{N} \mp \frac{Qu^2}{N} - u^4}$. Soit maintenant .....

$$\frac{\pi}{N} - \frac{Ru}{N} \mp \frac{Qu^2}{N} - u^4 = f^2 b h - f^2 (g-h)\, u - f^2 u^2 - u^4 \Big\} \text{. Dans}$$
$$- gh\,(g-h)\, u + (g-h)^2 u^2$$
$$+ ghu^2$$

cette équation il y a deux racines réelles, l'une poſitive $u = h$, & l'autre négative $u = -g$, avec deux racines imaginaires contenues dans l'équation $f^2 - (g-h)u + u^2 = 0$. Nous aurons donc ... $dt = \frac{(A+Bu)\,du}{f^2 - (g-h)u + u^2} + \frac{Cdu}{g+u} + \frac{Ddu}{h-u}$; D étant $= \frac{M}{N(g+h)(2f^2 - g^2 + f^2)}$; $C = \frac{M}{N(g+h)(2g^2 - g^2 + f^2)}$; $B = D - C$, & $A = C(2g - h) - D(g - 2h)$.

L'équation étant sous cette forme, on en déduit, en intégrant, $t = \frac{A+\frac{1}{2}B}{f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2}\left(Arc\ tang\ (u-\frac{1}{2}(g-h)) - Arc\ tang\ (V-\frac{1}{2}(g-h))\right) + \frac{1}{2}B\ log\ \left(\frac{f^2-(g-h)u+u^2}{f^2-(g-h)V+V^2}\right) + C\ log\ \left(\frac{g+u}{g+V}\right) + D\ log\ \left(\frac{h-V}{h-u}\right)$. On observera que ces arcs appartiennent à un cercle dont le rayon est $= (f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2)^{\frac{1}{2}}$; & que V exprime la vîteſſe poſitive avec laquelle le corps ſe mouvoit lorſque la puiſſance π a commencé à agir *.

---

* Nous allons développer les calculs de cette Propoſition, qui pourroient embarraſſer quelques Lecteurs.

L'Auteur parvient à l'équation $t = \frac{M}{N}\int \frac{du}{\frac{\pi}{N} - \frac{Ru}{N} + \frac{Qu^2}{N} - u^4}$: ainſi il ne s'agit, pour avoir t, que de trouver la valeur de l'intégrale $\int \frac{du}{\frac{\pi}{N} - \frac{Ru}{N} + \frac{Qu^2}{N} - u^4}$, & de la multiplier par $\frac{M}{N}$. Pour trouver l'intégrale de cette fraction, il faut décompoſer ſon dénominateur en ſes facteurs; en conſéquence, on conſidérera $\frac{\pi}{N} - \frac{R}{N}u + \frac{Q}{N}u^2 - u^4$ comme $= 0$; & ſous cette forme, on voit qu'il s'agit de trouver les racines d'une équation du quatrieme degré, dont le terme qui contient la troiſieme puiſſance de l'inconnue eſt évanoui, puiſque ce ſont ces racines qui doivent former les facteurs de cette quantité. (Voyez la *Troiſieme Partie* du *Cours de Mathématiques* de M. Bezout, *Art.* 178.).

La vîteſſe u eſt une quantité réelle qui peut être poſitive, ou négative; ainſi cette équation ne peut avoir ſes quatre racines imaginaires: & ce qui ſuit faiſant voir qu'elle ne peut les avoir toutes quatre réelles, il faut conclure qu'il y en a deux réelles & deux imaginaires (ibid. *Art.* 204 *& ſuiv.*). Dans cette combinaiſon, l'inſpection ſeule de la propoſée, & l'état de la queſtion, font connoître que les deux racines réelles ne peuvent être toutes deux poſitives, ni toutes deux négatives; car ſi l'on avoit $u = +g$, & $u = +h$, on auroit $g \mp u = 0$, & $h \mp u = 0$, & par conſéquent $(g \mp u)(h \mp u)$, ou $gh \mp (g+h)u + u^2 = 0$; ce qui fait voir que l'autre facteur du ſecond degré, qui, multiplié par celui-ci, doit produire la propoſée délivrée du terme qui contient u^3, & ayant le terme u^4 négatif, eſt néceſſairement de cette forme $f^2 \mp (g+h)u - u^2 = 0$. Or, f^2 étant poſitif, ce ſecond facteur ne peut avoir ſes racines imaginaires, comme on le ſuppoſe, & les ayant réelles, alors la propoſée auroit ſes quatre racines réelles, ce qui ne peut convenir; car, dans le cas où l'on admet le ſigne +, c'eſt-à-dire, dans la ſuppoſition des racines négatives, le ſecond terme de l'équation qui en réſulte n'eſt pas négatif, comme dans la propoſée. A la vérité, en admettant le ſigne −, ou en ſuppoſant les racines poſitives, le ſecond terme de l'équation réſultante eſt négatif, mais, dans ce cas, comme dans le précédent, le troiſieme terme eſt exceſſivement poſitif, ce qui ne peut être admis dans la pratique, ainſi qu'on va le voir. Cette hypotheſe ne peut donc avoir lieu, & les quatre racines ne peuvent être réelles.

Il faut donc que les deux racines réelles ſoient, l'une poſitive, & l'autre négative; c'eſt la ſeule combinaiſon qui ſoit compatible avec l'état de la queſtion, puiſqu'il s'agit de trouver le rapport entre la vîteſſe acquiſe u, & le temps employé à l'acquérir, & cette vîteſſe peut être poſitive, ou négative. Ainſi cette ſeule conſidération ſuffiroit, indépendamment de toute analyſe algébrique, pour exclure toutes les autres combinaiſons des racines. Mais pourſuivons. Soit $u = -g$, & $u = h$, on aura $(h-u)(g+u)$, ou $gh - (g-h)u - u^2 = 0$; l'autre

Digitized by Google

COROLLAIRE I.

(793.) Dans le cas où le corps auroit une vîteſſe déterminée, & que cette vîteſſe viendroit à diminuer, à cauſe que la ſomme des forces réſiſtantes deviendroit plus grande que la puiſſance π; l'équation ſeroit, en ce cas, $dt(\pi - Ru \mp Qu^2 - Nu^4) = -Mdu$, la même qu'auparavant, avec cette ſeule différence, que du eſt négative. Donc la même équation & les mêmes racines ſatisferont

---

facteur, qui doit concourir avec celui-ci pour produire la propoſée, ſera de cette forme $f^2-(g-h)u+u^2=0$. On aura donc $f^2gh-f^2(g-h)u-\left.\begin{matrix} f^2u^2-u^4 \\ -gh(g-h)u+(g-h)^2u^2 \\ +ghu^2 \end{matrix}\right\} = \frac{\pi}{N} - \frac{Ru \mp Qu^2}{N} - u^4$;

équation dont le ſecond terme eſt négatif, ayant $h < g$, & dont le troiſieme terme peut être poſitif, ou négatif, ſelon la valeur de f^2. Les deux racines de l'équation $f^2-(g-h)u+u^2=0$, peuvent à la vérité être réelles; mais pour que ce cas extrême arrive, il faut que f^2 ſoit moindre que $\frac{1}{4}(g-h)^2$, ce qui rend le troiſieme terme $u^2(-f^2+(g-h)^2+gh)$ exceſſivement poſitif, car ayant $f^2 < \frac{1}{4}(g-h)^2$, on aura à plus forte raiſon $f^2 < f^2 - (g-h)^2$, & encore à bien plus forte raiſon $f^2 < (g-h)^2 + gh$. Or (666 & 667, *Note*) pour que le troiſieme terme qui eſt celui qui ſuit la raiſon du quarré des vîteſſes ſoit ainſi exceſſivement poſitif, il faut que la partie choquante du corps ſoit beaucoup plus aiguë que la partie choquée, ce qui ne convient nullement avec ce que la pratique exige. Venons maintenant à l'intégration dont il s'agit.

En ſubſtituant dans la valeur de dt, les facteurs dans leſquels nous venons de ſuppoſer ſon dénominateur décompoſé, on aura $dt = \frac{\frac{M}{N}du}{(h-u)(g+u)f^2-(g-h)u+u^2)}$. Suppoſons que cette valeur de dt ſoit auſſi repréſentée par $\frac{(A+Bu)du}{f^2-(g-h)u+u^2} + \frac{Cdt}{g+u} + \frac{Ddu}{h-u}$, les Coëfficients A, B, C, D étant indéterminés. Alors en réduiſant au même dénominateur les fractions qui compoſeront le ſecond membre, ſupprimant le dénominateur commun, paſſant tous les termes dans un membre, & réduiſant, on aura $(ghA+f^2hC+f^2gD-\frac{M}{N})u^0 +$ $(A-gA+gfB-ghC+h^2C-f^2C-g^2D+gfD+f^2D)u+(-A+hB-gB+gC+hD)u^2+$ $(D-B-C)u^3=0$. Or, pour que cette équation ait lieu indépendamment de toute valeur de u, il faut que la ſomme des quantités qui multiplient chaque puiſſance de u ſoit $=0$: rempliſſant donc cette condition, on aura quatre équations à l'aide deſquelles on déterminera, par les regles ordinaires de l'Algebre, les valeurs des coëfficients A, B, C, D. Ces opérations faites, on trouvera $E=D-C$; $A=C(2g-h)-D(g-2h)$; $D=\frac{M}{N(g+h)(2h^2-gh+f^2)}$; & $C=\frac{M}{N(g+h)(2g^2-gh+f^2)}$, comme le dit l'Auteur.

Ceci poſé, ſoit AM un arc de cercle dont AB eſt la tangente & CB la ſecante; ſoit mené la ſecante CE infiniment proche de la premiere, & du point C, comme centre, avec le rayon CB, ſoit décrit l'arc BS, lequel pourra être conſidéré comme une petite ligne droite perpendiculaire à CE. Le triangle BSE ſera ſemblable au triangle ACE, puiſqu'ils ont chacun un angle droit, & un angle commun, il ſera donc auſſi ſemblable au triangle ACB qui en diffère infiniment peu. Faiſant $AP=x$, l'arc $AM=y$, & le rayon $AC=a$; BE ſera $=dx$, $MN=dy$, & $CE=\sqrt{(aa+xx)}$. Les triangles ſemblables

FIG. 4.

Digitized by Google

aux deux cas, en obſervant ſeulement que dans celui-ci, à cauſe qu'on a $-Mdu$, il faut changer le ſigne des termes des inté-

---

ACB, SEB donnent $CB : AC :: BE : BS$, ou $\sqrt{(aa+xx)} : a :: dx : BS = \frac{adx}{\sqrt{(aa+xx)}}$. Les ſecteurs ſemblables CBS, CMN donnent auſſi $CB : CM :: BS : MN$, ou $\sqrt{(aa+xx)} : a :: \frac{adx}{\sqrt{(aa+xx)}} : dy = \frac{aadx}{aa+xx}$: c'eſt l'expreſſion générale de l'élement d'un arc de cercle dont x eſt la tangente & a le rayon.

Reprenons maintenant l'équation $dt = \frac{(A+Bu)du}{f^2-(g-h)u+u^2} + \frac{Cdu}{g+u} + \frac{Ddu}{h-u}$. Je vois d'abord que les deux derniers termes ſont les différencielles du logarithme de $g+u$ & de $h-u$, dont l'une eſt multipliée par C, & l'autre par $-D$, (ibid. *Quatrieme Partie*, *Art.* 27). Ainſi leurs intégrales ſont $C\,log\,(g+u)$, & $-D\,log\,(h-u)$. Quant au premier terme, je cherche à le ramener à la forme $\frac{aadx}{aa+xx}$, dont l'intégrale eſt *Arc tang* x, & pour cela je fais évanouir le ſecond terme du dénominateur, en faiſant $u = x + \frac{1}{2}(g-h)$ (ibid. *Troiſieme Partie*, *Art.* 192); ce qui donne $x = u - \frac{1}{2}(g-h)$, & $dx = du$. Subſtituant donc ces quantités dans le premier terme, en place de leurs correſpondantes, il deviendra. . . . .

$$\frac{(A+\frac{1}{2}(g-h))\left(\frac{dx}{x^2+f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2}\right)}{} + \frac{Bxdx}{x^2+f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2} = \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{A+\frac{1}{2}(g-h)}{f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2}\left(\frac{(f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2)dx}{x^2+f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2}\right) + \frac{Bxdx}{x^2+f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2}$$

; quantités qui s'integrent facilement : car en faiſant $f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2 = aa$, ce qui donne $a = (f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2)^{\frac{1}{2}}$, on voit aiſément que l'intégrale de la premiere partie eſt $\frac{A+\frac{1}{2}(g-h)}{f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2}$ (*Arc tang* $(u-\frac{1}{2}(g-h))$, & que celle de la ſeconde eſt $\frac{1}{2}B\,log\,(x^2+f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2)$, ou $\frac{1}{2}B\,log(f^2-(g-h)u+u^2)$, en mettant pour x ſa valeur. Réuniſſant donc toutes ces intégrales, on aura $t = \ldots\ldots\ldots$

$$\frac{A+\frac{1}{2}(g-h)}{f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2}\left(\textit{Arc tang}\,(u-\tfrac{1}{2}(g-h))\right)+\tfrac{1}{2}B\,log\,(f^2-(g-h)u+u^2)+C\,log(g+u)-D\,log\,(h-u)+K.$$

Pour trouver la conſtante K, je conſidere que l'intégrale doit être égale à zéro au commencement de l'action, ou lorſque $t=0$; & alors u devient égale à la viteſſe initiale que l'Auteur déſigne par V: donc on a . . . . . .

$$0 = \frac{A+\frac{1}{2}(g-h)}{f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2}\left(\textit{Arc tang}\,(V-\tfrac{1}{2}(g-h))+\tfrac{1}{2}B\,log\,(f^2-(g-h)V+V^2)+C\,log\,(g+V)-\right.$$

$$D\,log\,(h-V)+K\text{; d'où l'on tire } K = -\frac{A+\frac{1}{2}(g-h)}{f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2}\left(-\textit{Arc tang}\,(V-\tfrac{1}{2}(g-h))\right) - \ldots\ldots$$

$$\tfrac{1}{2}B\,log\,(f^2-(g-h)V+V^2) - C\,log\,(g+V) + D\,log\,(h-V). \text{ Subſtituant cette valeur de } K$$

dans celle de t, l'intégrale complette, ou la valeur entiere de t, ſera = ...

$$\frac{A+\frac{1}{2}(g-h)}{f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2}\left(\textit{Arc tang}\,(u-\tfrac{1}{2}(g-h))-\textit{Arc tang}\,(V-\tfrac{1}{2}(g-h))\right)+\tfrac{1}{2}B\left(log\,(f^2-(g-h)u+u^2)-\right.$$

$$log\,(f^2-(g-h)V+V^2)\Big)+C\left(log\,(g+u)-log\,(g+V)\right)-D\left(log(h-u)+log(h-V)\right)\text{; ou enfin } t =$$

$$\frac{A+\frac{1}{2}(g-h)}{f^2-\frac{1}{4}(g-h)^2}\left(\textit{Arc tang}\,(u-\tfrac{1}{2}(g-h))-\textit{Arc tang}(V-\tfrac{1}{2}(g-h))\right)+\tfrac{1}{2}B\,log\left(\frac{f^2-(g-h)u+u^2}{f^2-(g-h)V+V^2}\right)+$$

$$C\,log\left(\frac{g+u}{g+V}\right)+D\,log\left(\frac{h-V}{h-u}\right)\text{ : c'eſt l'expreſſion même de l'Auteur.}$$

Digitized by Google

grales résultantes, pour avoir la véritable valeur qui convient à ce cas. Donc l'intégrale deviendra. . . . . .

$$t=\frac{A+\frac{1}{2}B(g-h)}{f^2-\frac{1}{2}(g-h)^2}\Big(Arc\ tang\,(V-\tfrac{1}{2}(g-h))-Arc\ tang(u-\tfrac{1}{2}(g-h))\Big)+\frac{1}{2}B\ log\,\frac{(f^2-(g-h)V+V^2}{f^2-(g-h)u+u^2})+C\ log\,(\frac{g+V}{g+u})+D\ log\,(\frac{h-u}{h-V}).$$

COROLLAIRE II.

(794.) Si l'on vouloit renfermer, dans le cas de la diminution de la viteſſe, celui dans lequel on a $\pi=0$, on auroit $h=0$, à cauſe que le terme f^2gh correſpondant à π, doit alors s'évanouir. Subſtituant donc, dans la derniere valeur de t, celle de $h=0$, on aura celle qui convient à ce cas.

COROLLAIRE III.

(795.) Dans le cas où le corps a acquis ſa plus grande, ou ſa moindre viteſſe, on a $du=0$: donc on aura auſſi $\pi-Ru\mp Qu^2-Nu^4=0$, & la racine, ou facteur poſitif, $h-u$, ſera auſſi $=0$: donc la plus grande, ou la plus petite, viteſſe que puiſſe acquérir le corps, eſt $=h$.

COROLLAIRE IV.

(796.) Puiſque, dans le cas où le corps acquiert ſa plus grande, ou ſa plus petite, viteſſe h, la quantité $D\ log\,(\frac{h-V}{h-u})$, ou $D\ log\,(\frac{h-u}{h-V})$ devient infinie, il s'enſuit que le temps t ſera auſſi infini, ou que le corps a beſoin d'un temps infini pour acquérir ſa plus grande, ou ſa moindre, viteſſe; ou, ce qui revient au même, il s'enſuit que le corps ne pourra jamais acquérir cette viteſſe.

COROLLAIRE V.

(797.) Si le corps avoit ſes deux moitiés, choquante & choquée, égales & ſemblables, on auroit $Q=0$ (669.); & ſi, de plus, il étoit très-grand, ou s'il étoit ſubmergé à une grande profondeur dans le Fluide, & que ſa plus grande viteſſe h ne fût pas exceſſive, on pourroit négliger la quantité Nu^4, qui provient de la dénivellation (654, 668 & 673), & l'on auroit $t=M\int\frac{du}{\pi-Ru}=\frac{M}{R}\ log\,(\frac{\pi-RV}{\pi-Ru})$*

* Car $dt=M\left(\frac{du}{\pi-Ru}\right)=\frac{M}{-R}\left(\frac{-Rdu}{\pi-Ru}\right)$; donc $t=-\frac{M}{R}\,log\,(\pi-Ru)+K$. Mais au commencement de l'action, cette intégrale doit s'évanouir, & alors $u=V$; donc

pour le cas où la vîteſſe va en augmentant; & $t=\frac{M}{R}log\left(\frac{\tau-Ru}{\tau-RV}\right)$, pour le cas où elle va en diminuant.

COROLLAIRE VI.

(798.) D'après les conditions précédentes, la plus grande, ou la moindre, vîteſſe ſera $=\frac{\tau}{R}$ *.

COROLLAIRE VII.

(799.) On aura donc encore $t=\frac{M}{R}log\left(\frac{\tau-RV}{\tau-Ru}\right)=\infty$, ou $t=\frac{M}{R}log\left(\frac{\tau-Ru}{\tau-RV}\right)=-\infty$ **, pour le temps dans lequel le corps acquerra la plus grande, ou la moindre, vîteſſe.

COROLLAIRE VIII.

(800.) Ayant trouvé $t=\frac{M}{R}log\left(\frac{\tau-RV}{\tau-Ru}\right)$, on en conclura $\frac{Rt}{M}=log\left(\frac{\tau-RV}{\tau-Ru}\right)$; & ſuppoſant $log\,q=1$, on aura $\frac{Rt}{M}log\,q=log\left(\frac{\tau-RV}{\tau-Ru}\right)$, ou $q^{\frac{Rt}{M}}=\frac{\tau-RV}{\tau-Ru}$: ce qui donne la vîteſſe, à quelque inſtant que ce ſoit de la courſe du corps, lorſqu'elle va en augmentant, ou la valeur de $u=\frac{\tau}{R}\left(1-\frac{1}{q^{\frac{Rt}{M}}}\right)+\frac{V}{q^{\frac{Rt}{M}}}$.

COROLLAIRE IX.

(801.) Dans le cas où la vîteſſe va en diminuant, on aura

$o=-\frac{M}{R}log\,(\tau-RV)+K$; & par conſéquent $K=\frac{M}{R}log\,(\tau-RV)$. Subſtituant cette valeur de K dans l'intégrale, on a $t=\frac{M}{R}log\,(\tau-RV)-\frac{M}{R}log\,(\tau-Ru)=\frac{M}{R}log\left(\frac{\tau-RV}{\tau-Ru}\right)$.

* Car alors $\tau-Ru=o$, ce qui donne $u=\frac{\tau}{R}$.

** Il eſt évident qu'il y a ici une faute de calcul dans le texte Eſpagnol. On y trouve encore, pour ce ſecond cas, $t=+\infty$, mais il faut $t=-\infty$, ainſi que le calcul l'indique; car, puiſque, dans le cas de la vîteſſe décroiſſante, $t=\frac{M}{R}log\left(\frac{\tau-Ru}{\tau-RV}\right)$, lors de la moindre vîteſſe $u=\frac{\tau}{R}$, on a $t=\frac{M}{R}log\left(\frac{o}{\tau-RV}\right)=\frac{M}{R}log\,o=-\infty$. On appliquera cette Remarque au *Corollaire IV*, *Art.* 796. Cette faute eſt d'une conſéquence beaucoup plus grande qu'elle ne pourroit le paroître d'abord; il nous ſemble évident que c'eſt elle qui a donné lieu à une mépriſe bien étrange, qu'on trouve dans le *Corollaire X*, & que nous ferons remarquer.

Digitized by Google

$\frac{Rt}{M} = log\left(\frac{\pi - Ru}{\pi - RV}\right)$, & $q^{\frac{Rt}{M}} = \frac{\pi - Ru}{\pi - RV}$; ce qui donne la viteſſe, à quelque inſtant que ce ſoit de la courſe du corps, ou $u = \frac{\pi}{R}\left(1 - q^{\frac{Rt}{M}}\right) + Vq^{\frac{Rt}{M}}$.

COROLLAIRE X.

(802.) La quantité $\frac{\pi - Ru}{\pi - RV}$ étant de l'eſpece des quantités fractionnaires, q ſera une quantité de la même eſpece : par conſéquent, lorſque $t = \infty$, on a $q^{\frac{Rt}{M}} = 0$: donc on aura dans ce cas, comme auparavant, la même viteſſe $u = \frac{\pi}{R}$ *.

---

* Nous avons traduit littéralement ce *Corollaire*, quoiqu'il doive paroître au moins étrange. La quantité $\frac{\pi - Ru}{\pi - RV}$ étant, dit l'Auteur, de l'eſpece des quantités fractionnaires, q ſera une quantité de la même eſpece. Cette conſéquence eſt évidemment fautive. L'eſpece de la quantité q eſt déterminée, & ne dépend nullement de celle de $\frac{\pi - Ru}{\pi - RV}$: q eſt le nombre dont le logarithme hyperbolique eſt l'unité. Ce nombre eſt connu, & eſt à fort peu près $= 2,7182818$, comme le ſçavent tous les Géometres. Or, ce nombre élevé à la puiſſance dont l'expoſant eſt $\frac{Rt}{M}$, R & M déſignant des quantités conſtantes & finies, & t une quantité infinie, loin de devenir $= 0$, devient au contraire infini. $\frac{\pi - Ru}{\pi - RV}$ eſt toujours dans le cas préſent une quantité fractionnaire, puiſque dans la viteſſe décroiſſante, u eſt moindre que V, & que le terme Ru des réſiſtances eſt plus grand que la puiſſance π (793) : mais cela prouve ſeulement que $q^{\frac{Rt}{M}}$ eſt une fraction, ce qui eſt évident, puiſque t eſt négatif. Or, lorſque le corps a atteint la plus petite viteſſe, $t = -\infty$ (799), & alors $q^{\frac{Rt}{M}} = \frac{1}{q^{\frac{Rt}{M}}} = \infty$. Cette expreſſion $q^{\frac{Rt}{M}} = 0$, que l'Auteur donne comme générale, étant appliquée au cas de la viteſſe décroiſſante (801), donne très-bien la plus petite viteſſe $= \frac{\pi}{R}$; mais s'il eût voulu appliquer la même expreſſion au cas de la viteſſe croiſſante, il ſe fût trouvé bien embarraſſé, & n'auroit pu que ſoupçonner quelque erreur dans ſes calculs. Il l'eût bientôt découverte dans le *Corollaire VII*, comme nous l'avons fait remarquer dans la note qui l'accompagne. Voici comment nous voudrions rétablir le *Corollaire X*, en raiſonnant toujours d'après les principes de l'Auteur.

» La quantité $\frac{\pi - Ru}{\pi - RV}$ étant de l'eſpece des quantités fractionnaires, $q^{\frac{Rt}{M}}$ ſera une quantité de la même eſpece. Par conſéquent, lorſque $t = -\infty$, on a $q^{\frac{Rt}{M}} = 0$. Donc on aura dans ce cas, comme auparavant, la même viteſſe $u = \frac{\pi}{R}$.

L'expreſſion $q^{\frac{Rt}{M}} = 0$, que l'Auteur donne comme générale, puiſqu'il dit que q eſt fractionnaire & $t = +\infty$, ne convient point au cas de la viteſſe croiſſante ; au contraire,

Digitized by Google

COROLLAIRE XI.

(803.) Si dans la valeur $\frac{\pi}{R}$ de la plus grande vîteſſe qu'on a trouvée en négligeant la dénivellation, on ſubſtitue les valeurs de $\pi = Nf^2gh$, & de $R = N(f^2+gh)(g-h)$, cette plus grande vîteſſe ſera $= \frac{f^2gh}{(f^2+gh)(g-h)}$. Cette quantité eſt toujours plus grande que la plus grande vîteſſe h qu'on trouve en ayant égard à la dénivellation, à moins qu'on n'ait $f^2 < g(g-h)$.

COROLLAIRE XII.

(804.) Le cas dans lequel la plus grande vîteſſe, en tenant compte de la dénivellation, eſt égale à la plus grande vîteſſe qui a lieu en la négligeant, eſt celui dans lequel on a $f^2 = g(g-h)$. Si l'on ſubſtitue cette valeur de f^2 dans le troiſieme terme de l'équation ſuppoſée, *Art.* 792, qui eſt $= u^2(-f^2+(g-h)^2+gh)$, ce terme ſe réduira à h^2u^2, & ſera par conſéquent poſitif. Donc la plus grande vîteſſe h ne peut être plus grande que $\frac{\pi}{R}$, à moins que la quantité $\mp Q$ ne ſoit poſitive, ou, ce qui revient au même, que la partie choquante du corps ne ſoit pas beaucoup plus aiguë que la partie choquée. (*Voyez* les Notes des *Art.* 667 & 792.).

COROLLAIRE XIII.

(805.) Si nous ſuppoſons $\frac{f^2gh}{(f^2+gh)(g-h)} = h + \theta$, θ exprimant la différence entre les deux plus grandes vîteſſes, c'eſt-à-dire, ſi $\theta = \frac{\pi}{R} - h$, cette différence θ ſera $= \frac{f^2gh}{f^2+gh)(g-h)} - h = \frac{h^2(f^2-g(g-h))}{(f^2+gh)(g-h)}$.

SCOLIE I.

(806.) Nous avons aſſuré dans la *Propoſition* ci-deſſus que $f^2-(g-h)u+u^2$ contient deux racines imaginaires; cependant

---

dans ce cas, cette quantité eſt infinie. Auſſi en faiſant $q\frac{Re}{M} = \infty$, dans la formule de la vîteſſe croiſſante, on trouve la plus grande vîteſſe $= \frac{\pi}{R}$ comme cela doit être. En général, il faut obſerver que dans le cas de la vîteſſe décroiſſante, le calcul donne toujours pour t une quantité négative: puiſque (799) $t = \frac{M}{R}$ multiplié par le logarithme de la fraction $\frac{\pi-Ru}{\pi-Rv}$; logarithme qui eſt négatif, comme chacun le ſçait.

cette

Digitized by Google

cette quantité peut en contenir deux réelles, si l'on a $\frac{1}{4}(g-h)^2 > f^2$; mais, pour que cela arrive, il est nécessaire que le troisième terme $u^2(-f^2+(g-h)^2+gh)$ soit excessivement positif, ou que la partie choquante du corps soit excessivement aiguë, en comparaison de la partie choquée; ce qui ne convient pas dans la pratique. *Voyez* les Notes des *Art.* 667 & 792.

Scolie II.

(807.) Pour faciliter le calcul, nous avons supposé, dans la *Proposition*, que la puissance étoit placée au centre de gravité, & que le centre des résistances coïncidoit avec celui de gravité; mais cette supposition est impossible, à moins que le centre de gravité ne suive les variations du centre des résistances; variations qui sont très-réelles, comme on le verra par la suite, & comme on peut facilement le présumer dès-à-présent, en considérant seulement combien varient les résistances qui résultent de la dénivellation. Cependant, lorsque ces résistances ne seront pas excessives, ou que le corps n'aura pas une inclinaison assez considérable pour que les deux centres se séparent, on pourra avec sûreté négliger la différence qui en résulte.

Scolie III.

(808.) Quoiqu'on ait fait voir (796.) que le temps dont un corps a besoin pour acquérir sa plus grande, ou sa moindre, vitesse, est infini, cependant il ne laisse pas, pour cela, de l'acquérir presque toute dans un temps très-court. Car soit T le temps nécessaire pour acquérir cette vitesse depuis le repos, & t celui qui est nécessaire pour l'acquérir, en commençant à se mouvoir avec la vitesse primitive V: on aura $T=\frac{M}{R}\,log(\frac{\pi}{\pi-Ru})$, & $t=\frac{M}{R}\,log(\frac{\pi-RV}{\pi-Ru})$. Donc le temps qu'il faut au corps pour acquérir la vitesse V, sera .... $T-t=\frac{M}{R}\,log(\frac{\pi}{\pi-Ru})-\frac{M}{R}\,log(\frac{\pi-RV}{\pi-Ru})=\frac{M}{R}\,log(\frac{\pi}{\pi-RV})$. Supposons maintenant que V soit une vitesse un peu moindre que la plus grande vitesse $\frac{\pi}{R}$; soit, par exemple, $V=\frac{\pi}{R}-\frac{\pi}{100R}=\frac{\pi}{R}(1-\frac{1}{100})$, on aura $T-t=\frac{M}{R}\,log(\frac{\pi}{\pi-\pi(1-\frac{1}{100})})=\frac{M}{R}\,log\,100=\frac{M}{R}(4,6)$: de sorte que si $M=R$, on aura $T-t=4''\,36'''$; c'est le temps qu'emploira le corps, depuis le repos, pour acquérir une vitesse qui n'est moindre que la plus grande que de $\frac{1}{100}$. Si l'on a $M=2R$, le temps

sera double ; il sera triple, si $M = 3R$, & ainsi de suite : de sorte que si M étoit cent fois plus grand que R, le temps ne seroit que de 460″, ou 7′ 40″. Pour un parallélipipede rectangle qui flotte, ayant sa base parallele à l'horison, on a $M = mbae$, e exprimant la longueur du parallélipipede, & $R = \frac{1}{4}mba^2$ (642.) : donc $\frac{M}{R} = \frac{3e}{a^2}$, & $T - t = \frac{3}{a^2}\frac{e}{t}$ (4″ 36‴). Si donc on avoit $a = 1$, & $e = 20$, le temps $T - t$ que le paralléiipipede emploiroit à acquérir une vîtesse moindre seulement de $\frac{1}{100}$ que la plus grande, seroit $= 4' 36''$. D'où l'on voit que, dans très-peu de temps, les corps acquierent une vîtesse qu'on peut supposer sans erreur sensible, égale à la plus grande. On dira la même chose de l'expression $D\,log\left(\frac{h-V}{h-u}\right)$, qui donne le temps infini, dans le cas où l'on tient compte de la dénivellation.

PROPOSITION LXI.

(809.) *Trouver la relation entre la vîtesse & l'espace que parcourt un corps flottant, poussé par une puissance dont la direction est horisontale, & qui est placée dans le centre des résistances, en supposant que ce centre coïncide avec celui de gravité.*

On a, par la *Proposition* précédente (792.), $dt = \frac{Mdu}{s - Ru + Qu^2 - Nu^4}$, & par l'*Art.* 29, $dt = \frac{de}{u}$, e exprimant l'espace parcouru. Cette valeur de dt étant donc substituée, donnera $de = \frac{Mudu}{s - Ru + Qu^2 - Nu^4}$, l'on aura donc aussi, comme dans la *Proposition* précédente, ... $de = \frac{(A + Bu)\,du}{f^2 - (g-h)u + u^2} + \frac{Cdu}{g+u} + \frac{Ddu}{h-u}$; D étant $= \frac{Mk}{N(g+h)(2h^2 - g^2 + f^2)}$; $C = \frac{-Mg}{N(g+h)(2g^2 - gh + f^2)}$ * ; $B = D - C$; & $A = C(2g - h) - D(g - 2h)$; d'où l'on tirera, en intégrant, (*Voyez* la Note de l'*Article* 792.) $e = \frac{A + \frac{1}{2}B(g-h)}{f^2 - \frac{1}{4}(g-h)^2}\left(Arc\ tang\left(u - \frac{1}{2}(g-h)\right) - Arc\ tang\left(V - \frac{1}{2}(g-h)\right)\right) + \frac{1}{2}B\,log\left(\frac{f^2 - (g-h)u + u^2}{f^2 - (g-h)V + V^2}\right) + C\,log\left(\frac{g+u}{g+V}\right) + D\,log\left(\frac{h-V}{h-u}\right)$.

COROLLAIRE I.

(810.) Les intégrales avec lesquelles on trouve la valeur de l'espace parcouru e, sont donc les mêmes que celles avec lesquelles on

* Les valeurs de D & de C doivent être telles qu'on les voit ici ; elles sont très-fautives dans l'original.

Digitized by Google

trouve la valeur du temps t, dans lequel il eſt parcouru ; elles ne différent que par les coëfficients conſtants A, B, C, D *.

COROLLAIRE II.

(811.) Le corps ne pourra donc acquérir ſa plus grande, ou ſa moindre, viteſſe, qu'après avoir parcouru un eſpace infini.

COROLLAIRE III.

(812.) Si le corps avoit ſes deux moitiés, choquante & choquée, égales & ſemblables, & ſi l'on négligeoit l'effet de la dénivellation exprimé par Nu^{*}, on auroit $de = \frac{Mu\,du}{v-Ru}$, & par conſéquent $e = \frac{M}{R^2}\left(R(V-u)+\pi\,log\left(\frac{v-RV}{v-Ru}\right)\right)$ **.

COROLLAIRE IV.

(813.) Si la marche du corps commençoit depuis le repos pour parcourir l'eſpace e, on auroit $V=0$; donc alors $e=\frac{M}{R^2}\left(-Ru+\pi log\left(\frac{v}{v-Ru}\right)\right)$.

COROLLAIRE V.

(814.) Si nous ſubſtituons à la place de u ſa valeur $\frac{v}{R}\left(1-\frac{1}{100}\right)$, nous aurons $e=\frac{M}{R^2}\left(-\pi\left(1-\frac{1}{100}\right)+\pi\,(4,6)\right)=\frac{Mv}{R^2}\,(3,61)$.

COROLLAIRE VI.

(815.) L'eſpace parcouru ſera donc en raiſon directe de la puiſſance & de la maſſe, & en raiſon inverſe doublée de la conſtante R qui multiplie les réſiſtances.

---

* L'Auteur dit qu'elles ne different que par les trois coëfficients conſtants A, B & C ; mais cette conſéquence eſt une ſuite de la faute de calcul que nous venons de faire remarquer.

** Pour trouver cette intégrale, il faut employer une méthode analogue à celle que nous avons développée dans la note de l'*Art.* 792. Soit $\frac{Mu\,du}{v-Ru} = Adu + \frac{Bu\,u}{v-Ru}$. En réduiſant le ſecond membre en fraction, diviſant par du, ſupprimant le dénominateur commun, & paſſant tous les termes d'un côté, on aura $vA+B-RAu-Mu=0$. Cette équation devant avoir lieu indépendamment de toute valeur de u, on aura $vA+B=0$, & $-RA-M=0$, d'où l'on tire $A=-\frac{M}{R}$, & $B=\frac{vM}{R}$. Subſtituant ces quantités, on aura $\frac{Mu\,du}{v-Ru}$, ou $de=-\frac{M}{R}du+\ldots$ $\frac{vM}{R}\cdot\frac{du}{v-Ru}$, ou $=-\frac{M}{R}du+\frac{vM}{R^2}\left(\frac{-R\,du}{v-Ru}\right)$; quantité dont le premier terme s'integre exactement, & dont le ſecond s'integre par les logarithmes. Intégrant donc, on aura . . . . . $e=-\frac{M}{R}u-\frac{Mv}{R^2}\,log\,(v-Ru)+K$. Or cette intégrale doit être zéro au commencement de l'action, temps auquel la viteſſe u eſt égale à la viteſſe initiale V. Donc $K=\frac{M}{R}V+\frac{vM}{R^2}lo\;g(v-V)$ & par conſéquent $e=\frac{M}{R^2}\left(R(V-u)+v\,log\left(\frac{v-RV}{v-Ru}\right)\right)$.

Digitized by Google

PROPOSITION LXII.

(816.) *Trouver la viteſſe des Lames.*

La puiſſance qui agit dans les Lames, eſt la gravité de la Lame même. Si une partie de la ſuperficie d'un Fluide s'éleve par quelque cauſe que ce ſoit, après qu'elle a acquis ſa plus grande élevation, ſa gravité l'oblige de deſcendre, & lui fait prendre une diſpoſition & une figure vers le bas, qui eſt égale à celle qu'elle avoit priſe vers le haut; puiſque l'action & la réaction ſont égales; c'eſt-à-dire, qu'elle forme au-deſſous de la ſuperficie du Fluide un enfoncement dont la figure eſt abſolument la même que celle de l'élevation : d'où il s'enſuit que dans les Lames *ABCDEFG*, la partie
FIG. 73. *ABC* qui s'éleve au-deſſus du niveau *AG*, eſt égale & ſemblable à la partie *CDE*, celle-ci à *EFG*, & ainſi des autres. Le mouvement de la Lame conſiſte donc en ce que le point *D* s'éleve en *H*, auquel cas on dit que la Lame a parcouru l'eſpace de *B* en *H*, ou de *I* en *D*; & cette élevation dépend du poids de la colonne *BI*, qui doit mettre en mouvement la maſſe *BID*. Soit donc la hauteur $BI = a$; la moitié *ID* de l'amplitude de la Lame $= b$; la partie dont cette Lame eſt déjà abaiſſée; c'eſt-à-dire, $BK = DL = x$; t le temps, & u la viteſſe des points *K* ou *L*. Cela poſé, nous aurons (19 & 47.) $32(a-2x)\,dt = (a+b)\,du$, &, en ſubſtituant à la place de dt ſa valeur $\frac{dx}{u}$, $32(a-2x)\,dx = (a+b)\,udu$, d'où l'on tirera, en intégrant, $64(ax-x^2) = (a+b)\,u^2$, ou $u = \frac{dx}{dt} = \frac{8(ax-x^2)^{\frac{1}{2}}}{(a+b)^{\frac{1}{2}}}$. Cette derniere équation donne $dt = \frac{(a+b)^{\frac{1}{2}}\,dx}{8(ax-x^2)^{\frac{1}{2}}}$, &, en intégrant, $t = \frac{(a+b)^{\frac{1}{2}}}{8.\frac{1}{2}a}$ *Arc BM* *, *BMI* étant un demi-cercle décrit ſur le diametre $BI = a$. Lorſque le point *K* s'abaiſſe en *I*, & que le point *L* s'éleve en *H*, l'Arc *BM* devient tout le demi-cercle *BMI*, & dans ce cas le rapport $\frac{Arc\ MB}{\frac{1}{2}a}$ eſt celui de la demi-circonférence au rayon. Ce rapport étant donc repréſenté par c, on aura $\frac{1}{8}(a+b)^{\frac{1}{2}}c$, pour l'expreſſion de tout le temps dans le-

(* En mettant la valeur de dt ſous cette forme $\frac{(a+b)^{\frac{1}{2}}}{8.\frac{1}{2}a} \cdot \frac{\frac{1}{2}adx}{(ax-xx)^{\frac{1}{2}}}$, on voit que le ſecond facteur eſt l'élément d'un Arc de cercle dont a eſt le diametre, & x le ſinus verſe. (*Voyez* la premiere Note de *l'Art.* 365.).

Digitized by Google

quel le point *B* s'abaiſſe en *I*, & dans lequel le point *B* s'éleve en *H*, ou pour celui dans lequel *B* paſſe en *H*. Ce temps eſt le même que celui qu'un pendule de la longueur $\frac{a+b}{2}$ emploie à faire une oſcillation (369.). Ce temps $\frac{1}{4}(a+b)^{\frac{1}{2}}c$, eſt à une ſeconde, comme la longueur, ou l'eſpace $ID=b$ que la Lame parcourt dans ce temps, eſt à $\frac{8b}{(a+b)^{\frac{1}{2}}c}$; eſpace que parcourra la Lame dans une ſeconde de temps, & qui indique par conſéquent ſa véritable vîteſſe (28.).

COROLLAIRE I.

(817.) Le temps $\frac{1}{4}(a+b)^{\frac{1}{2}}c$, eſt à un autre temps quelconque $\frac{(a+b)^{\frac{1}{2}}}{8.\frac{1}{2}a}$ *Arc BM*, que le point *B* emploie à paſſer de *B* en *N*, comme l'eſpace *b* que parcourt la Lame pendant ce temps, eſt à l'eſpace $BN=\frac{b.Arc\,BM}{c.\frac{1}{2}a}$; de ſorte que ſi nous faiſons $BN=y$, nous aurons $y=\frac{b.Arc\,BM}{c.\frac{1}{2}a}$; équation de la Lame, ou de la courbe *BOC*, qui eſt une eſpece de cycloïde.

SCOLIE I.

(818.) La relation entre *a* & *b* eſt différente dans les Lames, ſelon qu'elles vont en augmentant, ou en diminuant. La force du vent fait toujours augmenter les premieres, & le rapport $\frac{a}{b}$ eſt plus grand que dans les ſecondes, qui ſont celles qui ſubſiſtent après que le vent a diminué, ou qu'il a ceſſé entiérement *. Dans ces dernieres Lames la quantité *b* peut être beaucoup de fois plus grande que *a*, parce que *b* demeurant conſtante, *a* diminue continuellement juſqu'à devenir égale à zéro. Si, dans les premieres Lames, ou dans celles qui ſont parvenues à tout l'accroiſſement poſſible, à l'égard du vent qui les occaſionne, on ſuppoſe que le mouvement du point *B* vers *H*, ſe réduiſe à l'application continuelle, ou à la rotation, du cercle *BMI* ſur la droite *ID*, nous aurons $PC=\frac{1}{4}BPI=\frac{1}{4}ac$ (365, *Note Ire.*), & $ID=b=a+\frac{1}{4}ac=a(1+\frac{1}{4}c)$. Le plus grand rapport $\frac{a}{b}$ ſera donc, dans cette

* Les Marins Eſpagnols appellent *Picadas*, ou *Olas Picadas*, les Lames qui vont en augmentant, par l'augmentation de la viteſſe du vent; & ils nomment *Olas de Leva*, ou *Mares de Leva*, celles qui ſubſiſtent après que le vent qui les a produites eſt diminué, ou même après qu'il s'eſt entiérement calmé. Il eſt viſible que ces dernieres ſont de la ſeconde eſpece, & vont toujours en diminuant.

Digitized by Google

suppoſition, $\frac{a}{a(1+\frac{1}{a}c)} = \frac{1}{1+\frac{1}{a}c} = \frac{1}{2,57}$: tous les autres rapports ſeront moindres, & iront en diminuant juſqu'à l'infini, dans toutes les autres Lames.

SCOLIE II.

(819.) *Newton*, dans ſa *Philoſophie Naturelle*, *Liv. II*, *Propoſition XLVI*, néglige la valeur de a; or, en négligeant d'avoir égard à cette quantité, la viteſſe de la Lame eſt $= \frac{8b^{\frac{1}{2}}}{c}$, & ſuit la raiſon des racines quarrées de ſes amplitudes, comme le dit cet illuſtre Auteur.

CHAPITRE X.

Des Moments que les corps éprouvent dans leur mouvement progreſſif horiſontal.

PROPOSITION LXIII.

(820.) *TROUVER les moments qu'éprouve un Corps qui ſe meut horiſontalement dans un Fluide.*

La réſiſtance eſt une action, ou force, par laquelle le Fluide agit ſur le corps; on peut par conſéquent la regarder comme une puiſſance. Donc ſi l'on multiplie les différentes actions, ou réſiſtances, que le Fluide exerce ſur chaque différencielle de la ſurface du corps, ſuivant des directions perpendiculaires aux plans qui, paſſant par ces différencielles, coïncident avec l'axe de rotation; ſi l'on multiplie, dis-je, ces différentes actions par leurs diſtances à ce même axe, la ſomme des produits ſera celle des moments.

SCOLIE.

(821.) Les moments peuvent être conſidérés, ou peuvent être calculés, par rapport à trois axes, deux horiſontaux perpendiculaires entre eux, & le troiſieme vertical; les deux premiers peuvent même être pris arbitrairement. Nous nous bornerons cependant dans nos recherches à trouver les moments qui ont lieu à l'égard d'un axe horiſontal perpendiculaire à la direction du mouvement, parce que, quelle que puiſſe être cette direction, on peut toujours la décompoſer en deux autres perpendiculaires à deux axes donnés.

Digitized by Google

PROPOSITION LXIV.

(822.) *Trouver les moments qu'éprouve un corps flottant quelconque qui se meut horisontalement dans un Fluide immobile.*

Soit diviſé la ſurface du corps, par des plans horiſontaux & verticaux, en petits quadrilateres ſenſiblement plans; & ſoit calculé la force qui agit ſur chacun dans une direction perpendiculaire au plan qui, paſſant par le même petit quadrilatere, coïncide avec l'axe horiſontal de rotation. Multipliant enſuite cette force par la diſtance du petit quadrilatere à l'axe, le produit ſera le moment qu'éprouve ce petit quadrilatere. Sommant donc tous les moments qui proviennent de tous les petits quadrilateres, on aura celui qu'éprouve tout le corps.

La force horiſontale qui agit ſur un petit quadrilatere a été trouvée (624.) $= mc\left(Da \pm \frac{1}{6}u\,\mathrm{ſin}\,\theta\left(\left(D+\frac{1}{2}a\right)^{\frac{1}{2}}-\left(D-\frac{1}{2}a\right)^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{64}u^2a\,\mathrm{ſin}\,\theta^2\right)$: donc (613.) celle qu'il éprouve dans une direction perpendiculaire au plan qui, paſſant par le même petit quadrilatere, coïncide avec l'axe, ſera $= \frac{mb\,\mathrm{ſin}\,x}{\mathrm{ſin}\,\theta}\left(Da \pm \frac{1}{6}u\,\mathrm{ſin}\,\theta\left(\left(D+\frac{1}{2}a\right)^{\frac{1}{2}}-\left(D-\frac{1}{2}a\right)^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{64}u^2a\,\mathrm{ſin}\,\theta^2\right)$: x exprimant le complément de l'angle que forme le petit quadrilatere avec le plan qui, paſſant par ce quadrilatere, coïncide avec l'axe *; u étant la viteſſe horiſontale, & θ l'angle que forme le petit quadrilatere avec la direction du mouvement. Multipliant cette force par r, diſtance du petit quadrilatere à l'axe, le moment qu'il éprouvera, ſera exprimé par . . . . . .

$$\frac{mbr\,\mathrm{ſin}\,x}{\mathrm{ſin}\,\theta}\left(Da \pm \frac{1}{6}u\,\mathrm{ſin}\,\theta\left(\left(D+\frac{1}{2}a\right)^{\frac{1}{2}}-\left(D-\frac{1}{2}a\right)^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{64}u^2a\,\mathrm{ſin}\,\theta^2\right).$$

COROLLAIRE I.

(823.) Les moments qu'éprouvent les petits quadrilateres, & qui ſont produits par les deux dénivellations, ſeront (625.) $= \frac{mbr\,\mathrm{ſin}\,x}{\mathrm{ſin}\,\theta}\left(Da - \frac{1}{6}u\,\mathrm{ſin}\,\theta\left(\left(D+\frac{1}{2}a\right)^{\frac{1}{2}}-\left(D-\frac{1}{2}a\right)^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{64}u^2a\,\mathrm{ſin}\,\theta^2\right)$, & tous les deux ſont poſitifs**. Donc, pour avoir égard à la dénivellation

---

* L'angle x que la direction ſuivant laquelle on a décompoſé la force, forme avec le petit quadrilatere ſur lequel elle agit (571.), eſt le complément de celui que forme le petit quadrilatere, avec le plan qui, paſſant par ce quadrilatere, coïncide avec l'axe; car la direction de la force faiſant un angle droit avec ce dernier plan (820.), les deux autres angles ne doivent valoir enſemble qu'un angle droit. Donc, &c.

** Car ſi, par exemple, l'augmentation de force, dans la partie choquante, qui provient de la dénivellation, tend à faire tourner le corps, en lui élevant ſon extrémité choquante, il eſt évident

Digitized by Google

du Fluide, il faudra les ajouter à ceux qu'on a déterminés ci-dessus.

COROLLAIRE II.

(824.) En décomposant les forces, & par conséquent les moments relatifs à un axe horisontal, on peut les distinguer en moments horisontaux & en moments verticaux. Les moments horisontaux seront le produit des forces horisontales qui agissent sur les petits quadrilateres, par leur distance verticale au plan horisontal qui passe par le centre de gravité; & les moments verticaux seront le produit des forces verticales, qui agissent sur les mêmes petits quadrilateres, par leur distance horisontale au plan vertical qui passe par le centre de gravité.

COROLLAIRE III.

(825.) En décomposant de même les forces, & par conséquent les moments qui en résultent relativement à un axe vertical, on peut réduire ces moments à deux autres, avec des directions perpendiculaires entre elles, & toutes deux par rapport au même axe.

COROLLAIRE IV.

(826.) Si le plan vertical coïncidant avec l'une de ces directions, coupoit le corps en deux parties égales & semblables, les moments qui résulteroient par rapport à cette direction, se détruiroient réciproquement, parce que les moments positifs d'un côté se trouveroient égaux aux moments négatifs de l'autre.

PROPOSITION LXV.

(827.) *Trouver les moments relatifs à un axe vertical, qu'éprouve un corps flottant quelconque, qui se meut horisontalement dans une direction perpendiculaire au plan vertical qui partage le corps en deux parties égales & semblables.*

La force horisontale qui agit sur un petit quadrilatere quelconque, ou sur une des différenci-différencielles, dans lesquelles on

que la diminution de force dans la partie choquée, qui provient de la même cause, tend à abaisser l'extrémité choquée; puisque le moment de la force qui agit sur la partie choquée, est négatif, & que la diminution d'une quantité négative produit le même effet que l'augmentation d'une quantité positive. L'extrémité choquante s'élevera donc encore, en vertu de la dénivellation dans la partie choquée: donc les momens qui proviennent des deux dénivellations sont conspirants, c'est-à-dire, sont tous deux positifs. On raisonnera de même pour tous les autres cas.

divise

diviſe la ſurfacé du corps, eſt (624.) = ... $mc\left(Da \pm \frac{1}{5}u\,\mathit{ſin}\,\theta\left((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}-(D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right)+\frac{3}{64}u^2\,\mathit{a\,ſin}\,\theta^2\right)$; ou, en ſubſtituant x pour D, & dx pour a, en ſuppoſant que x déſigne la diſtance verticale du petit quadrilatere à la ſuperficie du Fluide, ou la profondeur à laquelle il eſt enfoncé dans le Fluide, & dx la hauteur de ce petit quadrilatere ; cette expreſſion deviendra = $mcdx(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{5}u\,\mathit{ſin}\,\theta)^2$, (626 & 627) : ou bien parce qu'on ſuppoſe la partie choquante du corps égale & ſemblable à la partie choquée, la réſiſtance des deux petits quadrilateres correſpondants ſera (655.) = $\frac{1}{2}mcux^{\frac{1}{2}}dx\,\mathit{ſin}\,\theta$. Si donc y déſigne la diſtance horiſontale de l'axe à la ligne qui joint les deux petits quadrilateres, le moment qu'ils éprouveront ſera = $\frac{1}{2}mcuyx^{\frac{1}{2}}dx\,\mathit{ſin}\,\theta$; quantité dont l'intégrale $\frac{1}{3}mu\int cyx^{\frac{1}{2}}dx\,\mathit{ſin}\,\theta$ exprimera le moment qu'éprouve tout le corps.

COROLLAIRE.

(828.) Les momens qu'éprouvent les petits quadrilateres, & qui proviennent des deux dénivellations, ſeront = $mcydx(x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{5}u\,\mathit{ſin}\,\theta)^2$.

DÉFINITION III.

(829.) On appelle *Stabilité* les moments qu'éprouve un corps à l'égard d'un axe horiſontal ; parce que ce ſont ces moments qui agiſſent pour maintenir le corps dans l'état où il ſe trouvoit auparavant.

PROPOSITION LXVI.

(830.) *Trouver la Stabilité d'un corps flottant quelconque, ou les moments qu'il éprouve, lorſqu'il ſe meut horiſontalement dans une direction perpendiculaire à l'axe horiſontal de rotation.*

La force horiſontale qui agit ſur un petit quadrilatere quelconque, eſt, par ce qu'on vient de voir, = $mcdx(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{5}u\,\mathit{ſin}\,\theta)^2$. Suppoſons maintenant que k repréſente la profondeur verticale à laquelle le centre de gravité du corps eſt abaiſſé au-deſſous de la ſuperficie du Fluide, il eſt clair que $k-x$ ſera la diſtance verticale du même centre de gravité au plan horiſontal qui paſſe par le petit quadrilatere *. Donc $mcdx(k-x)(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{5}u\,\mathit{ſin}\,\theta)^2$ ſera l'expreſſion du moment horiſontal qu'éprouvera ce petit quadrilatere. Pareillement ſi l'on nomme y

* Cette expreſſion paroît ſuppoſer k plus grand que x, ou que le petit quadrilatere eſt plus proche de la ſuperficie du Fluide que le centre de gravité du corps ; mais elle n'en convient pas moins au cas, où il en ſeroit plus éloigné ; car alors $k-x$ eſt négatif, ce qui eſt concevable, puiſque le moment horiſontal doit auſſi l'être.

Digitized by Google

l'ordonnée du corps, ou la distance horisontale du petit quadrilatere au plan vertical qui coïncide avec l'axe de rotation, on aura $mcdy(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{3}u\,sin\,\theta)^2$ pour l'expression de la force verticale qui agit sur ce quadrilatere (556.), & par conséquent son moment vertical sera $= mcydy(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{3}u\,sin\theta)^2$: donc la totalité des moments qu'éprouvera le corps sera $= m\int cydy\,(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{3}u\,sin\,\theta)^2 + m\int cdx\,(k - x)\,(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{3}u\,sin\,\theta)^2$.

COROLLAIRE I.

(831.) Les moments qui résultent des dénivellations seront par conséquent $m\int cydy\,(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}u\,sin\,\theta)^2 + m\int cdx\,(k \pm x)\,(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}u\,sin\,\theta)^2$, le signe + ayant lieu pour la partie choquante, & le signe — pour la partie choquée *.

COROLLAIRE II.

(832.) Si le plan vertical qui coïncide avec l'axe, partage le corps en deux moitiés égales & semblables, la somme des moments de deux petits quadrilateres correspondants dans l'une & l'autre moitié sera $= \frac{1}{2}m\int cux^{\frac{1}{2}}ydy\,sin\,\theta + \frac{1}{2}m\int cu(k-x)x^{\frac{1}{2}}dx\,sin\,\theta$.

COROLLAIRE III.

(833.) Si y exprime l'ordonnée de la partie choquante, & Y celle de la partie choquée ; les moments de cette derniere étant négatifs, on aura l'expression suivante pour les moments qu'éprouve le corps;

$mcydy\,(x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}u\,sin\,\theta)^2 - mcYdY\,(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}u\,sin\,\Theta)^2$ . . . . . .

$+ mcdx(k-x)\left(\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}u(sin\,\theta + sin\,\Theta)\right) + \frac{1}{64}u^2\,(sin\,\theta^2 - sin\,\Theta^2)$, θ & Θ exprimant les angles que forment les petits quadrilateres avec la direction du mouvement, tant dans la partie choquante que dans la partie choquée.

COROLLAIRE IV.

(834.) Si l'on a $u = 0$, ou si le corps n'a point de mouvement horisontal, les moments se réduiront aux seuls moments verticaux $\int mcyxdy - \int mcYxdY = \int mcx\,(ydy - YdY)$.

---

* Il est essentiel de se rappeller ici que la quantité x est seulement relative à la hauteur de la dénivellation, & $= \frac{1}{64}u^2\,sin\,\theta^2$, (594) ; ainsi cette lettre n'exprime point la même grandeur que dans l'expression des moments du corps qui proviennent des résistances. On appliquera cette remarque aux *Articles* 823 & 828.

Digitized by Google

Corollaire V.

(835.) La quantité $mfcx\,(ydy - YdY)$, eſt égale au produit du poids de tout le corps, par la diſtance horiſontale du centre de gravité à la verticale qui paſſe par le centre du volume *. Donc ſi nous appellons P le poids de tout le corps, & h la diſtance horiſontale du centre de gravité à la verticale qui paſſe par celui du volume, on aura $mfcx\,(ydy - YdY) = hP$. PLANC. III.

Corollaire VI.

(836.) Ces moments verticaux $mfcx\,(ydy - YdY) = hP$ peuvent être poſitifs, ou négatifs, ſelon que $fcxydy$ ſera plus grand, ou plus petit qne $fcxYdY$; ou ſelon que la verticale qui paſſe par le centre du volume, paſſera entre le centre de gravité & la partie choquante, ou entre ce même centre & la partie choquée.

Corollaire VII.

(837) Si donc on avoit $fcxydy = fcxYdY$, les moments verticaux ſeroient zéro.

Corollaire VIII.

(838.) Dans les corps formés par la révolution d'un plan quelconque autour d'un axe horiſontal H, la verticale QH, qui paſſe par le centre du volume, paſſe auſſi par ce même axe : donc, en nommant K la diſtance HO du centre de volume au centre de gravité O, & Δ l'angle QHO, la diſtance de O à la verticale QH ſera $= h = K\,\mathrm{ſin}\,\Delta$, & $hP = KP\,\mathrm{ſin}\,\Delta$. FIG. 62.

Corollaire IX.

(839.) Dans les corps qui ne ſont point formés par la révolution d'un plan quelconque autour d'un axe horiſontal, on ne laiſſera pas d'avoir $hP = KP\,\mathrm{ſin}\,\Delta$; mais K ſera variable ſuivant les différentes inclinaiſons Δ que peut prendre le corps.

Corollaire X.

(840.) Si le centre de volume H étoit plus bas que le centre

* Car le moment qui réſulte de la ſomme des moments verticaux, ou le moment vertical total, eſt égal à la réſultante des forces verticales, ou à la force verticale totale, multipliée par la diſtance horiſontale de ſa direction à la verticale qui paſſe par le centre de gravité du corps. Or la force verticale totale eſt (561.) égale au poids du volume de Fluide que le corps déplace, ou (562.) égale au poids de tout le corps; & elle paſſe par le centre du volume déplacé : donc, &c.

Digitized by Google

PLANC. IV. de gravité, K seroit alors négatif, & par conséquent le moment $KP \sin \Delta$ le seroit aussi.

SCOLIE.

(841.) Il est nécessaire de ne pas perdre de vue, que les moments qui proviennent du poids du corps doivent être pris dans leur entier, parce que le poids est réel & positif; ils different par conséquent des moments qui proviennent des résistances, parce que celles-ci doivent être réduites aux deux tiers (644.). Ainsi, dans le cas où il sera question de combiner ces moments les uns avec les autres, on aura attention de réduire aux deux tiers toute quantité qui sera multipliée par la viteſſe u.

PROPOSITION LXVII.

(842.) *Trouver en général le moment qu'éprouve un corps quelconque qui est sans mouvement, & est composé de deux moitiés egales & semblables, séparées l'une de l'autre par un plan qui coïncide avec l'axe horisontal.*

FIG. 74. Soit ABD le corps composé de deux moitiés égales & semblables ABE, DBE; & C son centre de gravité. Soit de plus BCE perpendiculaire à la droite AD, cette ligne AD étant supposée coïncider avec la superficie du Fluide, lorsque le corps est droit, ou que la ligne BCE est verticale. Supposons maintenant que le corps soit dans une situation inclinée, GL étant la superficie du Fluide; & soit tiré les verticales MC, FN, la premiere passant par le centre de gravité C, & la seconde par le centre F, qui est celui du volume du corps, lorsqu'il se trouve dans une situation droite. Cela posé, faisant $AD = e$, $CE = k$, $CF = \pm H$, & l'angle de l'inclinaison $MCE = CFN = LED = \Delta$; l'horisontale CN sera $= H \sin \Delta$; $EM = k \sin \Delta$; & l'aire du triangle DEL, ou AEG, sera $= \frac{1}{6} e^2 \sin \Delta$ *, DL, ou AG étant sensiblement des lignes droites. Le moment qu'éprouvera toute la partie ABD du corps, le poids de cette partie étant P, sera $\pm CN.P = \pm HP \sin \Delta$: & celui qu'éprouvera le triangle LED sera $= m(\frac{1}{3} EL + EM) \frac{1}{6} e^2 \sin \Delta =$

* Car, en abaissant la perpendiculaire DS sur la ligne EL, on aura $1 : ED :: \sin LED : DS$, ou $1 : \frac{1}{2}e :: \sin \Delta : DS = \frac{1}{2} e \sin \Delta$. Donc le triangle $DEL = \frac{EL.DS}{2} = \frac{\frac{1}{2}e.\frac{1}{2}e \sin \Delta}{2} = \frac{1}{8} e^2 \sin \Delta$ Dans les inclinaisons infiniment petites, le point S est sensiblement confondu avec le point L,

Digitized by Google

$mt(\frac{1}{3}e + k \sin\Delta)\frac{1}{4}e^2 \sin\Delta$ * ; enfin celui qu'éprouvera le triangle AEG ſera $= m(\frac{1}{3}EG - EM)\frac{1}{4}e^2 \sin\Delta = m(\frac{1}{3}e - k \sin\Delta)\frac{1}{4}e^2 \sin\Delta$. Ainſi la ſomme de tous les moments qu'éprouvent les triangles tels que LED dans toute la longueur du corps, ſera $= \frac{m}{8}\int ce^2 \sin\Delta(\frac{1}{3}e + k \sin\Delta)$: & la ſomme de tous ceux qui correſpondent aux triangles tels que AEG, ſera $= \frac{m}{8}\int ce^2 \sin\Delta(\frac{1}{3}e - k \sin\Delta)$. Or la ſomme de tous ces moments étant jointe au moment $\pm HP \sin\Delta$, eſt le moment total qu'éprouve le corps ** : donc ce moment ſera $= \pm HP \sin\Delta + m\int\frac{1}{3}ce^2 \sin\Delta(\frac{1}{3}e + k \sin\Delta) + m\int\frac{1}{3}ce^2 \sin\Delta(\frac{1}{3}e - k \sin\Delta) = \ldots\ldots$ $(\pm HP + \frac{m}{12}\int e^3 c)\sin\Delta$ ***.

* Car la diſtance Eg du centre de gravité g du triangle LED au point E, eſt égale à $\frac{1}{3}EL$; mais, puiſqu'on ſuppoſe l'inclinaiſon infiniment petite, $Eg = En$; donc la diſtance du centre de gravité g du triangle LED à la verticale CM qui paſſe par le centre de gravité, eſt égal à $En + EM = \frac{1}{3}EL + EM$, &c.

** Pour voir clairement la raiſon pour laquelle l'Auteur ajoute les moments des deux triangles LED, AEG, au moment $\pm HP \sin\Delta$ qu'éprouve la partie ABD, qui étoit ſubmergée lorſque le corps étoit dans une ſituation droite, on décompoſera le volume actuellement ſubmergé GBL, de maniere qu'il comprenne le volume ABD, ce qui donnera $GBL = ABD + LED - AEG$; d'où l'on voit que, pour avoir le moment qui agit ſur GBL, il faut ajouter enſemble les moments qui agiſſent ſur ABD & ſur LED, & retrancher de leur ſomme le moment qui agit ſur AEG. Mais on vient de voir que le moment de $ABD = \pm HP \sin\Delta$, le ſigne + ayant lieu lorſque le centre de volume eſt plus haut que celui de gravité, comme on le ſuppoſe dans la Figure, parce que la force verticale du Fluide, paſſant par le point F (562.), tend à redreſſer le corps (836.) avec une énergie, ou un moment repréſenté par $HP \sin\Delta$. Au contraire le ſigne — a lieu lorſque le centre de volume eſt plus bas que celui de gravité, parce qu'alors la quantité H eſt négative (840.), & que la force verticale de l'eau tend à renverſer le corps ; & elle le renverſeroit en effet, s'il n'étoit retenu par l'action d'autres moments qui agiſſent pour le rétablir dans la ſituation droite, leſquels doivent être plus puiſſants que le moment $HP \sin\Delta$, pour que le corps ait de la ſtabilité. Le moment du triangle LED qui eſt ſubmergé par l'inclinaiſon $= m(\frac{1}{3}e + k \sin\Delta)\frac{1}{3}e^3 \sin\Delta$; & ce moment eſt toujours poſitif, parce que l'action verticale de l'eau agiſſant de bas en haut ſur le centre de gravité g de ce triangle, tend à redreſſer le corps, ou à diminuer ſon inclinaiſon. Enfin le moment qui correſpond au triangle AEG qui eſt ſorti du Fluide, eſt $= m(\frac{1}{3}e - k \sin\Delta)\frac{1}{4}e^3 \sin\Delta$. Ce moment eſt toujours négatif, puiſque le centre de gravité de ce triangle eſt ſitué de l'autre côté de l'axe de rotation ; mais, comme on vient de le voir, ce moment eſt à retrancher de la ſomme des deux moments qu'on vient de conſidérer, il s'enſuit qu'il agira encore poſitivement, c'eſt-à-dire, qu'il concourra avec celui du triangle LED, pour rétablir le corps dans la ſituation droite. Donc la ſomme des moments qui agiſſent ſur $GBL = \pm HP \sin\Delta + m(\frac{1}{3}e + k \sin\Delta)\frac{1}{3}e^3 \sin\Delta + m(\frac{1}{3}e - k \sin\Delta)\frac{1}{3}e^3 \sin\Delta$. Donc, &c.

On voit, d'après ce que nous venons de dire, que le corps a toujours de la ſtabilité, lorſque le centre de gravité tombe au-deſſous du centre de volume, c'eſt-à-dire, qu'il ne peut manquer de revenir dans une ſituation droite, lorſqu'ayant reçu une inclinaiſon infiniment petite, il eſt abandonné à lui-même. Mais lorſque le centre de gravité eſt au-deſſus de celui de volume, ce qui ne peut gueres manquer d'avoir lieu dans les Vaiſſeaux, le corps peut manquer de ſtabilité, ſelon la valeur du moment $-HP \sin\Delta$.

*** La lettre c repréſente l'intervalle entre un triangle & le ſuivant, ou la hauteur des petits priſmes triangulaires compris entre deux triangles conſécutifs.

Digitized by Google

SCOLIE I.

(843.) On a supposé dans le calcul que les deux lignes AD, GL, se coupent sur la ligne BE, ce qui, pour l'ordinaire, n'arrivera pas; mais, en supposant que l'inclinaison soit infiniment petite, on pourra faire cette supposition sans erreur sensible; & il est nécessaire que l'inclinaison soit telle, pour qu'en général on puisse prendre AG & DL pour des lignes droites.

COROLLAIRE I.

(844.) Puisqu'on vient de voir que, dans des inclinaisons infiniment petites, le corps étant arrêté, le moment est $= (HP + \frac{m}{12} fc^3c) \sin\Delta$: & ayant vu pareillement (835.) que ce moment est dans le même cas $= mfcx(ydy - YdY) = hP$; on aura, par conséquent, dans les inclinaisons infiniment petites, $(HP + \frac{1}{12} fc^3c) \sin\Delta = mfcx(ydy - YdY) = hP = KP \sin\Delta$.

COROLLAIRE II.

(845.) Substituant cette valeur de $mfcx(ydy - YdY)$ dans l'expression du moment, lorsque le corps est en mouvement, ce moment sera encore exprimé dans le cas des inclinaisons infiniment petites, par $(PH + \frac{1}{12} fc^3c) \sin\Delta + \frac{1}{4} mufcx^2(ydy \sin\theta + YdY \sin\Theta) + \frac{1}{64} mu^2 fc(ydy \sin\theta^2 - YdY \sin\Theta^2) + \frac{1}{4} mufcx^2 dx(k-x)(\sin\theta + \sin\Theta) + \frac{1}{64} mu^2 fcdx(k-x)(\sin\theta^2 - \sin\Theta^2)$.

COROLLAIRE III.

(846.) Comme on suppose le corps composé de deux moitiés égales & semblables, & que les inclinaisons sont infiniment petites; le troisieme & le cinquieme terme de l'équation ci-dessus peuvent être supposés égaux à zéro, sans qu'il en résulte aucune erreur sensible *; ce qui réduira le moment à $(HP + \frac{1}{12} mfc^3c) \sin\Delta + \frac{1}{4} mufcx^2 ydy \sin\theta + \frac{1}{4} mufcx^2 dx(k-x) \sin\theta$; les moments qu'éprouve le corps étant exprimés par la quantité $\frac{1}{4} mufcx^2 ydy \sin\theta$, & ... $\frac{1}{4} mufcx^2 dx(k-x) \sin\theta$, exprimant les moments horisontaux.

* Ceci seroit rigoureusement vrai, s'il n'y avoit point d'inclinaison, parce qu'alors $\sin\theta = \sin\Theta$ (669.); mais on voit que ces sinus doivent différer très-peu, puisqu'on suppose l'inclinaison infiniment petite.

Digitized by Google

Scolie II.

(847.) On doit ajouter à ces moments ceux qui réſultent de la dénivellation, à moins qu'ils ne ſoient ſuſceptibles d'être négligés. Il en eſt de même de ceux qui pourroient réſulter de l'action des ſurfaces les unes ſur les autres.

Scolie III.

(848.) MM. *Léonard Euler* & *Bouguer*, qui ſont les Auteurs qui ont traité ce ſujet avec le plus d'étendue, n'ont cependant calculé que les moments qui ont lieu dans le cas où le corps eſt en repos, ou lorſque $u=0$. Les formules ci-deſſus manifeſtent la différence qu'il peut y avoir d'un cas à l'autre. Dans le cas où le corps eſt en repos, le moment eſt ſeulement $=(HP+\frac{1}{10}mfe^3c)\,fin\,\Delta$, & dans celui où le corps eſt en mouvement, il eſt $=\ldots\ldots$ $(PH+\frac{1}{10}mfe^3c)\,fin\,\Delta+\frac{1}{2}mu\int cx^{\frac{1}{2}}y\,dy\,fin\,\theta+\frac{1}{2}mu\int cx^{\frac{1}{2}}dx(k-x)fin\,\theta$; u ayant une valeur un peu conſidérable, la différence entre ces deux expreſſions eſt très-grande.

Proposition LXVIII.

(849.) *Trouver les moments qu'éprouve un parallélipipede rectangle qui flotte ſur un Fluide, ayant deux de ſes côtés paralleles à l'horiſon, le parallélipipede ſe mouvant horiſontalement, dans une direction parallele à deux de ſes côtés verticaux.*

Le moment vertical qu'éprouvent les côtés verticaux eſt zéro, à cauſe que pour eux $dy=0$. Le moment horiſontal $\ldots\ldots$ $m\int cdx\,(k-x)\,(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}u\,(fin\,\theta+fin\,\odot)+\frac{1}{64}u^2\,(fin\,\theta^2-fin\,\odot^2))$ ſe réduit à $m\int cdx\,(k-x)\,\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}u=mcu\,(\frac{1}{3}kx^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{7}x^{\frac{7}{2}})$, à cauſe que $fin\,\theta=fin\,\odot=1$. Les moments qu'éprouve la baſe ſont zéro, parce que pour elle on a $dx=0$, $fin\,\theta=fin\,\odot=0$, $y=Y$, & $dy=dY$. Enfin ceux qui proviennent de la dénivellation, ſont, à cauſe de $dy=0$, & de $fin\,\theta=fin\,\odot=1$, ſont, dis-je, dans l'une & l'autre ſurface $=m\int cdx^4\,(k\pm x)\,(x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{16}u)^2$, & pour toutes les deux réunies, $=2m\int cdxk\,(x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{16}u)^2=2mck\,(\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}}u+\frac{1}{64}u^2x)$; expreſſion qui ſe réduit à $\frac{mcku^4}{3.64^2}$, en ſubſtituant $\frac{1}{16}u$ pour $x^{\frac{1}{2}}$ (594 & 831, *Note*); de ſorte que tous les moments qu'éprouve le parallélipipede, ſont $=mc\,(\frac{1}{3}k(x^{\frac{3}{2}}u+\frac{u^4}{64^2})-\frac{1}{7}x^{\frac{7}{2}}u)$, ou, en mettant a pour toute la hauteur

Digitized by Google

verticale submergée dans le Fluide, ces moments seront = ... $mc\left(\frac{1}{3}k\left(a^{\frac{1}{2}}u+\frac{u^4}{64^2}\right)-\frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}u\right)$.

COROLLAIRE I.

(850.) Puisque $mc\left(\frac{1}{3}k\left(a^{\frac{1}{2}}u+\frac{u^4}{64^2}\right)-\frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}u\right)$ exprime les moments horisontaux, en les divisant par les résistances horisontales (640.) $\frac{1}{3}mc\left(a^{\frac{1}{2}}u+\frac{a^4}{64^2}\right)$, on aura la distance du centre de gravité à celui des résistances horisontales $= k-\frac{3a^{\frac{1}{2}}}{5\left(a^{\frac{1}{2}}+\frac{u^3}{64^2}\right)}$, & par conséquent la distance de ce dernier centre à la superficie du Fluide $=\frac{3a^{\frac{1}{2}}}{5\left(a^{\frac{1}{2}}+\frac{u^3}{64^2}\right)}$.

COROLLAIRE II.

(851.) Ces moments seront positifs, & obligeront le parallélipipede à tourner, en élevant son extrêmité choquante, si l'on a $k>\frac{3a^{\frac{1}{2}}}{5\left(a^{\frac{1}{2}}+\frac{u^3}{64^2}\right)}$; au contraire, ils seront négatifs, & obligeront le parallélipipede à tourner, en abaissant son extrêmité choquante, si l'on a $k<\frac{3a^{\frac{1}{2}}}{5\left(a^{\frac{1}{2}}+\frac{u^3}{64^2}\right)}$; enfin ces moments seront zéro, ou le parallélipipede demeurera dans la situation horisontale, si $k=\frac{3a^{\frac{1}{2}}}{5\left(a^{\frac{1}{2}}+\frac{u^3}{64^2}\right)}$.

.....

SCOLIE.

(852.) La dénivellation des deux côtés, choquant & choqué, altere les forces qui agissent sur la base du parallélipipede, & par conséquent la dénivellation produit des moments qui agissent sur cette base.

PROPOSITION LXIX.

(853.) *Trouver les moments qu'éprouve la base du même parallélipipede rectangle, & qui résultent des forces que lui communiquent les deux dénivellations.*

La force horisontale qui agit sur une différencielle de surface plane choquante, submergée dans le Fluide, cette force étant produite par la dénivellation d'une autre surface également choquante,

Digitized by Google

a été trouvée (700.) $= mcdx\left((D+x)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{8}(u\,fin\,\odot-\frac{x\,cof.\,\circ}{fin.\,\circ})\right)^2$, $D+x$ exprimant la distance verticale de la différencielle à la superficie du Fluide, laquelle est $= a$ dans le cas présent ; $fin\,\odot$ étant le sinus de l'angle que forme la direction du mouvement avec la surface qui cause la dénivellation, lequel sinus est, dans notre cas, $= 1$; & $\frac{x\,cof.\,\circ}{fin.\,\circ}$ la distance horisontale de la différencielle à l'extrémité de la surface ; distance que nous pouvons appeller y, de sorte qu'on aura $y=\frac{x\,cof.\,\circ}{fin.\,\circ}$, & $dx=\frac{dy\,fin.\,\circ}{cof.\,\circ}$. Substituant donc toutes ces valeurs dans l'expression ci-dessus, on la réduit à $\frac{mcdy\,fin.\,\circ}{cof.\,\circ}\left(a^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{8}(u-y)\right)^2$. Multipliant ensuite cette force horisontale par $\frac{cof.\,\circ}{fin.\,\circ}$ (580 & 613.)*, elle se transforme dans la force verticale, qui est par conséquent $= mcdy\,(a^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{8}(u-y))^2$. Nommant maintenant e la longueur du parallélipipede, on aura $\frac{1}{2}e-y$, pour la distance de son centre à la verticale qui passe par la différencielle ; & par conséquent le moment que la différencielle éprouve sera $= mc(\frac{1}{2}e-y)dy\left(a^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{8}(u-y)\right)^2$. Par la même raison, le moment qu'éprouvera une autre différencielle également éloignée de l'autre extrémité de la base, à raison de la dénivellation sur la surface choquée, sera $= \ldots\ldots\ldots$ $mc(\frac{1}{2}e-y)\,dy\left(a^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}(u-y)\right)^2$. Or ce moment étant soustractif, tandis que l'autre est additif, le moment qui résulte des deux sera par conséquent $= \frac{1}{4}mca^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}e-y)(u-y)dy$; quantité dont l'intégrale est $= \frac{1}{4}mca^{\frac{1}{2}}y(\frac{1}{2}eu-\frac{1}{2}ey-\frac{1}{2}uy+\frac{1}{3}y^2)$; ou, en faisant $y=u$ (597.), l'espace jusqu'où atteint la dénivellation n'étant pas plus grand que e, les moments qu'éprouve la base entiere, seront $=\frac{1}{24}mca^{\frac{1}{2}}u^2(\frac{1}{2}e-\frac{1}{3}u)$.

Corollaire I.

(854.) Ayant $u>e$, on doit faire, dans l'intégrale, $y=e$, & les moments qu'éprouve la base, deviendront $=\frac{1}{24}mca^{\frac{1}{2}}e^3$.

Corollaire II.

(855.) Comme la vîtesse u n'entre pas dans l'expression de ces

* L'application des *Art.* cités au cas présent, paroîtra évidente, si l'on remarque, pour l'*Art.* 580, que $fin\,\lambda=1$ dans le cas dont il s'agit ici ; & pour l'*Art.* 613, que $dc=db$, & par conséquent $c=b$.

moments, il s'enſuit que u étant $= e$, les moments qu'éprouve la baſe ne peuvent pas augmenter, quelque augmentation qui ſurvienne dans la viteſſe du parallélipipede.

COROLLAIRE III.

(856.) La quantité e étant poſitive, auſſi bien que $\frac{1}{2}e - \frac{1}{3}u$, il s'enſuit que les moments qu'éprouve la baſe, dans un temps quelconque, ſeront poſitifs.

COROLLAIRE IV.

(857.) Les moments qu'éprouve tout le parallélipipede ſeront donc exprimés par $mc\left(\frac{1}{3}k\left(a^{\frac{1}{2}}u + \frac{1}{64^{\frac{1}{2}}}u^4\right) - \frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}u + \frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}eu^2 - \frac{1}{3}u^3\right)\right)$.

COROLLAIRE V.

(858.) Ces moments ſeront poſitifs, & obligeront le parallélipipede à tourner, en élevant ſon extrêmité choquante, ſi l'on a $k > \frac{12a^{\frac{1}{2}} - 15a^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}eu - \frac{1}{3}u^2\right)}{20\left(a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{64^{\frac{1}{2}}}u^3\right)}$; & au contraire, ils ſeront négatifs, & obligeront le parallélipipede à tourner en abaiſſant ſon extrêmité choquante, ſi l'on a $k < \frac{12a^{\frac{1}{2}} - 15a^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}eu - \frac{1}{3}u^2\right)}{20\left(a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{64^{\frac{1}{2}}}u^3\right)}$ *.

COROLLAIRE VI.

(859.) On voit que la quantité u venant à varier, les moments varient auſſi, que le parallélipipede doit tourner, & que par conſéquent les réſiſtances varieront. Ainſi les réſiſtances ne dépendront pas ſeulement de la viteſſe, mais encore de la diſpoſition, ou de l'inclinaiſon que prend le parallélipipede.

SCOLIE I.

(860.) Tout ce qui précede ſuffit pour faire voir combien il eſt différent de conſidérer le corps ſans mouvement horiſontal, ou de le conſidérer quand ce mouvement exiſte. Dans le premier cas, le parallélipipede n'éprouve aucun moment, ou, pour en éprouver, il eſt néceſſaire qu'il s'incline, en abaiſſant ſa ſurface cho-

* On trouve ces expreſſions en diviſant la ſomme des moments donnés dans *l'Art.* 857, par la ſomme des réſiſtances, laquelle eſt toujours la même que celle qu'on a employée dans *l'Art.* 850, ainſi qu'on l'a démontré *Art.* 727; & on raiſonnera d'ailleurs, comme on l'a fait dans *l'Art.* 851, pour diſtinguer le cas où ces moments ſont poſitifs, ou négatifs.

Digitized by Google

quante. Dans le second cas, au contraire, non seulement le corps éprouve des moments, sans qu'il soit nécessaire qu'il s'incline, mais ces moments peuvent le faire tourner, en l'obligeant d'élever sa surface choquante, principalement lorsque k est $> \frac{1}{2}a$. PLANC. III.

Scolie II.

(861.) Par ce que nous venons de dire, on voit encore clairement la vérité de la remarque que nous avons faite, en passant, dans *l'Art.* 807. Le corps varie sa disposition, ses résistances variant pendant le mouvement; & par conséquent les résistances ne demeurent pas constamment les mêmes que celles sur lesquelles nous avons fondé notre calcul, pour démontrer qu'il falloit au corps un temps infini pour acquérir sa plus grande vitesse : ainsi cette démonstration ne peut point subsister en rigueur, & ce que nous avons établi à ce sujet n'est vrai qu'à peu près dans les petites vitesses.

Lemme III.

(862.) *Si l'on éleve une perpendiculaire sur un petit quadrilatere parallele à l'axe horisontal de rotation, & si l'on prolonge cette perpendiculaire jusqu'à ce qu'elle rencontre le plan vertical qui coïncide avec l'axe, l'expression* $\frac{r \sin x}{\sin n}$ *sera égale à la verticale comprise entre la perpendiculaire & l'axe.*

Que C soit un petit quadrilatere sur lequel on éleve la perpendiculaire CK, laquelle rencontre en K le plan vertical KO, qui coïncide avec l'axe O. Cela posé, il est clair que l'angle CKO est égal à celui que forme le petit quadrilatere avec l'horison, angle dont le sinus est $\sin n$, (569.). Pareillement $\sin x$ est le sinus de l'angle OCK, complément de celui que forme CO avec le petit quadrilatere (822, *Note.*). Ainsi nous aurons le sinus de $CKO = \sin n$, est au sinus de $OCK = \sin x$, comme $r = CO$, est à $KO = \frac{r \sin x}{\sin n}$. FIG. 62.

Proposition LXX.

(863.) *Trouver les moments qu'éprouve le même parallélipipede rectangle, flottant comme on l'a dit ci-dessus, mais ayant sa base inclinée à l'horison, & les deux côtés de cette base qui sont perpendiculaires à la direction du mouvement, étant paralleles au même horison.*

Soit $AKBF$ le parallélipipede, O son centre de gravité, & ED la superficie du Fluide. Soit mené LOM parallele aux côtés KA, FIG. 63.

Digitized by Google

BF, l'horisontale AJ, & les verticales FQ, EG, & RON. Soit enfin $AF=e$, $AM=g$, $OM=n$, $EG=a$, l'angle de l'inclinaison $JAF=\Delta$, & $FQ=a+e\,sin\,\Delta$.

Le moment qu'éprouve une différencielle de la surface choquante est $=\frac{mbrdx\,fin\,x}{fin\,\omega}(x+\frac{1}{4}ux^{\frac{1}{3}}cos\,\Delta+\frac{1}{6.4}u^2cos\,\Delta^2)$ *. Or puisque $HC=x$, & que CS est perpendiculaire à DF, on aura (862.) $OS=\frac{r\,fin\,\omega}{fin\,\omega}$; $DC=\frac{x}{cos\,\Delta}$; $FD=\frac{a+e\,sin\,\Delta}{cos\,\Delta}$; $FC=\frac{a+e\,sin\,\Delta-x}{cos\,\Delta}$; $FC-OM=OV=\frac{a+e\,sin\,\Delta-x}{cos\,\Delta}-n$; & $OS=\frac{r\,fin\,\omega}{fin\,\omega}=\frac{a+e\,sin\,\Delta-x}{cos\,\Delta^2}-\frac{n}{cos\,\Delta}$. Substituant cette derniere valeur de OS dans l'expression du moment, elle devient $mbdx\left(\frac{a+e\,sin\,\Delta-x}{cos\,\Delta^2}-\frac{n}{cos\,\Delta}\right)(x+\frac{1}{4}ux^{\frac{1}{3}}cos\,\Delta+\frac{1}{6.4}u^2cos\,\Delta^2)$; d'où l'on tire, en intégrant, & substituant, après l'intégration, $a+e\,sin\,\Delta$ à la place de x, $\frac{mb(a+e\,fin\,\Delta)^2}{cos\,\Delta^2}\left(\frac{1}{6}(a+e\,sin\,\Delta)+\frac{1}{11}u\,(a+e\,sin\,\Delta)^{\frac{1}{3}}cos\,\Delta+\frac{1}{2.64}u^2cos\,\Delta^2\right)-\frac{mbn(a+e\,sin\,\Delta)}{cos\,\Delta}\left(\frac{1}{6}(a+e\,sin\,\Delta)+\frac{1}{9}u\,(a+e\,sin\,\Delta)^{\frac{1}{3}}cos\,\Delta+\frac{1}{6.4}u^2cos\,\Delta^2\right)$: c'est l'expression des moments qu'éprouve toute la surface choquante.

Les moments qu'éprouve la surface choquée, sont les mêmes en changeant le signe de u, & supposant $e\,sin\,\Delta=0$: ces moments seront donc $=\frac{mba^2}{cos\,\Delta^2}\left(\frac{1}{6}a-\frac{1}{11}a^{\frac{1}{3}}u\,cos\,\Delta+\frac{1}{2.64}u^2\,cos\,\Delta^2\right)-\ldots\frac{mbn^2}{cos\,\Delta}\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{6}ua^{\frac{1}{3}}cos\,\Delta+\frac{1}{6.4}cos\,\Delta^2\right)$.

Le moment qu'éprouve une différencielle de la base est $=\ldots\frac{mbr\,fin\,xdx}{fin\,\omega}\left(a+x-\frac{1}{4}u\,fin\,\Delta\,(a+x)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{6.4}u^2\,fin\,\Delta^2\right)$ (*Voyez* la Note de l'*Art.* 659.). Or, puisque $ZY=x$, & que YW est perpendiculaire à AF, on aura (862.) $OW=\frac{r\,fin\,\omega}{fin\,\omega}$; $AY=\frac{x}{fin\,\Delta}$; $\ldots\ldots$ $MY=g-\frac{x}{fin\,\Delta}$; & $OW=\frac{r\,fin\,\omega}{fin\,\omega}=\frac{g}{fin\,\Delta}-\frac{x}{fin\,\Delta^2}$; ce qui réduit le moment à $mbdx\left(\frac{g}{fin\,\Delta}-\frac{x}{fin\,\Delta^2}\right)\left(a+x-\frac{1}{4}u\,fin\,\Delta(a+x)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{6.4}u^2fin\,\Delta^2\right)$; quantité dont l'intégrale, après avoir substitué $e\,sin\,\Delta$ pour x, est $=\frac{mbg}{fin\,\Delta}\left(ae\,sin\,\Delta+\frac{1}{2}e^2\,sin\,\Delta^2-\frac{1}{4}u\,fin\,\Delta\left((a+e\,sin\,\Delta)^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}\right)+\frac{1}{6.4}u^2e\,sin\,\Delta^3\right)-\frac{mb}{fin\,\Delta^2}\left(\frac{1}{2}ae^2\,sin\,\Delta^2+\frac{1}{3}e^3\,sin\,\Delta^3-\frac{1}{4}u\,fin\,\Delta(a+e\,sin\,\Delta)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{1}(a+e\,sin\Delta)-\frac{1}{3}a\right)\right)+\frac{mb}{fin\,\Delta^2}\left(\frac{1}{11}ua^{\frac{1}{3}}sin\,\Delta-\frac{1}{2.64}u^2e^2\,sin\,\Delta^4\right)$.

* Car $fin\,\omega=cos\,\Delta$.

Digitized by Google

Les moments qu'éprouve une différencielle de la ſurface choquante, en vertu de la dénivellation, ſont . . . . . $mbdx\left(\frac{a+e\,\mathrm{fin}\,\Delta-x}{\mathrm{cof}\,\Delta^2}-\frac{n}{\mathrm{cof}\,\Delta}\right)\left(x-\frac{1}{4}ux^{\frac{1}{2}}\mathrm{cof}\,\Delta+\frac{1}{64}u^2\,\mathrm{cof}\,\Delta^2\right)$; & ceux qu'éprouve une différencielle de la ſurface choquée, ſont = . . . $mbdx\left(\frac{a-x}{\mathrm{cof}\,\Delta^2}-\frac{n}{\mathrm{cof}\,\Delta}\right)\left(x-\frac{1}{4}ux^{\frac{1}{2}}\mathrm{cof}\Delta+\frac{1}{64}u^2\,\mathrm{cof}\,\Delta^2\right)$: ces deux moments réunis ſeront donc = ... $mbdx\left(\frac{2a+e\,\mathrm{fin}\,\Delta}{\mathrm{cof}\,\Delta^2}-\frac{2n}{\mathrm{cof}\,\Delta}\right)\left(x-\frac{1}{4}ux^{\frac{1}{2}}\mathrm{cof}\,\Delta+\frac{1}{64}u^2\,\mathrm{cof}\,\Delta^2\right)$*: quantité dont l'intégrale, après avoir ſubſtitué $\frac{1}{64}u^2\,\mathrm{cof}\,\Delta^2$ pour x, eſt = ... $\frac{mbu^2\,\mathrm{cof}\,\Delta^4}{6.64^2}\left(\frac{2a+e\,\mathrm{fin}\,\Delta}{\mathrm{cof}\,\Delta^2}-\frac{2n}{\mathrm{cof}\,\Delta}\right)$; c'eſt l'expreſſion des moments provenants des deux dénivellations.

Si l'on ajoute maintenant ces moments avec ceux qu'éprouve la ſurface choquante, & ſi l'on ſouſtrait de la ſomme ceux qu'éprouve la ſurface choquée, & ceux de la baſe, les moments qu'éprouvera tout le parallélipipede, ſeront exprimés par . . . . . .

$$mb\begin{cases}\frac{(a+e\,\mathrm{fin}\,\Delta)^3-a^3}{6.\mathrm{cof}\,\Delta^2}+\frac{u\left((a+e\,\mathrm{fin}\,\Delta)^{\frac{5}{2}}+a^{\frac{5}{2}}\right)}{15\,\mathrm{cof}\,\Delta}+\frac{u^2\left((a+e\,\mathrm{fin}\,\Delta)^2-a^2\right)}{2.64}+\frac{u^4(2+e\,\mathrm{fin}\,\Delta)\mathrm{cof}\Delta^2}{6.64^2}\\ -\frac{n\left((a+e\,\mathrm{fin}\,\Delta)^2-a^2\right)}{2\,\mathrm{cof}\,\Delta}-\frac{1}{6}nu\left((a+e\,\mathrm{fin}\,\Delta)^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{3}{2}}\right)-\frac{1}{64}nu^2e\,\mathrm{fin}\,\Delta\cdot\mathrm{cof}\Delta-\frac{2nu^4\mathrm{cof}\Delta^2}{6.64^2}\\ -ge\left(a+\frac{1}{2}e\,\mathrm{fin}\,\Delta\right)+\frac{1}{25}gu\left((a+e\,\mathrm{fin}\Delta)^{\frac{5}{2}}-a^{\frac{5}{2}}\right)-\frac{1}{64}gu^2e\,\mathrm{fin}\,\Delta^2\\ +\frac{1}{2}e^2\left(a+\frac{1}{3}e\,\mathrm{fin}\,\Delta\right)-\frac{u(a+e\,\mathrm{fin}\,\Delta)^{\frac{3}{2}}}{2\,\mathrm{fin}\,\Delta}\left(\frac{1}{7}(a+e\,\mathrm{fin}\,\Delta)-\frac{1}{7}a\right)-\frac{ua^{\frac{3}{2}}}{15\,\mathrm{fin}\,\Delta}+\frac{u^2e^2\,\mathrm{fin}\,\Delta^2}{2.64}\text{**}\end{cases}$$

COROLLAIRE I.

(864.) Comme tous les termes qui ſont affectés de n ſont négatifs, il s'enſuit que moins cette quantité ſera grande, ou plus le centre de gravité ſera bas, plus les moments ſeront poſitifs, & par conſéquent plus le parallélipipede élevera avec force ſon extrémité choquante.

COROLLAIRE II.

(865.) Les moments ſeront poſitifs, ou négatifs, ſuivant la

* Il faut obſerver que dans l'expreſſion des moments cauſés par la dénivellation, ſi l'on prend x poſitivement pour la ſurface choquante, il faut la prendre négativement pour la ſurface choquée, & réciproquement.

** Nous n'avons point développé les intégrations & les autres calculs que renferme cette *Propoſition*, parce que nous ſommes déjà entrés dans ces détails pour des calculs analogues. Les Commençants pourront s'exercer ſur ceux-ci, qui n'ont d'autres difficultés que leur longueur. Nous nous contentons d'avoir corrigé quelques négligences typographiques qui ſe trouvent en cet endroit dans l'original.

Digitized by Google

PLANC. III. relation qui aura lieu entre les trois quantités, a, $\sin\Delta$, & u, lesquelles sont variables, & dépendent les unes des autres.

COROLLAIRE III.

(866.) Comme la quantité n ne se trouve dans aucun des moments qui proviennent de la base, il s'ensuit que, quoique le centre de gravité soit plus ou moins élevé, cela ne peut altérer aucunement ces moments.

COROLLAIRE IV.

(867.) Dans le premier instant de l'action, ou du mouvement du parallélipipede, $u=0$, & les moments deviennent par conséquent $= mb\left(\frac{(a+\epsilon\sin\Delta)^3-a^3}{6\cos\Delta^2} - \frac{n((a+\epsilon\sin\Delta)^2-a^2)}{2\cos\Delta} - ge(a+\frac{1}{2}\epsilon\sin\Delta)+\frac{1}{2}e^2(a+\frac{2}{3}\epsilon\sin\Delta)\right)$ Donc, pour que, dès ce premier instant, les moments soient positifs, il est nécessaire qu'on ait $n < \frac{(a+\epsilon\sin\Delta)^3-a^3+e\alpha(3\epsilon-6g)\cos\Delta^2+e^2(2\epsilon-3g)\sin\Delta.\cos\Delta^2}{3((a+\epsilon\sin\Delta)^2-a^2)\cos\Delta}$.

SCOLIE.

(868.) De même qu'on a calculé les effets que les dénivellations produisent dans la base du parallélipipede, dans le cas où on le supposoit horisontal, on peut pareillement les calculer, dans le cas où le corps seroit incliné; mais comme le calcul est long & pénible, & que d'ailleurs il n'est pas nécessaire pour remplir notre objet, nous avons cru pouvoir nous dispenser de le donner *ici*.

PROPOSITION LXXI.

(869.) *Trouver les moments qu'éprouve un cylindre qui flotte, & qui se meut horisontalement suivant une direction perpendiculaire à son axe.*

FIG. 62. Soit $BQDE$ le cylindre, H son axe, & O son centre de gravité. Soit GI la superficie du Fluide, BE un diametre horisontal, & les lignes CL, HQ & OK, des droites verticales. Soit tiré la ligne HOD, & faisant $CH=R$, $OH=K$, $CA=x$, $AL=f$, & l'angle $HOK=\Delta$, on aura $CL=x+f$; $HL=\sqrt{R^2-(x+f)^2}$; $FO=K\cos\Delta$; $NO=k=K\cos\Delta-f$; $HF=K\sin\Delta$; $KF=\frac{K\sin\Delta(x+f)}{\sqrt{R^2-(x+f)^2}}$; $\frac{dv}{dx}=\frac{KF}{HF}=\frac{x+f}{\sqrt{R^2-(x+f)^2}}$; $\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}=\frac{\sqrt{R^2-(x+f)^2}}{R}$; & $LH+HF=y=\sqrt{R^2-(x+f)^2}+K\sin\Delta$: ce qui donne $\frac{ydy}{dx}=x+f+\frac{K\sin\Delta(x+f)}{\sqrt{R^2-(x+f)^2}}$. Ces valeurs étant substituées dans la for-

Digitized by Google

mule des moments qui (830.) est $mc\left(\frac{ydy}{dx}+k-x\right)\left(x^{\frac{1}{2}}\pm\frac{udx}{8\sqrt{dx^2+dy^2}}\right)^2 dx$, elle deviendra $mcK\left(cos\Delta\pm\frac{(x+f)\,sin\Delta}{\sqrt{R^2-(x+f)^2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}\pm\frac{u\sqrt{R^2-(x+f)^2}}{8R}\right)^2 dx$; le signe — ayant lieu pour la partie choquée, puisque, pour cette partie, la quantité $KF=\frac{K(x+f)\,sin\Delta}{\sqrt{R^2-(x+f)^2}}$ est négative. Soustrayant maintenant le moment de la partie choquée, de celui de la partie choquante, & intégrant, on trouvera, pour l'expression des moments qu'éprouve tout le cylindre, la quantité $\frac{mcKu\,cos\Delta}{2R}\int x^{\frac{1}{2}}dx\sqrt{R^2-(x+f)^2}+\ldots$ $2mcK\,sin\Delta\left(\int\frac{(x+f)\,xdx}{\sqrt{R^2-(x+f)^2}}+\frac{u^2}{64R^2}\int(x+f)\,dx\sqrt{R^2-(x+f)^2}\right)$.

Corollaire I.

(870.) La quantité $\frac{mcu}{2R}\int x^{\frac{1}{2}}dx\sqrt{R^2-(x\pm f)^2}$ est (663.) l'expression de la résistance horisontale qu'éprouve le cylindre; & $2mc\left(\int\frac{(x\pm f)xdx}{\sqrt{R^2-(x\pm f)^2}}+\frac{u^2}{64R^2}\int(x\pm f)dx\sqrt{R^2-(x\pm f)^2}\right)$, (637.), est l'expression de la force, ou résistance verticale: si nous appellons N la premiere de ces résistances, & Q la seconde, les moments qu'éprouve le cylindre deviendront $=NK\,cos\Delta+QK\,sin\Delta=K(N\,cos\Delta+Q\,sin\Delta)$.

Corollaire II.

(871.) Si l'on avoit $u=0$, le moment qu'éprouveroit tout le cylindre, seroit $=2mcK\,sin\Delta\int\frac{(x+f)\,xdx}{\sqrt{R^2-(x\pm f)^2}}$, ou, parce que .. $2mc\int\frac{(x\pm f)\,xdx}{\sqrt{R^2-(x\pm f)^2}}$ exprime, dans ce cas, la force verticale qu'éprouve le même cylindre, laquelle force est égale à son poids (561 & 562.), si nous appellons P le poids du cylindre, le moment que ce corps éprouvera, lorsque $u=0$, sera $=PK\,sin\Delta$, comme on l'a dit ci-dessus, *Art.* 838.

Scolie.

(872.) Quoique dans le calcul qu'on vient de faire des moments qu'éprouve le cylindre, on n'ait pas fait mention de ceux qui proviennent de la dénivellation, ils ne laissent pas pour cela d'être compris dans l'expression $K(N\,cos\Delta+Q\,sin\Delta)$. La formule de ces moments est $mc\int\frac{r\,sin^2\alpha}{sin\,\alpha}dx\left(x-\frac{1}{4}ux^{\frac{1}{2}}sin\,\alpha+\frac{1}{64}u^2sin^2\alpha\right)$ *, tant pour

* Car $sin\,\theta=sin\,\alpha$ dans le cas dont il est ici question (583 & 586.).

ceux de la surface choquante que pour ceux de la surface choquée, parce qu'ils sont positifs dans les deux surfaces (823, *Note.*). Substituant dans cette formule, à la place de $\frac{r \sin x}{\sin n} = KO$ (862.) $= FO \pm FK$, sa valeur $K \cos \Delta \pm \frac{K \sin \Delta (x \pm f)}{\sin n \sqrt{R^2 - (x \pm f)^2}}$; & prenant la somme des moments pour les deux surfaces, les moments effectifs seront $= \ldots$ $2mcK \cos \Delta \int dx (x - \frac{1}{4} u x^{\frac{1}{2}} \sin n + \frac{1}{64} u^2 \sin n^2)$: mais la résistance horisontale que produit la dénivellation, est aussi $= \ldots\ldots\ldots$ $2mc \int dx (x - \frac{1}{4} u x^{\frac{1}{2}} \sin n + \frac{1}{64} u^2 \sin n^2)$: donc la résistance horisontale N n'est pas seulement égale à la premiere quantité $\frac{mcu}{2R} \int_{-f}^{\frac{1}{2}} dx \sqrt{R^2 - (x \pm f)^2}$; mais à cette quantité plus $2mc \int dx (x - \frac{1}{4} u x^{\frac{1}{2}} \sin n + \frac{1}{64} u^2 \sin n^2)$. Par conséquent, N exprimant la résistance horisontale totale qu'éprouve le cylindre, les moments qui résultent de la dénivellation seront compris dans l'expression $K (N \cos \Delta + Q \sin \Delta)$.

CHAPITRE XI.

De l'inclinaison que prennent les corps flottants sur des Fluides, lorsqu'ils sont poussés par une, ou par plusieurs puissances.

PROPOSITION LXXII.

(873.) *TROUVER l'inclinaison que prennent les corps flottants sur des Fluides, lorsqu'ils sont poussés par une, ou par plusieurs puissances.*

L'inclinaison n'est autre chose que la situation dans laquelle se trouve le corps à l'égard de la verticale, lorsqu'il cesse déjà de tourner sur un axe horisontal, étant poussé par une, ou par plusieurs puissances, à cause que, dans cette situation, les moments des puissances sont équilibre à ceux des résistances du Fluide. Il n'est donc question que de trouver les uns & les autres moments, par ce qu'on a dit dans les *Chapitres* précédents, ou par les *Propositions* qui suivent; égalant ensuite leur somme à zéro, on déduira, de l'équation qui en résultera, l'inclinaison que prendra le corps.

PROPOSITION LXXIII.

(874.) *Trouver le moment avec lequel agit un poids qu'on ajoute à*

PLANC. III.

à un corps flottant, ce poids étant placé dans un point déterminé du plan vertical perpendiculaire à l'axe de rotation qui paſſe par le centre de gravité.

FIG. 63. Que π ſoit le poids qu'on ſuppoſe placé dans le plan vertical perpendiculaire à l'axe de rotation qui paſſe par le centre de gravité O. Que p ſoit la perpendiculaire πX au plan qui coïncide avec l'axe, & avec les centres de gravité & de volume; & ſoit enfin $OX = q$. Cela poſé, πR, perpendiculaire au plan vertical qui coïncide avec l'axe, ſera $= q \sin \Delta + p \cos \Delta$, Δ exprimant l'angle de l'inclinaiſon ROX que prend le corps, & le moment du poids ſera par conſéquent $= \pi (q \sin \Delta + p \cos \Delta)$*.

SCOLIE.

(875.) On ſuppoſe que l'axe de rotation eſt horiſontal, & que le corps a toute la régularité néceſſaire, pour qu'après s'être incliné, l'axe ſe conſerve de la même maniere, c'eſt-à-dire, dans ſa ſituation horiſontale; ſans cela, il faut avoir égard à une nouvelle inclinaiſon perpendiculaire à la premiere.

COROLLAIRE I.

(876) Si l'on ajoutoit au corps différents poids π, chacun d'eux en particulier produiroit le moment $\pi(q \sin \Delta + p \cos \Delta)$; & la ſomme de tous ces moments ſeroit le moment total qui agit ſur le corps.

COROLLAIRE II.

(877.) Si, au lieu d'ajouter un poids π, on le retranchoit, alors π ſeroit négatif, & ſon moment ſeroit $= -\pi (q \sin \Delta + p \cos \Delta)$.

COROLLAIRE III.

(878.) Si en même temps on retranchoit un poids π de la partie oppoſée à l'axe de rotation, p ſeroit négatif, & le moment ſeroit $= -\pi (q \sin \Delta - p \cos \Delta) = \pi (p \cos \Delta - q \sin \Delta)$, moment qui eſt poſitif dans le cas où $p \cos \Delta > q \sin \Delta$.

---

* Car l'angle $Xn\pi$ eſt le complément de l'angle d'inclinaiſon ROX: ainſi la ligne $\pi n = \frac{p}{\cos \Delta}$, & $Xn = \frac{p \sin \Delta}{\cos \Delta}$. Retranchant Xn de OX, il reſte $On = q - \frac{p \sin \Delta}{\cos \Delta}$, & par conſéquent $Rn = q \sin \Delta - \frac{p \sin \Delta^2}{\cos \Delta}$. Donc $\pi R = Rn + \pi n = q \sin \Delta - \frac{p \sin \Delta^2}{\cos \Delta} + \frac{p}{\cos \Delta} = \frac{q \sin \Delta \cos \Delta + p(1 - \sin \Delta^2)}{\cos \Delta}$; mais $1 - \sin \Delta^2 = \cos \Delta^2$; ſubſtituant donc cette valeur, on aura $\pi R = q \sin \Delta + p \cos \Delta$.

Digitized by Google

COROLLAIRE IV.

(879.) Si le poids qu'on retranche d'un côté, étoit transporté au côté opposé, & placé à une même distance q de l'axe, les moments seroient $\pi(q\,\mathit{sin}\,\Delta + p\,\mathit{cos}\,\Delta) - \pi(q\,\mathit{sin}\,\Delta - \Pi\,\mathit{cos}\,\Delta) = (p+\Pi)\pi\,\mathit{cos}\,\Delta$; c'est-à-dire que le moment seroit égal au produit du poids π par le cosinus de l'inclinaison, & par la distance horisontale $p+\Pi$, du point d'où l'on a ôté le poids jusqu'à celui où on l'a placé.

COROLLAIRE V.

(880.) Si l'inclinaison étoit très-petite, le même moment seroit $= \pi(p+\Pi)$; c'est-à-dire qu'il seroit égal au produit du poids π, par la distance $p+\Pi$ à laquelle on l'auroit transporté.

COROLLAIRE VI.

(881.) Si p & π demeurant positifs, on avoit q négatif; c'est-à-dire, si on plaçoit le poids π au-dessous du plan horisontal qui coïncide avec l'axe, le moment seroit $= \pi(p\,\mathit{cos}\,\Delta - q\,\mathit{sin}\,\Delta)$.

COROLLAIRE VII.

(882.) Si, de plus, on avoit $p = o$, le moment se réduiroit à $-\pi\,q\,\mathit{sin}\,\Delta$: donc tout poids placé au-dessous du centre de gravité, dans le plan qui passe par l'axe & par les centres de gravité & de grandeur, résiste à l'inclinaison dans la raison de $\pi\,q\,\mathit{sin}\,\Delta$.

COROLLAIRE VIII.

(883.) Si au contraire on ôtoit le poids, le moment seroit $= \pi q\,\mathit{sin}\,\Delta$, & il contribueroit à l'accroissement de l'inclinaison dans la raison de $\pi q\,\mathit{sin}\,\Delta$.

PROPOSITION LXXIV.

(884.) *Trouver l'inclinaison que prendra un parallélipipede rectangle, flottant sur un Fluide avec sa base parallele à l'horison, auquel on ajoute un nouveau poids dans un point déterminé du plan vertical perpendiculaire à deux de ses côtés, & qui passe par le centre de gravité.*

Puisqu'on suppose, dans ce cas, que le parallélipipede est sans mouvement, on a $u = o$. Les moments se réduiront donc (867.) à $mb\Big(\frac{(a+e\,\mathit{sin}\,\Delta)^3 - a^3}{6\,\mathit{cos}\,\Delta^2} - \frac{n\big((a+e\,\mathit{sin}\,\Delta)^2 - a^2\big)}{2\,\mathit{cos}\,\Delta} - ge\big(a+\frac{1}{2}e\,\mathit{sin}\,\Delta) + \frac{1}{2}e^2(a+\frac{1}{3}e\,\mathit{sin}\,\Delta)\big)\Big)$, & l'on aura $\pi(q\,\mathit{sin}\,\Delta + p\,\mathit{cos}\,\Delta) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$mb\left(\frac{(a+e\,fin\,\Delta)^3-a^3}{6\,cof\,\Delta^2}-\frac{n\left((a+e\,fin\,\Delta)^2-a^2\right)}{2\,cof\,\Delta}-ge(a+\frac{1}{8}e\,fin\,\Delta)+\frac{1}{8}e^2(a+\frac{1}{3}e\,fin\Delta)\right)$;

ou, parce que, dans ce cas, $g=\frac{1}{4}e$, $\pi\,(\,q\,fin\,\Delta+p\,cof\,\Delta\,)=mb\left(\frac{(a+e\,fin\,\Delta)^3-a^3}{6\,cof\,\Delta^2}-\frac{n\left((a+e\,fin\,\Delta)^2-a^2\right)}{2\,cof\,\Delta}+\frac{1}{11}e^3\,fin\,\Delta\right)$. La force verticale qui agit sur le parallélipipede eſt (561.) $=mbe\left(\frac{a+\frac{1}{2}e\,fin\,\Delta}{cof\,\Delta}\right)$ *, qui, en ſuppoſant que P exprime le poids total du parallélipipede, ſera $P+\pi=mbe\left(\frac{a+\frac{1}{2}e\,fin\,\Delta}{cof\,\Delta}\right)$, qui donne $a=\frac{(P+\pi)\,cof\,\Delta}{mbe}-\frac{1}{2}e\,fin\,\Delta$. Subſtituant cette valeur dans l'équation précédente, elle ſe réduit à $\pi(q\,fin\,\Delta+p\,cof\,\Delta)=mbe\,fin\,\Delta\left(\frac{P^2}{2\,m^2b^2e^2}-\frac{nP}{mbe}+\frac{1}{12}e^2+\frac{e^2\,fin\,\Delta^2}{24\,cof\,\Delta^2}\right)$**.

Si l'on ſuppoſe que a ſoit la hauteur verticale dont le parallélipipede étoit enfoncé dans le Fluide, avant qu'on y ajoutât le poids π ***, ou lorſque ſa baſe étoit dans une ſituation horiſontale; comme, dans ce cas, $P=mbea$, on aura . . . . . .

$\pi\,(\,q\,fin\,\Delta+p\,cof\,\Delta)=mbe\,fin\,\Delta\left(\frac{1}{2}a^2-na+\frac{1}{12}e^2+\frac{e^2\,fin\,\Delta^2}{24\,cof\,\Delta^2}\right)$, ou $\frac{\pi p\,cof\,\Delta}{mbe\,fin\,\Delta}-\frac{e^2\,fin\,\Delta^2}{24\,cof\,\Delta^2}=\frac{1}{2}a^2-na+\frac{1}{12}e^2-\frac{\pi q}{mbe}$. Si l'on fait maintenant $\frac{1}{2}a^2-na+\frac{1}{12}e^2-\frac{\pi q}{mbe}=\pm A^2$, & $x=\frac{e\,fin\,\Delta}{cof\,\Delta}=FJ$, on aura $\frac{\pi p}{mb}x-\frac{1}{24}x^2=\pm A^2$; ce qui donne $x^2\pm 24A^2x-\frac{24\pi p}{mb}=0$. Cette équation étant réſolue par les regles de l'algebre commune, donnera la valeur de x, & par conſéquent de l'inclinaiſon que prendra le parallélipipede ****.

---

* Car le poids du volume de Fluide que déplace le parallélipipede eſt $=mb.\left(\frac{AE+FD}{2}\right)AF$; quantité qui devient celle de l'Auteur, en ſubſtituant pour AE, FD & AF leur valeur (863).

** On remarquera que l'Auteur n'a pas ſubſtitué la valeur entiere de a; mais ſeulement $a=\frac{P\,cof\,\Delta}{mbe}-\frac{1}{2}e\,fin\,\Delta$, en négligeant le terme $\frac{\pi\,cof\,\Delta}{mbe}$, qui contient le poids additionnel π multiplié par le coſinus de l'inclinaiſon, & diviſé par mbe, comme étant très-petit par rapport aux autres. Au reſte, toute difficulté diſparoîtra, ſi l'on conçoit que P repréſente non ſeulement le poids total primitif du parallélipipede, mais ce poids augmenté de π: car alors $a=\frac{P\,cof\,\Delta}{mbe}-\frac{1}{2}e\,fin\,\Delta$, comme l'Auteur l'a fait dans la ſubſtitution. Il nous paroît que c'eſt ainſi qu'on doit conſidérer P.

*** Conformément à la Note précédente, a doit repréſenter la hauteur verticale dont le parallélipipede ſeroit ſubmergé, même après l'addition du poids π, en ſuppoſant la baſe du parallélipipede horiſontale, & par conſéquent π placé au centre de gravité, ou dans la verticale qui paſſe par ce centre. Cette diſtance a ne peut être ſuppoſée égale à celle qui auroit lieu avant l'addition de π, qu'en conſidérant π comme une différencielle du poids total du parallélipipede.

**** Car $x=\frac{e\,fin\,\Delta}{cof\,\Delta}=e\,tang\,\Delta$: donc $tang\,\Delta=\frac{x}{e}$.

Digitized by Google

COROLLAIRE I.

(885.) Si A^2 étoit positif, ou si, étant négatif, on avoit $(8A^2)^3$ moindre que $\left(\frac{12*p}{mb}\right)^2$, l'équation auroit deux racines imaginaires, & par conséquent une seule réelle, qui seroit $= \ldots\ldots\ldots$ $\left(\frac{12*p}{mb}+\left(\left(\frac{12*p}{mb}\right)^2\pm(8A^2)^3\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\mp\frac{8A^2}{\left(\frac{12*p}{mb}+\left(\left(\frac{12*p}{mb}\right)^2\pm(8A^2)^3\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}$ *; racine qui indique la disposition unique du parallélipipede, ou l'inclinaison qu'il doit prendre; le signe supérieur ayant lieu lorsque A^2 est positif, & l'inférieur lorsqu'il est négatif.

COROLLAIRE II.

(886.) Lorsque A^2 est négatif, si l'on avoit en même temps $(8A^2)^3$ plus grand que $\left(\frac{12*p}{mb}\right)^2$, l'équation auroit ses trois racines réelles **; & par conséquent le parallélipipede pourroit prendre trois dispositions, ou inclinaisons différentes.

SCOLIE I.

(887.) Comme la formule $x^3 \pm 24A^2x - \frac{24*p}{mb}$, est l'expression de la somme des moments, toutes les fois que ces moments sont positifs, leur effet se dirige pour soutenir, pour redresser, ou pour s'opposer à l'inclinaison du parallélipipede; en un mot, leur effet est alors de le rendre plus stable. Au contraire, lorsque ces moments sont négatifs, ils tendent à le faire tomber davantage, ou à l'incliner de plus en plus. Les racines de l'équation sont donc les limites de ces moments positifs ou négatifs; & par conséquent toutes les fois que le parallélipipede ira en s'inclinant, & qu'on passera d'une racine à une autre, on passera également des moments positifs aux négatifs, ou, au contraire, des négatifs aux positifs. Si les moments sont négatifs, lorsque le parallélipipede va en s'inclinant, pour prendre la situation correspondante à la premiere racine; ils deviendront positifs, lorsque le parallélipipede passera à la situation correspondante à la seconde racine, & ainsi de suite.

---

* *Voyez*, pour la démonstration, la Troisieme Partie du *Cours de Mathématiques* de M. *Bezout*, *Art.* 195 & 197. Avec une légere habitude du calcul, on verra facilement l'identité de la seconde partie de cette racine, avec celle qu'on trouve à *l'Art.* 195 de l'Ouvrage cité.

** Voyez la Troisieme Partie du *Cours de Mathématiques* de M. *Bezout*, *Art.* 198.

Digitized by Google

COROLLAIRE III.

(888.) Avant que le parallélipipede s'établisse dans la situation correspondante à la premiere racine, les moments sont négatifs ; car, en faisant $x = 0$ dans la formule qui exprime ces moments, elle se trouve réduite à $-\frac{24\pi}{mb}$.

COROLLAIRE IV.

(889.) Le parallélipipede doit donc s'incliner jusqu'à ce qu'il ait pris la situation correspondante à la premiere racine; & il ne peut passer à la situation qui correspond à la seconde, sans qu'une autre force étrangere, quelle qu'elle soit, ne détruise & surmonte l'effet des moments positifs qui s'y opposent, & ne les rende par conséquent négatifs.

SCOLIE II.

(890.) Le parallélipipede ne peut se rétablir dans la situation correspondante à la seconde racine, s'il en est tiré par l'action de quelque force étrangere. Car si cette force l'oblige à se mettre plus vertical, les moments deviendront positifs, & par conséquent il continuera à se mettre de plus en plus vertical jusqu'à ce qu'il ait atteint la situation qui correspond à la premiere racine : & si elle l'oblige, au contraire, à se mettre moins vertical, les moments deviendront négatifs, & conséquemment le parallélipipede continuera de s'incliner de plus en plus.

COROLLAIRE V.

(891.) La stabilité, ou la conservation des forces du parallélipipede pour se maintenir sans tomber entiérement, consiste en ce qu'aucune force étrangere ne soit capable de l'incliner jusqu'à le faire passer au-delà de la situation correspondante à la seconde racine.

COROLLAIRE VI.

(892.) Si l'on avoit π, ou $p = 0$, l'équation deviendroit $x^3 \pm 24A^2x = 0$, dont la premiere racine est $x = 0$: donc le parallélipipede doit se maintenir droit, ou vertical, sur le Fluide, à moins que quelque force étrangere ne surmonte les moments positifs dont l'effet se manifesteroit dans l'inclinaison.

COROLLAIRE VII.

(893.) Les deux autres racines de l'équation $x^3 \pm 24A^2x = 0$,

Digitized by Google

ſont $x = 2A \vee \mp 6$, qui ſont imaginaires, lorſque A^2 eſt poſitif : d'où il paroît qu'on devroit inférer que, dans ce cas, les moments qu'éprouvera le parallélipipede dans ſon inclinaiſon, à quelque degré qu'elle parvienne, ſeront toujours poſitifs.

SCOLIE III.

(894.) Ce *Corollaire* ſeroit généralement vrai, ſi le cas où l'angle A de la baſe ſort du Fluide, ne pouvoit pas arriver : dans ce cas, les moments, ainſi que la force verticale qui agit ſur le parallélipipede, ne ſont plus les mêmes ; & par conſéquent il en réſulte une équation différente, & particuliere à ce cas ; équation qui, comme on le verra, produit plus de racines que celle que nous avons premiérement trouvée. Comme M. *Bouguer*, dans ſon *Traité du Navire*, n'examine la ſtabilité que dans les inclinaiſons infiniment petites, il pourroit paroître qu'il admet la généralité du *Corollaire*, puiſqu'il recommande qu'on ait ſoin que le ſigne du ſecond terme ne ſoit pas négatif, afin que les moments ſoient toujours poſitifs, & qu'à leur moyen, le parallélipipede ſe redreſſe, ou ſoit ſtable. Nous n'inſiſterons pas ſur ce que ces moments ne peuvent être négatifs que lorſque la totalité de la formule $x^3 \pm 24A^2x$ eſt négative, & non pas ſeulement lorſque ſon ſecond terme eſt négatif ; parce que l'Auteur ſe bornant à la conſidération des inclinaiſons infiniment petites, regarde comme négligeable le premier terme x^3. Or, pour que le ſecond terme $24A^2x$ ne ſoit pas négatif, il ſuffit que A^2, ou ſa valeur $\frac{1}{3}a^2 - na + \frac{1}{10}c^2 - \frac{\pi q}{mbc}$ ne le ſoit pas, ou à cauſe que M. *Bouguer* ſuppoſe $\pi = 0$, il ſuffit que la quantité $\frac{1}{3}a^2 - na + \frac{1}{10}c^2$ ne ſoit pas négative. De là il déduit que toutes les fois qu'on n'aura pas $n > \frac{1}{3}a + \frac{c^2}{12a}$, ou qu'on aura ſoin que le centre de gravité ne ſoit pas plus haut que $\frac{1}{3}a^2 + \frac{c^2}{12a}$, on pourra être aſſuré de la ſtabilité du parallélipipede. Il ajoute, en même temps, que cette quantité exprimant la hauteur à laquelle le centre de gravité peut être placé ſans riſque, on peut, avec raiſon, donner le nom de *Métacentre* au point qui la termine.

L'erreur à laquelle peut conduire cette concluſion de M. *Bouguer*, en ne conſidérant pas les choſes avec le ſoin qu'il recommande, eſt palpable ; car l'expreſſion $\frac{c^2}{12a}$ fait voir clairement que plus a ſera petit, plus la hauteur du Métacentre ſera grande, & par conſéquent

Digitized by Google

la ſtabilité du parallélipipede : de ſorte que ſi a devenoit infiniment petite, on pourroit placer le centre de gravité à une hauteur infinie, ſans que le parallélipipede perdît rien de ſa ſtabilité ; conſéquence dont chacun peut appercevoir l'abſurdité à la premiere vue. Cependant la conſéquence dont il s'agit ici eſt certaine, lorſque les angles de la baſe ne ſortent pas du Fluide, & c'eſt ſur cette ſuppoſition que l'Auteur a fondé ſon raiſonnement. Mais lorſque a eſt fort petite, il eſt ſi facile que les angles de la baſe ſortent du Fluide, quoiqu'on ſuppoſe l'inclinaiſon infiniment petite, qu'on reconnoît clairement l'erreur dans laquelle on peut tomber. PLANC. IV.

Cette erreur n'a pas ſeulement lieu dans le cas du parallélipipede, elle s'étend aux autres corps, parce que le défaut vient de la ſuppoſition qu'on fait en ſe bornant à l'examen des ſeules inclinaiſons infiniment petites, qui eſt que la ſection de la ſuperficie du Fluide, ainſi que le plan qui coïncide avec l'axe, & diviſe le corps en deux parties égales, ſont toujours les mêmes ; ce qui eſt très-éloigné d'être certain, lorſque le corps occupe peu d'eſpace dans le Fluide, & que la puiſſance π qui agit ſur lui, eſt très-conſidérable ; car la même puiſſance qui ne produit qu'une inclinaiſon infiniment petite, quand le corps occupe beaucoup d'eſpace dans le Fluide, en produira une très-ſenſible, lorſqu'il en occupe peu ; & dans ce cas, la ſuppoſition qu'on fait, que l'inclinaiſon eſt infiniment petite, eſt fauſſe, quelque petite qu'on ſuppoſe la puiſſance. A tout cela on doit ajouter que le poids du corps varie de la quantité π, & cette différence, à laquelle on n'a jamais fait attention, eſt d'autant plus conſidérable, que le poids du corps eſt plus petit.

PROPOSITION LXXV.

(895.) *Trouver l'inclinaiſon que prendra le même parallélipipede rectangle, lorſque quelqu'un de ſes angles de la baſe ſortira du Fluide.*

Les moments qu'éprouve le parallélipipede ſont (867.) = FIG. 75.

$$mb\left(\frac{(a+e\,\mathit{fin}\,\Delta)^3-a^3}{6\,\mathit{cof}\,\Delta^2}-\frac{n((a+e\,\mathit{fin}\,\Delta)^2-a^2)}{2\,\mathit{cof}\,\Delta}\right)+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$mb\left(e\left(g-e\right)\left(a+\tfrac{1}{2}e\,\mathit{fin}\,\Delta\right)+\tfrac{1}{3}e^2\left(a+\tfrac{3}{4}e\,\mathit{fin}\,\Delta\right)\right)^*$$; mais, à cauſe que, dans ce cas, $e=EF$, $g=FM$, & $a=0$, ces moments ſe réduiſent à $mb\left(\frac{e^3\,\mathit{fin}\,\Delta^3}{6\,\mathit{cof}\,\Delta^2}-\frac{ne^2\,\mathit{fin}\,\Delta^2}{2\,\mathit{cof}\,\Delta}+\frac{1}{2}ge^2\,\mathit{fin}\,\Delta-\frac{1}{6}e^3\,\mathit{fin}\,\Delta\right)$. La

* Voyez le *Scolie* ſuivant, *Art.* 896, & la *Note* qui l'accompagne.

Digitized by Google

force verticale qui agit sur le parallélipipede, est (561.) = .. $\frac{1}{3}mbe.DF = P+\pi$, ou, en nommant ζ la ligne DF, $\frac{1}{3}mbe\zeta = P+\pi$; ce qui donne $e = \frac{P+\pi}{\frac{1}{3}mb\zeta}$, & $\frac{\sin\Delta}{\cos\Delta} = \frac{1}{e} = \frac{\frac{1}{3}mb\zeta^2}{P+\pi}$. Nous aurons donc $\pi(q\sin\Delta + p\cos\Delta) = mb\left(\frac{e^3\sin\Delta^3}{6\cos\Delta^2} - \frac{ne^2\sin\Delta^2}{2\cos\Delta} + \frac{1}{8}ge^2\sin\Delta + \frac{1}{6}e^3\sin\Delta\right)$, ou, en divisant par $\sin\Delta$, & substituant les valeurs de e & de $\frac{\sin\Delta}{\cos\Delta}$, $\pi\left(q + \frac{p(P+\pi)}{\frac{1}{3}mb\zeta^2}\right) = mb\left(\frac{(P+\pi)\zeta}{3mb} - \frac{n(P+\pi)}{mb} + \frac{g(P+\pi)^2}{\frac{1}{3}m^2b^2\zeta^2} - \frac{(P+\pi)^3}{\frac{1}{3}m^3b^3\zeta^3}\right)$: équation qui donne en réduisant

$$\zeta^4 - 3n\zeta^3 + \frac{6g(P+\pi)\zeta}{mb} - \frac{4(R+\pi)^3}{m^2b^2} - \frac{3\pi q\zeta^3}{P+\pi} - \frac{6p\pi\zeta}{mb} = 0.$$

Ayant trouvé la valeur de ζ par cette équation, on aura celle de $e = \frac{P+\pi}{\frac{1}{3}mb\zeta}$, & par conséquent les deux points D & E, qui donnent la position de la superficie du Fluide, & par conséquent l'inclinaison du parallélipipede.

SCOLIE I.

(896.) Les moments que la base éprouve dans le cas présent, ne sont pas les mêmes que ceux qu'elle éprouve dans le précédent. Pour les moments du cas précédent, on a (863.) $r\sin x = g - \frac{x}{\sin\Delta}$ & pour ceux dont il est ici question, à cause de $e < 2g$, on a $r\sin x = g - \frac{x}{\sin\Delta} - (2g-e) = e - g - \frac{x}{\sin\Delta}$ *. Mettant donc dans la formule $mb\left(ge\left(a+\frac{1}{3}e\sin\Delta\right) - \frac{1}{2}e^2\left(a+\frac{2}{3}e\sin\Delta\right)\right)$, qui exprime les moments du cas précédent, $e-g$ pour g seul, nous aurons l'expression des moments pour le cas présent = ... $mb\left(e(e-g)\left(a+\frac{1}{4}e\sin\Delta\right) - \frac{1}{6}e^2\left(a+\frac{2}{3}e\sin\Delta\right)\right)$; ou, à cause qu'ils sont négatifs, $mb\left(e(g-e)\left(a+\frac{1}{4}e\sin\Delta\right) + \frac{1}{6}e^2\left(a+\frac{2}{3}e\sin\Delta\right)\right)$, comme nous l'avons supposé (895.).

* Car $EY = \frac{x}{\sin\Delta}$, & par conséquent $YM = AM - EY - AE = g - \frac{x}{\sin\Delta} - AE$: or $AE = AF - EF = g - e$, donc $YM = g - \frac{x}{\sin\Delta} - (g-e) = e - g - \frac{x}{\sin\Delta}$: donc enfin OW, ou $\frac{r\sin x}{\sin x} = \frac{e-g}{\sin\Delta} - \frac{x}{\sin\Delta^2}$; d'où l'on tire $r\sin x = e - g - \frac{x}{\sin\Delta}$, à cause que $\sin x = \sin\Delta$.

COROLLAIRE.

Digitized by Google

PLANC. IV.

COROLLAIRE.

(897.) Si l'on avoit $\pi = 0$, l'équation se réduiroit à $\zeta^4 - 3n\zeta^3 + \frac{6gP\zeta}{mb} - \frac{4P^2}{m^2b^2} = 0$; ou en substituant pour P sa valeur $2mbga$, & mettant, comme ci-dessus, e pour toute la longueur $2g$ de la base, on aura $\zeta^4 - 3n\zeta^3 + 3e^2a\zeta - 4e^2a^2 = 0$ *.

SCOLIE II.

(898.) Supposant que la stabilité du parallélipipede doive se conserver lorsqu'on a $n < \frac{1}{2}a + \frac{e^2}{12a}$, faisons $n = \frac{e^2}{12a}$; &, pour simplifier l'équation, faisons $e = 12a$, elle se réduira à $\zeta^4 - 36a\zeta^3 + 432a^3\zeta - 576a^4 = 0$. La plus petite racine de cette équation est moindre que $2a$ **; & comme il faut que ζ devienne $= 2a$, pour que l'angle de la base commence à sortir du Fluide, il est clair que cette plus petite racine ne peut être d'aucune utilité pour notre objet ***. La seconde racine est à très-peu-près, $\zeta = \frac{24}{11}a$, & encore cette quantité $\frac{24}{11}a$ est un peu moindre que la vraie racine; de sorte qu'en la substituant dans l'équation à la place de ζ, l'expression qui en résulte est négative. Ceci prouve que si quelque force étrangere oblige le parallélipipede à s'incliner de façon qu'un de ses côtés soit submergé de $\frac{24}{11}a$, ou, ce qui est équivalent, de façon qu'elle l'oblige à s'incliner de $13^\circ\frac{1}{2}$ ****, le parallélipipede tombera tout-à-coup, en continuant de s'incliner jusqu'à ce qu'il ait atteint la position qui correspond à la quatrieme racine, parce que la troisieme étant négative, elle ne peut nullement servir pour ce cas. Cette quatrieme racine est à peu près $\zeta = 35a$, & équivaut à une

---

* En suivant toujours l'esprit de la deuxieme & troisieme note de l'*Art.* 884, il ne seroit pas nécessaire d'anéantir le poids π pour parvenir à la même équation, il suffiroit de le supposer placé au centre de gravité; car alors les quantités p & q sont chacune $= 0$, & $P + \pi = 2mbg$, ou $= mbea$.

On voit, sans peine, que a exprime ici la profondeur verticale dont le parallélipipede est submergé dans le Fluide, lorsqu'il est dans une situation horisontale (884.).

** Les plus legeres notions de l'Algebre commune suffisent pour trouver ces racines. On suivra la méthode d'approximation qui est exposée à l'*Art.* 226 de la troisieme partie du *Cours de Mathématiques* de M. *Bezout*.

** Car, lorsque l'angle de la base commence à sortir du Fluide, on a, dans la supposition présente de $e = 12a$, $\zeta = 12a\frac{\sin\Delta}{\cos\Delta}$; mais $\cos\Delta : \sin\Delta :: 6 : 1$, donc $\frac{\sin\Delta}{\cos\Delta} = \frac{1}{6}$, & par conséquent $\zeta = 2a$.

*** Pour trouver cette inclinaison, il faut se rappeller que l'angle de la base étant hors du Fluide, la quantité $c = EF$, n'est plus $= 2g = 12a$. Pour en trouver la valeur, il faut avoir FIG. 79.

Digitized by Google

inclinaiſon de plus de 88° à peu près : donc, quand une puiſſance étrangere ſera incliner le parallélipipede de $13° \frac{1}{2}$, il tombera tout-à-coup juſqu'à l'inclinaiſon de 88°. On voit donc par-là combien ce corps eſt éloigné de conſerver ſa ſtabilité. On trouveroit encore de plus grandes différences, en ſuppoſant a plus petite ; mais il ſuffit, pour notre objet, de comprendre que la ſureté, ou la conſervation de la ſtabilité ne peut être fondée que ſur la ſuppoſition que les puiſſances étrangeres ne puiſſent donner au corps une inclinaiſon plus grande que celle qui correſpond à la ſeconde racine : cette limite étant paſſée, la ſtabilité ſe perd entiérement, & le corps prend une inclinaiſon preſque totale.

PROPOSITION LXXVI.

(899.) *Trouver l'inclinaiſon que prendra un corps quelconque, flottant ſur un Fluide, ſi on lui ajoute un nouveau poid dans un point déterminé du plan vertical, perpendiculaire à l'axe de rotation, qui paſſe par le centre de gravité.*

Comme dans ce cas, on a encore $u = 0$, le moment qui agit ſur le corps eſt (830.) $= mſcxdx \left(\frac{ydy}{dx} + k - x\right) = mſcxydy - mſcxdx\,(k - x)$. Mais le ſecond terme de cette expreſſion s'évanouit, à cauſe que les moments négatifs de la partie choquée ſont égaux aux moments poſitifs de la partie choquante ; ainſi cette expreſſion ſe réduit à $mſcxydy$. Or le moment du poids eſt $= \pi\,(q \mathit{ſin}\,\Delta + p \mathit{coſ}\,\Delta)$, on aura donc également ..... $\pi\,(q \mathit{ſin}\,\Delta + p \mathit{coſ}\,\Delta) = mſcxydy$. Subſtituant dans le ſecond membre de cette queſtion, la valeur de y & celle de dy, en x

---

recours à l'équation $e = \frac{P+\varpi}{\frac{1}{2}mbc}$, (895.), laquelle devient $e = \frac{24a^2}{\zeta}$, en y ſubſtituant pour $P+\varpi$, ſa valeur $2mbga$, & enſuite pour g ſa valeur $6a$. Cette équation donnera $e = 10a$, en mettant pour ζ ſa valeur $\frac{24}{10}a$. Ayant donc les valeurs de ζ & de e, on aura facilement celle de Δ, par l'équation $\frac{\mathit{ſin}\,\Delta}{\mathit{coſ}\,\Delta} = \frac{1}{e}$, ou, ce qui eſt la même choſe, en conſidérant le triangle DEF, qui donne $EF : DF :: 1 : \mathit{Tang}\,FED$, ou $e : \zeta :: 1 : \mathit{Tang}\,\Delta$, ou enfin, $10 : \frac{24}{10} :: 1 : \mathit{Tang}\,\Delta = \frac{6}{25}$. L'angle d'inclinaiſon eſt donc celui dont la tangente eſt les $\frac{6}{25}$ du rayon ; c'eſt-à-dire, $= 24000$ (le rayon des tables ordinaires étant $= 100000$), & cette tangente répond à 13° 30' à peu près. En procédant ainſi pour la quatrieme racine $\zeta = 35a$, on trouvera $e = \frac{24}{35}a$, $\mathit{Tang}\,\Delta = \frac{1225}{24}$ du rayon, c'eſt-à-dire $= 5104166$, ce qui répond à 88° 53'.

Digitized by Google

& dx, qu'on tirera de l'équation qui réſulte de la figure & de la diſpoſition du corps; intégrant enſuite, & ſubſtituant la plus grande valeur de x, déduite de l'équation $P + \pi = mſcxdy$ qui a lieu entre le poids $P + \pi$ & la force verticale $mſcxdy$, qui agit ſur le corps, on aura une nouvelle équation, de laquelle on tirera la valeur de $ſin\ \Delta$.

COROLLAIRE I.

(900.) Si l'inclinaiſon étoit infiniment petite, on pourroit ſubſtituer à la place de $mſcxydy$, la quantité $(\pm HP + \frac{m}{12} ſce^3)\ ſin\ \Delta$, qui alors lui eſt égale (844.); & l'on auroit $\pi (q\ ſin\ \Delta + p) = (\pm HP + \frac{m}{12} ſce^3)\ ſin\ \Delta$; ce qui donne $ſin\ \Delta = \frac{p\pi}{\pm HP + \frac{m}{12} ſce^3 - q\pi}$ *.

COROLLAIRE II.

(901.) Dans les corps formés par la révolution d'une ligne quelconque autour de l'axe horiſontal de rotation, le moment eſt (838.) $PK\ ſin\ \Delta$, P exprimant le poids total du corps, qui, dans le cas préſent, eſt $P + \pi$. Subſtituant donc dans cette formule le poids $P + \pi$, à la place de P ſeul, on aura le moment $K(P + \pi)\ ſin\ \Delta$, & par conſéquent $\pi (q\ ſin\ \Delta + p\ cof\ \Delta) = K(P + \pi)\ ſin\ \Delta$, équation qui donne le ſinus de l'inclinaiſon, ou $ſin\ \Delta = \frac{\pm p\pi}{((K(P+\pi) - q\pi)^2 + p^2\pi^2)^{\frac{1}{2}}}$ **.

COROLLAIRE III.

(902.) Ayant exprimé par q la diſtance du centre de gravité O, au plan qui, paſſant par le poids additionnel π, eſt perpendiculaire à DOH. Si nous ſuppoſons maintenant que q n'exprime plus que la diſtance de l'axe H au même plan, nous n'aurons qu'à ſubſtituer $K \pm q$, en place de q ſeul, & l'on aura le ſinus de l'inclinaiſon, ou $ſin\ \Delta = \frac{\pm p\pi}{((KP \pm q\pi)^2 + p^2\pi^2)^{\frac{1}{2}}}$, ce ſinus étant celui d'un angle plus grand que 90 degrés, ſi $KP - q\pi$ eſt négatif. FIG. 62.

COROLLAIRE IV.

(903.) L'expreſſion $ſin\ \Delta = \frac{\pm p\pi}{((K(P \mp q\pi)^2 + p^2\pi^2)^{\frac{1}{2}}}$ ne donnant qu'une

* On ſuppoſe $cof\ \Delta = 1$, comme il convient, puiſque l'inclinaiſon eſt infiniment petite.

** Pour avoir $ſin\ \Delta$, il faut ſubſtituer, en place de $cof\ \Delta$, ſa valeur $(1 - ſin\ \Delta^2)^{\frac{1}{2}}$, faire évanouir le radical, & dégager enſuite $ſin\ \Delta$.

Digitized by Google

seule racine, ou valeur de $\sin \Delta$, attendu que la valeur négative ne sert que pour le côté opposé, lorsque p est négatif; il s'ensuit que les moments seront toujours positifs depuis l'inclinaison correspondante à cette premiere racine, ou valeur de $\sin \Delta$, qu'on incline comme on voudra un corps formé par la révolution d'une ligne quelconque autour d'une axe horisontal.

COROLLAIRE V.

(904.) Comme KP ne se trouve que dans le dénominateur, plus cette quantité sera grande, plus la valeur de $\sin \Delta$ sera petite.

PROPOSITION LXXVII.

(905.) *Trouver l'inclinaison que prendra un corps quelconque, qui, flottant sur un Fluide, est poussé par une Puissance constante horisontale, & perpendiculaire à l'axe de rotation, qu'on suppose également horisontal; cette puissance étant placée dans la verticale qui passe par le centre de gravité.*

Fig. 76. Les moments qui agissent sur le corps sont (830.) = ...
$mscydy(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{4} u \sin\theta)^2 + mscdx(k-x)(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{4} u \sin\theta)^2$. Supposant maintenant que O est son centre de gravité, & que l'angle $AOB = \Delta$ est l'inclinaison qu'il auroit prise à l'égard de la verticale BO, si la puissance π, dont la direction est l'horisontale CA, agissoit au point A; & si l'on fait de plus $AO = q$, il est clair qu'on aura le moment avec lequel la puissance π agit suivant $CD = q\pi \cos\Delta$. Cela posé, nous aurons les trois équations suivantes . . . . . .
$q\pi \cos\Delta = mscydy(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{4} u \sin\theta)^2 + mscdx(k-x)(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{4} u \sin\theta)^2$.
$P + \pi \sin\Delta . \cos\Delta = mscdy(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{4} u \sin\theta)^2$. . . . . .
$\pi \cos\Delta^2 = mscdx(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{4} u \sin\theta)^2$ *.

Substituant, dans ces équations, les valeurs de $\sin\theta$, de y &

* Car la force π qui agit suivant l'horisontale CA, peut être décomposée en deux autres, l'une perpendiculaire à AO, représentée par CD, & l'autre dirigée suivant OA, qui est exprimée par AD. La considération de cette derniere force est inutile, puisque sa direction passant par le centre de gravité, elle ne peut produire aucune rotation (138.). Quant à la force CD, elle est $= \pi \cos\Delta$, & par conséquent son moment $= q\pi \cos\Delta$; or ce moment est égal à la somme des moments qu'éprouve le corps de la part du Fluide, puisqu'il doit leur faire équilibre dans l'inclinaison; c'est ce qui donne la premiere équation. La force perpendiculaire CD peut également être décomposée en deux autres, l'une verticale, représentée par $DE = \pi \cos\Delta . \sin\Delta$, & l'autre horisontale, représentée par $CE = \pi \cos\Delta^2$. La premiere étant ajoutée au poids P, équivaut à la somme des forces verticales qui agissent sur le corps (561.); & la force horisontale $\pi \cos\Delta^2$ est égale la somme des forces horisontales, c'est ce qui fournit la seconde & la troisieme équation.

Digitized by Google

de dy, exprimées en x & dx, déduites de l'équation que donnera la figure & la disposition du corps, & intégrant réellement, on aura trois autres équations, par lesquelles on trouvera les valeurs de x, de u, & de Δ.

PROPOSITION LXXVIII.

(906.) *Trouver l'inclinaison que prendra un cylindre qui flotte horisontalement, ce cylindre étant poussé par une puissance constante* π, *horisontale, & perpendiculaire à l'axe; & cette puissance étant placée dans le plan vertical qui passe par le centre de gravité.*

Les moments qui agissent sur le cylindre, lorsqu'il n'est soumis à l'action d'aucune puissance, sont (870.) $= K(N\cos\Delta + Q\sin\Delta)$, N exprimant la résistance horisontale, & Q les forces verticales. Or lorsque ce cylindre a acquis sa plus grande vitesse, on a $N = \pi\cos\Delta^2$, & $Q = P + \pi\sin\Delta.\cos\Delta$ (*Voyez la Note de l'Art. précédent*) : donc, en substituant ces valeurs, nous aurons . . . . . $K(\pi\cos\Delta^3 + P\sin\Delta + \pi\sin\Delta^2.\cos\Delta) = q\pi\cos\Delta$, ou en divisant par $K\cos\Delta$, & mettant l'unité en place de $\cos\Delta^2 + \sin\Delta^2$, $\pi + \frac{P.\sin\Delta}{\cos\Delta} = \frac{q\pi}{K}$: ou enfin $\frac{P\sin\Delta}{\cos\Delta} = \frac{q\pi - K\pi}{K} = \frac{\pi(q-K)}{K}$: mais $\frac{\sin\Delta}{\cos\Delta}$ est l'expression de la tangente de l'angle de l'inclinaison que prendra le cylindre, ou $Tang\,\Delta$: donc on aura $Tang\,\Delta = \frac{\pi(q-K)}{KP}$.

COROLLAIRE I.

(907.) Si l'on vouloit une solution pour le cas particulier dans lequel la vitesse du cylindre est zero, ou dans lequel un axe horisontal fixe, qui passe par le centre de gravité, assujettit le cylindre, de façon à empêcher son mouvement horisontal & vertical, & à lui laisser seulement le mouvement de rotation autour de cet axe; il n'y auroit qu'à retrancher les quantités qui dépendent de ces mouvemens empêchés, laissant seulement le moment $KP\sin\Delta$ (871.), & l'on auroit $KP\sin\Delta = q\pi\cos\Delta$, ce qui donne $Tang\,\Delta = \frac{q\pi}{KP}$.

COROLLAIRE II.

(908) La tangente de l'inclinaison, le cylindre étant libre, est à la même tangente, le cylindre tournant sur un axe fixe, comme $q - K$ est à q, ou comme la distance de la puissance à l'axe du

Digitized by Google

cylindre, eſt à la diſtance de la même puiſſance, au centre de gravité.

COROLLAIRE III.

(909.) Ces mêmes moments $KP \sin \Delta$, qui ont été trouvés pour le cylindre, ont également lieu pour tout corps formé par la révolution d'une ligne quelconque, autour d'un axe horiſontal. On aura donc pour tous ces corps, dans le cas où l'on ſuppoſe l'axe fixe, la ſtabilité, ou la tangente de l'inclinaiſon $= Tang\ \Delta = \frac{q^2}{KP}$, cette Tangente étant plus grande que celle qui a lieu lorſque ces corps ſont libres, ou avec leur mouvement horiſontal.

COROLLAIRE IV.

(910.) La même choſe arrive dans un corps quelconque, quoiqu'il ne ſoit pas formé par la révolution d'une ligne autour d'un axe horiſontal, avec cette ſeule différence que la quantité K eſt variable, ſelon les différentes inclinaiſons.

COROLLAIRE V.

(911.) Nous avons trouvé (838.) $K \sin \Delta = h$, h exprimant la diſtance horiſontale du centre de gravité à la verticale, qui paſſe par le centre de volume. Donc on aura $K = \frac{h}{\sin \Delta}$; & cette valeur étant ſubſtituée dans l'équation $Tang\ \Delta = \frac{q^2}{KP}$, donne $Tang\ \Delta = \frac{q^2 \sin \Delta}{hP} = \frac{\sin \Delta}{\cos \Delta}$. Donc $\cos \Delta = \frac{hP}{q^2}$; & par conſéquent $\sin \Delta^2 = \frac{q^2 q^2 - h^2 P^2}{q^2 q^2}$.

CHAPITRE XII.

Des Moments qui agiſſent ſur les corps, lorſqu'ils tournent librement dans des Fluides, ſur un axe quelconque qui paſſe par leur centre de gravité.

PROPOSITION LXXIX.

(912.) *TROUVER les moments qui agiſſent ſur un corps quelconque, tournant ſur un axe qui paſſe par ſon centre de gravité.*

Soit diviſé la ſurface du corps en petits quadrilateres, ſenſible-

Digitized by Google

ment plans, par des plans horisontaux & verticaux, & cherchant la force positive ou négative qui agit sur chacun de ces petits quadrilateres, suivant la direction de son mouvement, on la multipliera par la distance perpendiculaire du petit quadrilatere à l'axe de rotation. Prenant ensuite la somme de tous les produits, on aura les moments totaux qu'on cherche.

La force horisontale, qui agit sur un petit quadrilatere, choquant, ou choqué, est (624.) = ... $mc\left(Da\pm\frac{1}{4}u\,\mathit{sin}\,\theta\left((D+\frac{1}{4}a)^{\frac{1}{2}}-(D-\frac{1}{4}a)^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{64}u^{2}a\,\mathit{sin}\,\theta^{2}\right)$, laquelle étant réduite à une direction quelconque devient = ... $\frac{mb\,\mathit{sin}\,n}{\mathit{sin}\,s}\left(Da\pm\frac{1}{4}u\,\mathit{sin}\,\theta\left((D+\frac{1}{4}a)^{\frac{1}{2}}-(D-\frac{1}{4}a)^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{64}u^{2}a\,\mathit{sin}\,\theta^{2}\right)$.

Supposons maintenant que r exprime la distance perpendiculaire du petit quadrilatere à l'axe, le moment qui agit sur cette petite surface sera $=\frac{mbr\,\mathit{sin}\,n}{\mathit{sin}\,s}\left(Da\pm\frac{1}{4}u\,\mathit{sin}\,\theta\left((D+\frac{1}{4}a)^{\frac{1}{2}}-(D-\frac{1}{4}a)^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{64}u^{2}a\,\mathit{sin}\,\theta^{2}\right)$; & le moment total, c'est-à-dire, celui qui agit sur tout le corps sera $=m\int\frac{br\,\mathit{sin}\,n}{\mathit{sin}\,s}\left(Da\pm\frac{1}{4}u\,\mathit{sin}\,\theta\left((D+\frac{1}{4}a)^{\frac{1}{2}}-(D-\frac{1}{4}a)^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{64}u^{2}a\,\mathit{sin}\,\theta^{2}\right)$.

COROLLAIRE I.

(913.) Les moments de l'une & de l'autre dénivellation seront par conséquent = ... $m\int\frac{br\,\mathit{sin}\,n}{\mathit{sin}\,s}\left(Da-\frac{1}{4}u\,\mathit{sin}\,\theta\left((D+\frac{1}{4}a)^{\frac{1}{2}}-(D-\frac{1}{4}a)^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{64}u^{2}a\,\mathit{sin}\,\theta^{2}\right)$.

COROLLAIRE II.

(914.) Si, une des moitiés du corps est égale & semblable à l'autre moitié, de sorte que les quantités r, $\mathit{sin}\,\theta$, $\mathit{sin}\,n$, D & a, de l'une des moitiés, soient égales aux mêmes quantités correspondantes de l'autre moitié, en sommant les moments qui agissent sur chaque paire de petits quadrilateres correspondants dans l'une & dans l'autre moitié, on trouvera le moment qui agit sur tout le corps $=\frac{1}{2}m\int\frac{bru\,\mathit{sin}\,n.\,\mathit{sin}\,\theta}{\mathit{sin}\,s}\left((D+\frac{1}{4}a)^{\frac{1}{2}}-(D-\frac{1}{4}a)^{\frac{1}{2}}\right)=$ . . . . . $\frac{1}{4}m\int\frac{bruD^{\frac{1}{2}}a\,\mathit{sin}\,n.\mathit{sin}\,\theta}{\mathit{sin}\,s}\left(1-\frac{a^{2}}{96D^{2}}-\frac{a^{4}}{2048\,D^{4}}-\&c.\right)$; ou si l'on néglige tous les termes de la série excepté le premier, = ... $\frac{1}{4}m\int\frac{bruD^{\frac{1}{2}}a\,\mathit{sin}\,n.\mathit{sin}\,\theta}{\mathit{sin}\,s}$.

Digitized by Google

COROLLAIRE III.

(915.) Si l'on appelle V la viteſſe angulaire avec laquelle tourne le corps, on aura (131.) $V=\frac{u\,dt}{r}$, & $u=\frac{rV}{dt}$, ſubſtituant cette valeur de u dans l'expreſſion des moments; ils ſeront encore exprimés par . . . . . $m\int\frac{br\,\mathit{fin}\,x}{\mathit{fin}\,\theta}\left(Da\pm\frac{rV\,\mathit{fin}\,\theta}{6\,dt}\left((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}-(D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right)+\frac{r^2V^2a\,\mathit{fin}\,\theta^2}{64\,dt^2}\right)$.

COROLLAIRE IV.

(916.) Les moments de l'une & de l'autre dénivellation ſeront par conſéquent = ... $m\int\frac{br\,\mathit{fin}\,x}{\mathit{fin}\,\theta}\left(Da-\frac{rV\,\mathit{fin}\,\theta}{6dt}\left((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}-(D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right)+\frac{r^2V^2\,\mathit{fin}\,\theta^2}{64\,dt^2}\right)$.

COROLLAIRE V.

(917.) Si l'une des moitiés du corps étoit égale & ſemblable à l'autre moitié, de ſorte que les quantités r, $\mathit{fin}\,\theta$, $\mathit{fin}\,x$, $\mathit{fin}\,\theta$, D & a d'une moitié, fuſſent égales aux mêmes quantités correſpondantes de l'autre moitié, en ſommant les moments qui agiſſent ſur deux petits quadrilateres correſpondants dans l'une & dans l'autre moitié; on trouvera que le moment total, ou celui qui agit ſur tout le corps ſera $=\frac{1}{2}m\int\frac{br^2V\,\mathit{fin}\,x\,.\,\mathit{fin}\,\theta}{dt\,\mathit{fin}\,\theta}\left((D+\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}-(D-\frac{1}{2}a)^{\frac{3}{2}}\right)=$ $\frac{1}{2}m\int\frac{br^2V\,\mathit{fin}\,x\,.\,\mathit{fin}\,\theta}{dt\,\mathit{fin}\,\theta}D^{\frac{1}{2}}a\left(1-\frac{a^2}{96D^2}-\frac{a^4}{2048D^4}-\&c.\right)$.

COROLLAIRE VI.

(918.) Si l'on exprimoit les ſurfaces du corps par une équation algébrique, on pourroit ſubſtituer $D+x$ à la place de D, & dx à la place de a: par cette ſubſtitution les moments deviendroient $=m\int\frac{br\,\mathit{fin}\,x}{\mathit{fin}\,\theta}\,dx\left(D+x\pm\frac{rV\,\mathit{fin}\,\theta}{4\,dt}\,(D+x)^{\frac{1}{2}}+\frac{r^2V^2\,\mathit{fin}\,\theta^2}{64\,dt^2}\right)$; ou ſi le corps flotte, ils ſeroient $=m\int\frac{br\,\mathit{fin}\,x\,dx}{\mathit{fin}\,\theta}\left(x^{\frac{1}{2}}\pm\frac{rV\,\mathit{fin}\,\theta}{8\,dt}\right)^2$*.

COROLLAIRE VII.

(919.) Si l'une des moitiés du corps étoit égale & ſemblable à l'autre moitié, de ſorte que les quantités r, $\mathit{fin}\,\theta$, $\mathit{fin}\,x$, $\mathit{fin}\,\theta$,

* Car alors $D=0$ (587.).

D & a

D & a d'une des moitiés, fussent égales aux mêmes quantités, correspondantes de l'autre moitié, l'expression des moments seroit $= \frac{1}{2} m V \int \frac{br^2(D+x)^{\frac{1}{2}} dx \sin x . \sin \theta}{dt \sin \alpha}$; & si le corps étoit flottant, cette expression deviendroit $= \frac{1}{2} m V \int \frac{br^2 x^{\frac{1}{2}} dx \sin x \sin \theta}{dt \sin \alpha}$.

COROLLAIRE VIII.

(920.) Les moments qui agissent sur le corps seront donc, proportionnels à $\frac{V}{dt}$, ou seront égaux à une quantité constante quelconque, multipliée par $\frac{V}{dt}$ *.

COROLLAIRE IX.

(921.) Si le corps étoit formé par la révolution d'une ligne quelconque, autour de l'axe même qui passe par son centre de gravité, & sur lequel tourneroit le corps, on auroit $\sin x = 0$, & par conséquent les moments seront aussi égaux à zero.

PROPOSITION LXXX.

(922.) *Décomposer les moments qui agissent sur un corps, dont les moitiés sont égales & semblables, & qui tourne sur un axe horisontal, en moments horisontaux & verticaux.*

Si l'on divise par r le moment $\frac{mbruD^{\frac{1}{2}} x \sin x . \sin \theta}{2 \sin \alpha} = \frac{mbrux^{\frac{1}{2}} dx \sin x . \sin \theta}{2 \sin \alpha}$, qui agit sur deux petits quadrilateres quelconques correspondants, la force que ces deux petites surfaces exerceront, sera $= \frac{mbux^{\frac{1}{2}} dx \sin x \sin \theta}{2 \sin \alpha}$. Or la viteſſe u peut être décomposée dans la viteſſe horisontale $\frac{u(k-x)}{r}$, & dans la verticale $\frac{uy}{r}$; k exprimant la distance du centre de gravité à la superficie du Fluide; x la distance verticale du petit quadrilatere à la même superficie; & y la distance horisontale du même petit quadrilatere au plan vertical qui coïncide avec l'axe. Substituant donc successivement ces valeurs à la place de u seul dans l'expression de la force, cette derniere se trouvera composée de deux autres, comme il suit: $\frac{mbux^{\frac{1}{2}} dx(k-x) \sin x . \sin \theta}{2r \sin \alpha} + \frac{mbuyx^{\frac{1}{2}} dx \sin x \sin \theta}{2r \sin \alpha}$. Mais

* Cela est évident; car, après l'intégration faite, la quantité qui multiplie $\frac{V}{dt}$ dans l'expression des moments, est constante pour le même corps.

la premiere de ces forces provenant d'un mouvement horisontal, on a, pour ce cas (584.), $\sin\theta = \sin\lambda.\sin\nu$; & la seconde provenant d'un mouvement vertical, on aura (585.), $\sin\theta = \cos\nu$; la force dont il s'agit sera donc composée de ces deux . . . . . .

$\frac{mbux^{\frac{1}{2}}dx}{2r\sin\nu}\left(\sin\nu.\sin\lambda.\sin\nu(k-x)+y\sin\nu.\cos\nu\right)$. Chacune de ces parties peut encore être décomposée en deux autres, l'une horisontale, & l'autre verticale, en faisant, dans le premier cas (572, 573, 577 & 580.) $\sin\nu = \sin\lambda.\sin\nu$; & dans le second, $\sin\nu = \cos\nu$; ainsi les quatre parties dans lesquelles la force sera divisée, seront $= \frac{mbux^{\frac{1}{2}}dx}{2r\sin\nu}\left(\sin\lambda^2.\sin\nu^2(k-x)+\sin\lambda.\sin\nu.\cos\nu(k-x)+y\sin\lambda.\sin\nu.\cos\nu+y\cos\nu^2\right)$

Pour avoir maintenant les moments horisontaux & verticaux de cette force, on doit multiplier les parties $\sin\lambda^2.\sin\nu^2(k-x)+y\sin\lambda.\sin\nu.\cos\nu$, par $k-x$, distance verticale du petit quadrilatere au plan horisontal qui passe par le centre de gravité; & les parties $\sin\lambda.\sin\nu.\cos\nu(k-x)+y\cos\nu^2$, par y, distance horisontale du même petit quadrilatere au plan vertical qui coïncide avec l'axe. Les moments qui agissent sur les deux petits quadrilateres correspondants seront donc $= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{mbux^{\frac{1}{2}}dx}{2r\sin\nu}\left(\sin\lambda^2.\sin\nu^2(k-x)^2+2\sin\lambda.\sin\nu.\cos\nu.(k-x)\,y+y^2\cos\nu^2\right) = \frac{mbux^{\frac{1}{2}}dx}{2r\sin\nu}\left(\sin\lambda.\sin\nu(k-x)+y\cos\nu\right)^2$, ou, en faisant $\frac{udt}{r} = V$, ce qui donne $u = \frac{Vr}{dt}$, ces moments seront $= \ldots\ldots\ldots$

$\frac{mbVx^{\frac{1}{2}}dx}{2dt\sin\nu}\left(\sin\lambda.\sin\nu(k-x)+y\cos\nu\right)^2$. Enfin la somme de tous les moments qui agissent sur le corps entier sera $= \ldots\ldots\ldots$

$\frac{1}{2}\frac{mV}{dt}\int\frac{bx^{\frac{1}{2}}dx}{\sin\nu}\left(\sin\lambda.\sin\nu(k-x)+y\cos\nu\right)^2 = \ldots\ldots\ldots$

$\frac{1}{2}\frac{mV}{dt}\int cx^{\frac{1}{2}}dx\left(\sin\lambda.\sin\nu(k-x)^2+2y(k-x)\cos\nu+\frac{y^2\cos\nu^2}{\sin\lambda.\sin\nu}\right)$*.

PROPOSITION LXXXI.

(923.) *Réduire les moments qui agissent sur un corps dont les moitiés sont égales & semblables, & qui tourne, sur un axe vertical, à deux moments horisontaux perpendiculaires entre eux.*

---

* Car $b = \frac{c}{\sin\lambda}$, *Art.* 575.

Digitized by Google

Soit ſuppoſé deux plans verticaux perpendiculaires entre eux, & coïncidant avec l'axe; ſuppoſant enſuite que la diſtance horiſontale d'un petit quadrilatere à l'un de ces plans ſoit nommée z, & que la diſtance à l'autre ſoit nommée y; on décompoſera la viteſſe u en deux autres paralleles aux mêmes plans, leſquelles viteſſes ſeront $\frac{ux}{r}$ & $\frac{uy}{r}$. Si l'on ſubſtitue maintenant ces expreſſions de la viteſſe, en place de u ſeul, dans l'expreſſion $\frac{mbux^{\frac{1}{2}}dx\,fin\,\nu.fin\,\theta}{2\,fin\,\nu}$ qui (922.) eſt celle de la force qui agit ſur deux petits quadrilateres correſpondants; cette force ſera diviſée en deux autres, & $=\frac{mbux^{\frac{1}{2}}dx\,fin\,\nu.fin\,\theta}{2r\,fin\,\nu}(z+y)$. Comme ces forces proviennent toutes deux d'un mouvement horiſontal, & qu'on demande qu'elles exercent leur action dans la même direction, on a pour toutes les deux $fin\,\varkappa$, ainſi que $fin\,\theta = fin\,\lambda.fin\,\nu$ (572 & 584.); donc ces forces ſeront $\frac{mbux^{\frac{1}{2}}dx\,fin\,\lambda^2\,fin\,\nu^2}{2r\,fin\,\nu}(z+y)=\frac{\frac{1}{2}mV x^{\frac{1}{2}}dx\,fin\,\lambda.fin\,\nu}{dt}(z+y)$. Multipliant maintenant chacune de ces forces par la diſtance horiſontale z & y de l'axe à leurs directions, & mettant dz & dy à la place de c, on aura, pour l'expreſſion des moments, ... $\frac{\frac{1}{2}mV x^{\frac{1}{2}}dx\,fin\,\lambda.fin\,\nu}{dt}(z^2dz+y^2dy)$.

Scolie I.

(924.) On a ſuppoſé, comme on le voit, dans le calcul, non-ſeulement que les moitiés du corps, priſes de part & d'autre d'un des plans verticaux, ſont égales & ſemblables; mais encore que le ſecond plan vertical diviſe auſſi le corps en deux moitiés égales & ſemblables. C'eſt ce qu'on doit avoir préſent à l'eſprit, pour ne pas confondre les corps dont il s'agit ici, avec ceux qui ne peuvent être diviſés en deux moitiés égales & ſemblables que par un ſeul plan vertical.

Scolie II.

(925.) Quoique la rotation puiſſe, ſans contredit, ſe faire ſur un axe quelconque, & ſous quelque inclinaiſon que ce ſoit, cependant toutes les rotations poſſibles peuvent ſe réduire à trois, l'une ſur un axe vertical, & les deux autres ſur deux axes horiſontaux perpendiculaires entr'eux; nous nous bornerons, pour plus de facilité, à conſidérer la rotation ſeulement ſur ces trois axes.

Digitized by Google

PLANC. IV. Nous ne la considérerons même que sur deux axes, l'un vertical & l'autre horisontal, attendu que tout ce qu'on dira de la rotation sur ce dernier, s'appliquera également à la rotation sur l'autre axe horisontal.

PROPOSITION LXXXII.

(926) *Trouver les moments qui agissent sur un cylindre qui flotte horisontalement sur un Fluide, & qui tourne sur un axe horisontal parallele à ses côtés, & passant par le centre de gravité.*

Soit *ABFD* le cylindre, *C* son centre de volume, & *CGE* une
FIG. 77. verticale dans laquelle se trouve le centre de gravité *G*. Soit tiré l'horisontale *BF*, ainsi que les droites *CB*, *GB*, & soit fait $CG = k$, $CB = R$, $CE = x$, & $BE = y$. Le moment provenant des forces qui agissent sur une différencielle horisontale en *B*, & sur sa correspondante en *F*, est (919.) $= \frac{\frac{1}{2} mbr^2 V x^{\frac{1}{2}} dx \sin \varkappa \sin \theta}{dt \sin \varkappa}$; *b* exprimant la longueur du cylindre ; $r = GB$; $\varkappa = \theta =$ l'angle *GBC* ; $\sin \varkappa = \sin BCE = \frac{y}{R}$. Par conséquent on aura $K : \sin \theta :: r : \frac{y}{R}$; ce qui donne $r \sin \theta = \frac{ky}{R}$. Ces valeurs étant substituées dans l'expression des moments, elle deviendra $\frac{\frac{1}{2} mbV k^{\frac{1}{2}} y x^{\frac{1}{2}} dx}{Rdt} = \frac{mbV k^{\frac{1}{2}}}{2Rdt} x^{\frac{1}{2}} dx \sqrt{R^2 - x^2}$.

La somme des moments qui agissent sur tout le cylindre depuis l'horisontale *BF* jusqu'au diametre aussi horisontal *AD*, sera donc $= \frac{mbV k^{\frac{1}{2}}}{2Rdt} \int x^{\frac{1}{2}} dx \sqrt{R^2 - x^2}$; ou, en réduisant $\sqrt{R^2 - x^2}$ en série, & intégrant, $= \frac{mbV k^{\frac{1}{2}}}{dt} \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{7 \cdot 2R^2} - \frac{x^{\frac{11}{2}}}{11 \cdot 8R^4} - \frac{x^{\frac{15}{2}}}{15 \cdot 16R^6} - \frac{5x^{\frac{19}{2}}}{19 \cdot 128R^8} - \frac{7x^{\frac{23}{2}}}{23 \cdot 256R^{10}} - \&c \right)$,

Faisant maintenant $x = R$, les moments qui agissent sur tout le demi-cylindre *ABHFD* seront $= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{mbV k^{\frac{1}{2}} R^{\frac{3}{2}}}{dt} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{7 \cdot 2} - \frac{1}{11 \cdot 8} - \frac{1}{15 \cdot 16} - \frac{5}{19 \cdot 128} - \frac{7}{23 \cdot 256} - \&c. \right)$, ou, $= \frac{6}{25} \cdot \frac{mbV k^{\frac{1}{2}} R^{\frac{3}{2}}}{dt}$, à très-peu près.

COROLLAIRE I.

(927.) Les moments de la dénivellation sont négligeables, par ce qu'on a dit dans la Proposition précédente.

COROLLAIRE II.

(928.) Tous les moments s'évanouissent lorsqu'on a $k = o$; c'est-à-dire, lorsque le centre de gravité coincide avec l'axe du cylindre.

Digitized by Google

CHAPITRE XIII.

De la Viteſſe angulaire avec laquelle les corps flottants tournent ſur un axe quelconque.

PROPOSITION LXXXIII.

(929.) *TROUVER la viteſſe angulaire avec laquelle un corps flottant tourne ſur un axe quelconque, étant animé par une, ou par pluſieurs puiſſances.*

La viteſſe angulaire eſt (179.) $V = \frac{\int p\pi dt}{S}$; $p\pi$ exprimant la ſomme des moments des puiſſances qui agiſſent; t le temps de leur action; & S la ſomme des moments d'inertie. Subſtituant donc en place de $p\pi$ les moments qui agiſſent ſur le corps, & qui proviennent des réſiſtances & de l'action des puiſſances. On aura une équation, de laquelle on tirera la valeur de la viteſſe angulaire V dans quelque inſtant de l'action que ce ſoit.

COROLLAIRE I.

(930.) Plus les moments d'inertie ſeront grands, plus il faudra de temps au corps pour acquérir une viteſſe angulaire donnée.

SCOLIE.

(931.) Les moments $p\pi$, ou leur ſomme, peuvent provenir de différentes puiſſances, & ces puiſſances peuvent être conſtantes; c'eſt-à-dire, indépendantes de la viteſſe angulaire V, ou elles peuvent dépendre abſolument de cette viteſſe; comme en effet, elles en dépendent lorſqu'elles proviennent de la réſiſtance du Fluide, ainſi que nous l'avons vu dans le *Chapitre* précédent. M. *Bouguer* (*Traité du Navire, liv. II, ſection III, Chap. I*, § 3.), & *Léonard Euler*, ont fait abſtraction de cette derniere eſpece de puiſſance, & même M. *Bouguer* ajoute qu'il néglige ces réſiſtances, à cauſe que le corps diviſe très-peu de Fluide; & qu'il en eſt de la réſiſtance qu'il éprouve, comme de celle que l'air oppoſe au mouvement des pendules; réſiſtance qui eſt preſque inſenſible, à cauſe que la viteſſe angulaire V eſt très-petite. Mais le cas dont il s'agit ici eſt très-différent; car les pendules oſcilleroient encore avec plus de régularité ſans la réſiſtance, au lieu que ſans la réſiſ-

Digitized by Google

tance, les corps ne pourroient pas se soutenir, dans leur rotation, sur les Fluides. Le seul cas où ceci ait quelque fondement, est celui où le corps est formé par la révolution d'un plan quelconque, autour d'un axe qui passe par le centre de gravité. Dans ce cas, en supposant que la rotation, ou oscillation, se fasse sur un axe horisontal, si l'on incline un peu le corps, le moment qui l'obligera à tourner, lorsqu'on l'aura abandonné à lui-même, sera (838.), celui qui résulte de l'action du Fluide verticalement, lequel est $= KP \sin \Delta$, expression qui devient zero lorsque $K = 0$; mais cette condition de $K = 0$ est nécessaire pour que les moments résistants s'évanouissent: donc ces moments ne s'évanouissent, même dans ce cas, que lorsque le corps n'est animé par aucune action qui le fasse tourner; c'est-à-dire, lorsqu'il perd entiérement la stabilité, & qu'il est impossible, dans la pratique, qu'il se soutienne. La résistance des Fluides est donc, par conséquent, nécessaire dans la rotation des corps. On fera voir dans la suite que, dans quelques cas, cette résistance n'est pas aussi peu considérable que l'a cru M. *Bouguer*.

COROLLAIRE II.

(932.) Si l'on avoit $p\pi = 32KP \sin \Delta - \frac{GV}{dt}$, * K, P & G, étant constants, on auroit $V = \frac{dt\int(32\,KP\,dt\,\sin\Delta - GV)}{s}$: ou parce

*Voici le fondement de cette égalité. Lorsqu'on incline le corps d'une quantité infiniment petite, ou même d'une quantité finie, & qu'on l'abandonne ensuite à lui-même, le moment $p\pi$ qui l'oblige à tourner, est celui qui résulte de l'action verticale du Fluide, en faisant abstraction de la résistance que le Fluide oppose à ce mouvement. Or, dans cette expression, π représente la puissance, ou la résultante des puissances qui animent le corps, ainsi elle est $= 32\,P$, (832.); P exprimant le poids du corps: & la quantité p, est la distance horisontale de la direction de la puissance au plan vertical qui passe par l'axe de rotation, c'est-à-dire, au plan *directeur* (167 & 168.), laquelle distance est $= K \sin \Delta$ (838 & 839.). Donc le moment $p\pi = 32\,KP \sin \Delta$, abstraction faite du moment des résistances qui proviennent de la rotation.

Mais lorsque le corps est abandonné à lui-même, & qu'il tend à se rétablir dans sa premiere situation, il éprouve, de la part du Fluide, une résistance qui s'oppose à son mouvement, avec une énergie d'autant plus grande, qu'il se meut, ou tend à se mouvoir, avec une plus grande vitesse angulaire. Or (920.) le moment de cette résistance est proportionnel à $\frac{V}{dt}$, ou est égal à $\frac{V}{dt}$ multiplié par une quantité constante; ainsi en appellant G cette constante, le moment de la résistance sera $= \frac{GV}{dt}$.

Cela posé, il est évident que le moment total $p\pi$ qui agit sur le corps, tant en vertu de l'action des puissances que de celle des résistances sera $= 32\,KP \sin \Delta - \frac{GV}{dt}$.

que (131.) $V=\frac{udt}{K}$, u exprimant la viteſſe d'un point éloigné de l'axe de la quantité K, on auroit $\frac{udt}{K}=\frac{d.\int(32.KP\,dt\,\text{fin}\,\Delta-\frac{Gudt}{K})}{S}$, & par conſéquent $Su=32K^2P\int dt\,\text{fin}\,\Delta-G\int udt$.

COROLLAIRE III.

(933.) Si l'on ſuppoſe $G=0$, ou, ce qui eſt la même choſe, ſi l'on fait abſtraction des réſiſtances, comme l'ont fait les Auteurs cités ci-deſſus, il viendra $V=\frac{dt\int 32.KP\,dt\,\text{fin}\,\Delta}{S}=\frac{32\,dt\,KP}{S}\int dt\,\text{fin}\,\Delta$.

PROPOSITION LXXXIV.

(934.) *Trouver la longueur d'un pendule ſimple iſochrone avec le corps flottant qui oſcille ſur un axe horiſontal.*

Soit L la longueur du pendule ſimple, on aura (184.) $V=\frac{\frac{1}{2}dt\int dt\,\text{fin}\,\Delta}{L}=\frac{\omega\,dt}{L}$, en ſuppoſant que ω repréſente la viteſſe du corps dans le pendule: donc $\int dt\,\text{fin}\,\Delta=\frac{\omega}{\frac{1}{2}}$; mais comme on ſuppoſe que les corps décrivent des arcs ſemblables en temps égaux, on a $\omega:u::L:K$, & $\omega=\frac{Lu}{K}$; par conſéquent on a auſſi $\int dt\,\text{fin}\,\Delta=\frac{Lu}{\frac{1}{2}K}=\frac{Lu}{32K}$. Cette valeur étant ſubſtituée dans l'équation $Su=32K^2P\int dt\,\text{fin}\,\Delta-G\int u\,dt$, il en réſulte $Su=KPLu-G\int u\,dt$. Suppoſant maintenant que les oſcillations ſoient très-courtes, ou infiniment petites, on pourra ſuppoſer l'arc que décrivent les corps égal à ſon ſinus, lequel dans le corps flottant eſt $=K\,\text{fin}\,\Delta$, & par conſéquent on aura $udt=Kd\,\text{fin}\,\Delta$, & $\int udt=K\,\text{fin}\,\Delta$, ce qui donnera $Su=KPLu-GK\,\text{fin}\,\Delta$; mais la viteſſe ω au milieu de l'oſcillation, eſt (359.) $=8\left(\frac{L^2\,\text{fin}\,\Delta^2}{2L}\right)^{\frac{1}{2}}=8\,\text{fin}\,\Delta\sqrt{\frac{1}{2}L}=\frac{Lu}{K}$, donc $u=\frac{8K\,\text{fin}\,\Delta}{\sqrt{2L}}$. Cette valeur de u étant ſubſtituée, donne $\frac{8KS\,\text{fin}\,\Delta}{\sqrt{2L}}=\frac{8K^2P\,\text{fin}\,\Delta\sqrt{L}}{\sqrt{2}}-GK\,\text{fin}\,\Delta$; ou $\frac{1}{8}G\sqrt{2L}=KPL-S$; & en quarrant $\frac{1}{32}G^2L=K^2P^2L^2-2KPLS+S^2$, d'où l'on tirera $L=\frac{S}{KP}-\frac{G^2}{64K^2P^2}\pm\sqrt{\left(\frac{S}{KP}+\frac{G^2}{64K^2P^2}\right)^2-\frac{S^2}{K^2P^2}}$.

Digitized by Google

SCOLIE I.

(935.) L'analogie $\omega : u :: L : K$, n'eſt pas rigoureuſement exacte; mais à cauſe de la petiteſſe des arcs décrits, on peut la prendre pour telle.

COROLLAIRE I.

(936.) Si l'on ſuppoſe $G = 0$, ou ſi l'on fait abſtraction des réſiſtances, on aura $L = \frac{S}{KP}$; expreſſion qui ne differe pas de celle que nous avons trouvée (189.) pour la longueur du pendule ſimple iſochrone à un pendule compoſé. Donc le corps flottant oſcile comme un pendule.

COROLLAIRE II.

(937.) Si nous nommons l la longueur du pendule ſimple qui bat les ſecondes de temps moyen, & t le temps, en ſecondes, de la durée d'une oſcillation du corps flottant, ou du pendule L: puiſque les quarrés des temps de la durée des oſcillations, ſont comme les longueurs des pendules (372.), on aura $l : L :: 1 : t^2$, & $L = lt^2$. Subſtituant cette valeur de L dans l'équation $L = \frac{S}{KP} + \frac{G^2}{64K^2P^2} \pm \sqrt{\left(\frac{S}{KP} + \frac{G^2}{64K^2P^2}\right)^2 - \left(\frac{S}{KP}\right)^2}$, on en déduira $t = \sqrt{\frac{S}{KPl} + \frac{G^2}{64K^2P^2l} \pm \frac{1}{l}\sqrt{\left(\frac{S}{KP} + \frac{G^2}{64K^2P^2}\right)^2 - \left(\frac{S}{KP}\right)^2}}$.

COROLLAIRE III.

(938.) Si l'on ſuppoſe $G = 0$, il en réſulte $t = \sqrt{\left(\frac{S}{KPl}\right)}$.

SCOLIE II.

(939.) Maintenant, pour ſatisfaire à l'engagement que nous avons pris dans l'*Art.* 931, nous pouvons comparer les moments des réſiſtances $\frac{6mbVk^2R^{\frac{7}{2}}}{25\,dt}$, (926.) qui agiſſent ſur un cylindre pendant ſa rotation, avec les moments $kP\,\mathit{ſin}\,\Delta$, qui conſtituent ſa ſtabilité. Suppoſons d'abord $\frac{6mbVk^2R^{\frac{7}{2}}}{25\,dt} = kP\,\mathit{ſin}\,\Delta$, & ſubſtituons (131.) à la place de $\frac{V}{dt}$, ſa valeur $\frac{u}{k}$, en ſuppoſant que u exprime la vîteſſe avec laquelle ſe meut l'axe du cylindre, & k la diſtance

distance de cet axe au centre de gravité; & nous aurons $\frac{6mbV\mathrm{R}^{\frac{1}{2}}}{25} = P \sin \Delta$. Supposons encore que le cylindre est submergé dans le Fluide jusqu'à sa plus grande largeur, comme on l'a supposé, *Art.* 926; alors son poids P sera $= \frac{1}{2} R^2 cbm$, c exprimant la circonférence d'un cercle dont le diametre est l'unité, & nous aurons $\frac{6}{25} mbu R^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} R^2 cbm \sin \Delta$, ou $12u = 25 R^{\frac{3}{2}} c \sin \Delta$. Soit supposé, de même, qu'ayant incliné le cylindre de l'angle Δ, & le laissant en liberté, il prenne la vitesse u en se rétablissant dans la situation verticale, l'on aura $u = \frac{8k \sin \Delta}{\sqrt{2L}}$; ou en faisant $k = \frac{1}{2} R$, $u = \frac{4R \sin \Delta}{\sqrt{2L}}$: ce qui donne $\frac{48R \sin \Delta}{\sqrt{2L}} = 25 R^{\frac{3}{2}} c \sin \Delta$, & $\sin \Delta = \frac{48R^{\frac{1}{2}} \sin \Delta}{25c\sqrt{2L}}$. On aura donc, d'après la supposition de $k = \frac{1}{2} R$, & de $P = \frac{1}{2} R^2 cbm$, .. $\frac{6mbV\mathrm{R}^{\frac{1}{2}}}{25\,dt} = kP \sin \Delta = \frac{24R^{\frac{1}{2}} P \sin \Delta}{25c\sqrt{2L}}$. Ainsi la force de la stabilité, ou le moment $kP \sin \Delta = \frac{1}{4} RP \sin \Delta$, sera au moment de la résistance que la même inclinaison Δ produit dans la rotation, comme $\frac{1}{4} RP \sin \Delta$ est à $\frac{24R^{\frac{1}{2}} P \sin \Delta}{25c\sqrt{2L}}$, ou comme $25c\sqrt{2}L$ est à $48R^{\frac{1}{2}}$. Si nous supposons maintenant (936.) $L = \frac{S}{kP}$, & de plus $S = \frac{1}{4} k^2 P$, on aura $L = \frac{1}{4} k = \frac{1}{8} R$: & l'un des moments sera à l'autre, comme $25c$ est à 96.

Scolie III.

(940.) On peut encore, dans le même cas du cylindre, considérer la valeur de L, en ayant égard à celle de G. Les moments des résistances sont (926 & 932.) $\frac{6mbV\mathrm{R}^{\frac{1}{2}}R^{\frac{1}{2}}}{25\,dt} = \frac{GV}{dt}$: donc $G = \ldots \frac{4}{25} mbk^2 R^{\frac{1}{2}}$, ou, en faisant $k = \frac{1}{2} R$, ce qui donne $G = \frac{6}{100} mbR^{\frac{7}{2}}$, & $\frac{G^2}{64k^2P^2} = \frac{36m^2b^2R^7}{P^2(100)^2(4)^2}$*, ou bien, en substituant $P = \frac{1}{2} R^2 cbm$, $\frac{G^2}{64k^2P^2} = \frac{36R}{(25c)^2(8)^2}$. Substituant pareillement dans la quantité $\frac{S}{KP}$ les valeurs de

* Il y a dans cet endroit une faute de calcul qui influe sur le résultat de cette Proposition. On trouve dans l'original $\frac{G^2}{64K^2P^2} = \frac{36m^2b^2R^7}{P^2(100)^2(32)^2}$; c'est cette différence qui en occasionne dans toute la suite du calcul.

K & de P, avec $S=\frac{1}{4}K^2P$, on aura $\frac{S}{KP}=\frac{K^2P}{4KP}=\frac{1}{4}K=\frac{1}{8}R$: ce qui donnera par conséquent $L=\frac{1}{8}R+\frac{36R}{(25c)^2(8)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{8}R+\frac{36R}{(25c)^2(8)^2}\right)^2-\frac{1}{64}R^2}$

$=\frac{1}{8}R+\frac{36R}{(25c)^2(8)^2}+\frac{1}{8}R\sqrt{\left(1+\frac{36}{(25c)^2(8)}\right)^2-1}=\ldots\ldots$

$\frac{1}{8}R+\frac{36R}{(25c)^2(8)^2}+\frac{3R}{25c.8}\sqrt{1+\frac{9}{(25c)^2.(4)}}$; ou enfin, $L=\frac{1}{8}R\left(1+\frac{1}{16}\right)$, à peu de chose près: de sorte que la valeur de G introduite dans le calcul, rend la longueur du pendule simple isochrone avec le cylindre de $\frac{1}{16}R$ plus grande.

COROLLAIRE IV.

(941.) Si nous substituons la valeur de $L=\frac{1}{8}R$ dans l'équation (937.) $L=lt^2$, nous aurons $lt^2=\frac{1}{8}R$: ce qui donne le temps dans lequel le cylindre achevera une oscillation, c'est-à-dire, $t=\frac{R^{\frac{1}{2}}}{(8l)^{\frac{1}{2}}}$.

SCOLIE IV.

(942.) La longueur du pendule simple qui bat les secondes de temps moyen sur le bord de la mer en Espagne, est, comme nous l'avons déjà dit, *Article* 373, de 440 lignes du pied de *Paris*, ou de $\frac{440.16}{15}$ du pied Anglais: on aura donc $l=\frac{440.16}{15.144}=3\frac{7}{27}$; laquelle valeur étant substituée dans l'équation $t=\frac{R^{\frac{1}{2}}}{(8l)^{\frac{1}{2}}}$, on aura $t=\frac{1}{2}R^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{27}{11}}$, ou, à peu près, $t=\frac{63}{320}R^{\frac{1}{2}}$. Si nous faisons donc le cylindre de 32 pieds de diametre, on aura $R=16$, & le temps dans lequel il achevera une oscillation sera d'environ $\frac{63}{80}$ de seconde.

PROPOSITION LXXXV.

(943.) *Trouver la plus grande & la moindre vîtesse, avec laquelle tournent les corps flottants.*

D'après la supposition de $p\varpi=32KP\sin\Delta-\frac{GV}{dt}$, on trouve (932.) $Su=32K^2Pdt\sin\Delta-Gudt$. Différenciant cette équation, on a $Sdu=32K^2Pdt\sin\Delta-Gudt$, ou $\frac{du}{dt}=\frac{32K^2P\sin\Delta-Gu}{S}$. Or,

Digitized by Google

dans la plus grande viteſſe u, l'on a $du = 0$, nous aurons donc $32K^2P \sin\Delta - Gu = 0$; équation qui donne la plus grande viteſſe $u = \frac{32K^2P\sin\Delta}{G}$. Pareillement, la moindre viteſſe u a lieu lorſque du, ou $\frac{32K^2P\sin\Delta - Gu}{S}$, a ſa plus grande valeur. Donc la moindre viteſſe $u = 0$.

COROLLAIRE I.

(944.) On a trouvé, dans l'*Article* 210, que l'action, qui a lieu ſur les fibres du levier, relativement au mouvement, eſt proportionnelle à Sdu. Conſidérant donc le corps flottant, qui tourne, comme un levier, l'action qui s'exercera ſur ſes fibres, ſera comme Sdu, ou comme la quantité $32K^2P\,dt\sin\Delta - Gudt$ qui lui eſt égale: & la plus grande action qu'elles éprouveront dans toute l'oſcillation, laquelle a lieu dans l'inſtant où elle commence & dans l'inſtant où elle finit, ſera comme $32K^2Pdt\sin\Delta$.

COROLLAIRE II.

(945.) Donc la plus grande action qui s'exerce ſur les fibres d'un corps dans l'acte de la rotation, ne dépend nullement de G, ou de la réſiſtance du Fluide; mais elle provient ſeulement de la quantité $K^2Pdt\sin\Delta$, ou $32K^2P\sin\Delta$: c'eſt-à-dire, du produit de la ſtabilité $KP\sin\Delta$ par $32K$.

COROLLAIRE III.

(946.) Un levier uni au corps qui tourne, éprouvera une action proportionnelle à $S'du$, S' exprimant les moments d'inertie du levier ſeul; mais on a $du = \frac{32K^2Pd\sin\Delta - Gudt}{S}$: donc l'action qu'éprouvera le levier ſera proportionnelle à $\frac{S'dt(32K^2P\sin\Delta - Gu)}{S}$: & la plus grande de toute, ſera proportionnelle à $\frac{S'K^2P\sin\Delta}{S}$.

Digitized by Google

APPENDICE I.

Sur la théorie des Cometes, ou Cerf-volants, pour vérifier la Loi de la réſiſtance des Fluides.

LE moyen de vérifier une théorie qui ſeroit ſuſceptible de quelques difficultés, eſt de l'appliquer à différentes expériences. Or de toutes les expériences, relatives à la réſiſtance des Fluides, qui ſe préſentent journellement à la vue, il n'en eſt pas de plus commune que le vol des Cometes, ou Cerf-volants, dont les enfants font uſage. La force avec laquelle le vent agit ſur ces machines, eſt ou comme le quarré de ſa viteſſe, multiplié par le quarré du ſinus de ſon angle d'incidence, comme le croient généralement tous les Auteurs modernes, ou elle eſt comme la ſimple viteſſe multipliée par le même ſinus, ſelon que nous l'avons établi ci-deſſus. C'eſt en donnant une vraie théorie des Cerf-volants, qu'on peut prouver lequel des deux ſyſtêmes convient avec la pratique, & par conſéquent ſçavoir lequel eſt le véritable.

Albert Euler, fils de *Léonard Euler*, a donné cette théorie, dans les Mémoires de l'Académie Royale de *Berlin*, *Tome XII*, *page* 322; mais il l'a fondée ſur le premier ſyſtême, ou ſur le principe que les réſiſtances ſuivent la raiſon doublée de la viteſſe & du ſinus d'incidence. Il diſtingue trois cas dans ſon Mémoire. Il ſuppoſe dans le premier, que le Cerf-volant avec ſa ficelle eſt un corps roide, incapable d'altération; & dans le ſecond & le troiſieme cas, il ſuppoſe que la ficelle n'eſt attachée au Cerf-volant que par un ſeul point déterminé, autour duquel il peut tourner librement. Le premier cas n'eſt, comme on voit, nullement applicable à la pratique; & comme nous cherchons à nous procurer les lumieres de l'expérience, toute ſpéculation ſur ce cas ſeroit abſolument inutile. Dans le ſecond cas, l'Auteur a égard aux deux mouvements de rotation que doit avoir le Cerf-volant, l'un ſur l'extrêmité ſupérieure de la ficelle, & l'autre ſur l'extrêmité inférieure. Cette derniere rotation, dit-il, eſt le réſultat de trois forces: la premiere eſt la force du vent, réunie au centre de grandeur du Cerf-volant; la ſeconde eſt ſon poids réuni à ſon centre de gravité; & la troiſieme eſt le poids de la ficelle pareillement réuni à ſon centre particulier

Digitized by Google

de gravité. Les deux premieres forces produisent réellement le mouvement de rotation dont il s'agit : mais la troisieme ne peut contribuer à ce mouvement que dans le cas où la ficelle seroit absolument sans flexibilité, comme l'est un levier. Lorsqu'elle est d'une flexibilité parfaite, comme nous la supposerons dans la suite, sa pesanteur n'agit en rien pour produire une telle rotation, parce que la force unique qu'elle exerce, agit seulement suivant la direction de sa longueur, & n'agit en aucune maniere dans une direction oblique à cette longueur, qui cependant est l'unique circonstance qui peut contribuer à la rotation effective. Nous devons donc inférer de là que *Albert Euler* a considéré la ficelle comme un corps roide, en supposant cependant que le Cerf-volant puisse tourner librement sur ses deux extrêmités, ce qui rend ce cas autant inapplicable à la pratique que le premier. En outre, cet Auteur s'est assujetti, dans cette théorie, à attacher la ficelle seulement dans un point déterminé du Cerf-volant, ce qui, dans la pratique, ne produiroit jamais aucun bon effet. L'usage ordinaire est d'attacher au Cerf-volant deux, trois ou quatre ficelles qui se réunissent à une petite distance, pour n'en former ensuite qu'une seule. Par cette disposition le Cerf-volant se maintient dans sa position, sans pouvoir se mouvoir, ou tourner sur aucun de ses diametres; au lieu que si l'on néglige cette précaution, il se dérange facilement au moindre accident, & se précipite vers la terre. Cette circonstance n'a point échappé à *Euler*; mais, pour y apporter le remede nécessaire, ayant trouvé que le calcul étoit extrêmement compliqué, il a jugé à propos de le supprimer, & de se restreindre au cas unique d'une seule ficelle.

Le calcul est en effet bien embarrassant; mais c'est seulement dans la supposition que les forces du vent sont en raison composée doublée de ses vitesses, & des sinus de ses angles d'incidence; mais il n'en est pas ainsi dans la supposition que ces forces sont dans la raison composée des simples vitesses, & des simples sinus d'incidence, selon que notre théorie l'indique; le calcul devient même extrêmement facile. Nous ne pouvons donc nous dispenser d'avoir égard à la circonstance des différentes ficelles, en résolvant le problême dans toute sa généralité; & pour comparer les forces du vent, afin de voir si, en effet, elles ne correspondroient pas à la supposition de la raison doublée, nous passerons ensuite au cas particulier d'une seule ficelle, comme l'a fait *Euler*.

Cet Auteur, dans son troisieme cas, considere le Cerf-volant avec-

Digitized by Google

EXAME. V.

une queue ; mais il suppose que cette queue est un autre plan, ou Cerf-volant, qui tourne librement à l'extrêmité inférieure du premier ; supposition qui n'est pas d'une application moins difficile dans la pratique que les premieres. La queue est nécessaire dans le Cerf-volant, pour abaisser son centre de gravité, de maniere qu'il soit plus bas que le centre de grandeur, & prévenir par-là le mouvement gyratoire latéral qui pourroit avoir lieu ; mais, pour la pratique & pour la théorie, un corps roide quelconque, long & mince, comme un fil d'archal, ou même le prolongement du roseau, ou de la baguette, qui va de l'extrémité supérieure du Cerf-volant jusqu'à l'inférieure, en formant son diametre principal, convient beaucoup mieux qu'un plan. D'après cela, il est évident que nous pourrons nous dispenser d'avoir égard à cette queue ; il suffira, pour en supposer l'existence, d'établir le centre de gravité plus bas que celui de grandeur. Un contrepoids quelconque, placé à l'extremité inférieure du Cerf-volant, pourroit produire le même effet que la queue, & par conséquent y suppléer. Il faut cependant observer que, dans ce cas, si le contrepoids étoit d'une même pesanteur que la queue, il n'abaisseroit pas autant le centre de gravité que le feroit la queue ; ce qui importe beaucoup pour éviter la rotation latérale. Ainsi la queue, telle que les enfants l'attachent à leurs Cerf-volants, est beaucoup plus convenable que le contrepoids d'une même pesanteur ; parce que, sans augmenter le poids, elle prévient beaucoup plus efficacement tout mouvement latéral de rotation. Mais comme il faut avoir égard à l'angle qu'elle formeroit avec le diametre du Cerf-volant, nous ne pouvons la considérer, telle qu'elle est, sans nous jetter dans des calculs fort longs & fort compliqués, attendu que son centre de gravité se trouveroit hors du corps du Cerf-volant. Ainsi nous nous réduisons à considérer la queue comme un corps roide, qui soit le prolongement du diametre du Cerf-volant ; & cette supposition n'est, comme on le voit, nullement éloignée de pouvoir s'appliquer à la pratique.

Ceci supposé, soit AB le Cerf-volant, ou plutôt son diametre, en le considérant coupé par un plan vertical qui coïncide avec ce diametre, avec la ficelle GOV, & même avec la queue BX. Soient de plus AG, DG, les deux ficelles qui étant attachées au haut & au bas de ce diametre, & réunies en G à la ficelle unique GOV, assujettissent le Cerf-volant. Soit aussi C son centre de grandeur, & P celui de gravité. Soit tiré la ligne GE perpendiculaire au diametre BA, les verticales PK & EML, la ligne GK parallele à l'horison-

FIG. 78.

Digitized by Google

tale *VFL*, & la ligne *IGF* tangente à la ficelle dans le point *G*. Enfin soit $PC = b$; $CE = e$; $GE = g$; $P =$ le poids du Cerf-volant avec sa queue; $u =$ la viteſſe du vent; $\varphi =$ l'angle *GEL*, $\theta =$ l'angle *IGE*; $Ru \sin \varphi =$ la force du vent ſur le Cerf-volant, ſuivant une direction perpendiculaire à ſon plan, & conformément au ſyſtême expoſé précédemment ſur la meſure de ces forces, ou réſiſtances. On voit d'après cela que l'angle $IHE = \varphi + \theta$.

Trouver les ſinus & coſinus des angles φ, θ, & $\varphi + \theta$.

(1.) Le Cerf-volant pouvant tourner librement ſur le point *G*, les moments à l'égard de ce point doivent ſe faire équilibre. Les forces qui agiſſent ſont le poids *P* du Cerf-volant, qui eſt dirigé ſuivant la verticale *PK*, & la force du vent $Ru \sin \varphi$, qui eſt dirigée ſuivant la perpendiculaire au diametre *BA*. Les moments de ces forces ſont $P.GK = P(KM + MG) = P(b+e)\cos\varphi + Pg \sin \varphi$, & $Ru \sin \varphi . CE = Ru \sin \varphi$. On aura donc, pour l'équilibre de ces moments, $Ru \sin \varphi = P(b+e)\cos\varphi + Pg \sin \varphi$; ce qui donne $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = tang\ \varphi = \frac{P(b+e)}{Ru - Pg}$: & par conſéquent $\sin \varphi = \frac{P(b+e)}{((Ru-Pg)^2 + P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}$, & $\cos\varphi = \frac{Ru-Pg}{((Ru-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}$ *.

(2.) Pour trouver le ſinus de l'angle θ que forme la tangente *IGF* avec la ligne *GE*, conſidérons, que dans le triangle *GEH* les trois côtés *GE*, *EH*, *HG*, ou les ſinus de leurs angles oppoſés, peuvent être pris pour exprimer les forces qui agiſſent; ſçavoir: *GE* pour exprimer la force $Ru \sin \varphi$, à cauſe qu'elle eſt dirigée ſuivant cette même ligne *GE* perpendiculaire au diametre *BA*; *EH* pour exprimer la force *P*, qui agit ſuivant la direction de cette même verticale: & enfin *GH* dont la direction eſt la même que celle de la ficelle *GH*, pour exprimer la réſultante de ces deux forces. Cela poſé, on aura $\sin(\varphi+\theta) : \sin\theta :: Ru \sin\varphi : P$: donc, $Ru \sin\varphi . \sin\theta = P \sin(\varphi+\theta) = P \sin\varphi . \cos\theta + P \sin\theta . \cos\varphi$: ce qui donne $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = tang\ \varphi = \frac{P \sin\theta}{Ru \sin\theta - P\cos\theta}$, pour une ſeconde expreſſion de la valeur de tangente φ. Egalant donc

---

* Ces formules ſont faciles à trouver, il ne faut que ſe rappeller des expreſſions trigonométriques $\sec\varphi = (1 + tang^2\varphi)^{\frac{1}{2}}$; $\cos\varphi = \frac{1}{\sec\varphi} = \frac{1}{(1+tang^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}$; & $\sin\varphi = \frac{tang\varphi}{\sec\varphi} = \frac{tang\varphi}{(1+tang^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}$. En ſubſtituant dans ces expreſſions de $\cos\varphi$ & de $\sin\varphi$ la valeur de $tang\varphi$ qu'on vient de trouver; on aura les expreſſions mêmes de l'Auteur.

Digitized by Google

ces deux valeurs, on aura $\frac{P(b+c)}{Ruc-Pg} = \frac{P \sin\theta}{Ru \sin\theta - P \cos\theta}$: d'où l'on tire, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = tang\,\theta = \frac{P(b+c)}{Rub+Pg}$, & par conséquent $\sin\theta = \frac{P(b+c)}{((Rub+Pg)^2+P^2(b+c)^2)^{\frac{1}{2}}}$, & $\cos\theta = \frac{Rub+Pg}{((Rub+Pg)^2+P^2(b+c)^2)^{\frac{1}{2}}}$.

(3.) Substituant maintenant dans les équations $\sin(\varphi+\theta) = \sin\varphi.\cos\theta + \sin\theta.\cos\varphi$, & $\cos(\varphi+\theta) = \cos\varphi.\cos\theta - \sin\varphi.\sin\theta$, les valeurs trouvées de $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\sin\theta$, & $\cos\theta$, on aura . . . . . .

$$\sin(\varphi+\theta) = \frac{RuP(b+c)^2}{\left(((Ruc-Pg)^2+P^2(b+c)^2)((Rub+Pg)^2+P^2(b+c)^2)\right)^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots$$

$$\cos(\varphi+\theta) = \frac{\{Ruc-Pg)(Rub+Pg)-P^2(b+c)^2}{\left(((Ruc-Pg)^2+P^2(b+c)^2)((Rub+Pg)^2+P^2(b+c)^2)\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

(4.) Soit supposé $u=0$, on aura $\sin(\varphi+\theta)=0$, & $\cos(\varphi+\theta)=-1$; ce qui indique que la tangente FH tombera de l'autre côté & au-dessous de l'horisontale FL, & qu'elle coincidera avec la verticale HL: c'est-à-dire, que le Cerf-volant sera suspendu à la ficelle. On aura de même $\sin\varphi = \sin\theta = \frac{b+c}{(g^2+(b+c)^2)^{\frac{1}{2}}} = \sin IGE$; mais $\frac{b+c}{(g^2+(b+c)^2)^{\frac{1}{2}}} = \sin PGE$ * : donc le point I concourt avec le point P; c'est-à dire que le prolongement de la ficelle FG passe par le centre de gravité. Cette remarque est commune, il est vrai, mais elle justifie la supposition qu'on a faite.

FIG. 78 & 79

(5.) Soit $Ruc = Pg$, on aura $\cos\varphi = 0$, & $\sin\varphi = 1$; ce qui indique que, dans ce cas, le Cerf-volant AB sera vertical. On aura de même $\cos(\varphi+\theta) = \frac{-P}{(R^2u^2+P^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-c}{(c^2+g^2)^{\frac{1}{2}}}$ ** $= \sin EGI$; mais $\frac{-c}{(c^2+g^2)^{\frac{1}{2}}} = \sin EGC$: donc le point I concourt avec le point C; c'est-à-dire que le prolongement de la ficelle passe par le centre de grandeur C.

FIG 80.

(6.) Soit $u = \infty$, on aura $\sin\varphi = 0$, ce qui indique que le Cerf-volant se trouvera horisontal. On aura également $\sin(\varphi+\theta) = 0$; & par conséquent la tangente HF se trouvera verticale.

Trouver la force que le vent exerce sur le Cerf-volant.

(7.) Cette force est $= Ru \sin\varphi$: en substituant, dans cette expression, la valeur de $\sin\varphi = \frac{P(b+c)}{((Ruc-Pg)^2+P^2(b+c)^2)^{\frac{1}{2}}}$, on aura . . . . . .

$$Ru \sin\varphi = \frac{RuP(b+c)}{((Ruc-Pg)^2+P^2(b+c)^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

* Car $GI : 1 :: PE : \sin PGE$: or $GI = (g^2+(b+c)^2)^{\frac{1}{2}}$, & $PE = b+c$. Donc, &c.

** En substituant pour P sa valeur $\frac{Ruc}{g}$, & réduisant.

(8.) Soit

PLANC. V.

(8.) Soit $u = o$, l'on aura $Ru \sin \varphi = o$.

(9.) Soit $Rue = Pg$, l'on aura $Ru \sin \varphi = \frac{Pg}{e}$.

(10.) Soit $u = \infty$, l'on aura $Ru \sin \varphi = \frac{P(b+e)}{e}$.

(11.) Soit supposé en général $(Rue - Pg)^2 = (n^2 - 1)P^2(b+e)^2$, n exprimant un nombre quelconque, l'on aura $Ru \sin \varphi = \ldots \frac{P(b+e)(n^2-1)^{\frac{1}{2}}}{ne} + \frac{Pg}{ne}$.

(12.) Cette valeur manifeste que le Cerf-volant n'éprouve pas la plus grande action quand $u = \infty$; car quoique dans ce cas le premier terme $\frac{P(b+e)(n^2-1)^{\frac{1}{2}}}{ne}$ ait sa plus grande valeur, il est évident que le second $\frac{Pg}{ne}$ a alors sa plus petite. Pour trouver cette plus grande action $Ru \sin \varphi$, on différenciera sa valeur, & l'on aura $\frac{RP(b+e)\,du}{((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(Rue-Pg)(b+e)Rue\,du}{((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{3}{2}}}$, ce qui donne $u = \frac{P(b+e)^2+g^2)}{Rge}$. Substituant cette valeur de u dans celle de $Ru \sin \varphi$, on aura la plus grande action du vent $Ru \sin \varphi = \frac{\left(\frac{P}{ge}(b+e)^2+\frac{Pg}{e}\right)P(b+e)}{\left(\frac{P^2}{g^2}(b+e)^2+P^2(b+e)^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{P}{e}\left((b+e)^2+g^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Trouver la force avec laquelle la ficelle est tendue.

(13.) Nous avons déjà dit (2.) que, dans le triangle GEH, GE exprimant la force $Ru \sin \varphi$ du vent, & EH le poids P du Cerf-volant, GH exprimera la force résultante qui agit sur la ficelle, c'est-à-dire, la force par laquelle elle est tendue. Cette force est donc dans le point $G = \frac{P \sin \varphi}{\sin \theta} = \frac{P((Rub+Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}{((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}$.

(14.) Pour trouver la même force, ou tension, dans quelque autre point de la ficelle, on la regardera comme un polygone, d'un nombre infini de côtés infiniment petits. Soit AB, BC deux de ces côtés, & soit tiré la verticale BF, avec la ligne CF parallele à AB; CF exprimera la force, ou tension, suivant BA, BC celle qui agit suivant la ligne même BC, & BF la force résultante des deux premieres, laquelle doit faire équilibre au poids de la ficelle. La tension suivant BA sera donc à la tension suivant BC, comme le sinus de FBC est au sinus de CFB, ou de son égal ABF; c'est-à-dire, que les deux tensions suivant les côtés BA & BC, sont réciproquement comme

FIG. 81.

Digitized by Google

PLANC. V. les sinus de ABF & FBC. On démontrera la même chose de la tension suivant CB avec celle du côté suivant CD, & ainsi de suite pour toutes les différencielles: donc en général la tension de la ficelle en un point quelconque de sa longueur, est réciproquement comme le sinus de l'angle que la ficelle forme en ce point avec la verticale.

(15.) Soit $ABCDE$ la ficelle, & supposons-la divisée en parties infiniment petites AB, BC, CD, DE &c.; des points B, C, D, E, &c, soit élevé les verticales BF, CG, DH, &c., & soit tiré CF parallele à BA, DG parallele à CB, EH parallele à DG, &c. Enfin, en nommant α, β, γ, δ, &c. les angles FBA, GCB, HDC, &c., si, dans le triangle FBC, CF exprime la force, ou tension, qu'éprouve BA; CB exprimera celle qu'éprouve BC, & ces deux forces seront entr'elles comme $\sin\beta$ est à $\sin\alpha$; c'est-à-dire, que si nous appellons A la force que souffre AB, B celle que souffre BC, C celle que souffre CD, &c., on aura $A : B :: \sin\beta : \sin\alpha$: on aura pareillement $B : C :: \sin\gamma : \sin\beta$, & $C : D :: \sin\delta : \sin\gamma$; d'où on déduit les équations $A\sin\alpha = B\sin\beta = C\sin\gamma = D\sin\delta =$ &c.; & par là $A : D :: \sin\delta : \sin\alpha$: c'est-à-dire, que la force, ou tension, qu'éprouve la ficelle en AB, est à celle qu'elle éprouve en DE, réciproquement comme le sinus de l'angle α, est au sinus de l'angle δ.

(16.) On doit observer que dans ce qui vient d'être dit on n'a point eu égard à la force que peut produire le vent sur la ficelle, qu'on peut en effet négliger. Cependant si l'on vouloit y avoir égard, il seroit nécessaire de prendre, au lieu de la verticale FB, la direction résultante des deux forces, la gravité, & l'action du vent.

FIG. 82. (17.) Si l'on prend maintenant les abscisses sur une verticale AB, & les ordonnées sur une horisontale, en nommant x les abscisses, y les ordonnées, & dh les différencielles FA, ou AD de la ficelle; AE & AC seront les dx, & EF & CD les dy. Dans ces suppositions le sinus de l'angle que forme la ficelle avec la verticale sera

FIG. 78. généralement $= \frac{dy}{dh}$: mais comme le sinus de l'angle que forme la ficelle avec la verticale, à son extrémité supérieure G est $= \sin(\varphi+\theta)$, & que la tension dans le même point est $= \frac{P\sin\varphi}{\sin\theta}$, nous aurons $\frac{1}{\sin(\varphi+\theta)} : \frac{dh}{dy} :: \frac{P\sin\varphi}{\sin\theta} : \frac{P\sin\varphi.\sin(\varphi+\theta)dh}{\sin\theta\,dy}$; expression de la force, ou tension, qu'éprouve la ficelle dans un point quelconque de sa longueur; ou en substituant, dans cette expression, à la place de $P\sin(\varphi+\theta)$ sa valeur $Ru\sin\varphi.\sin\theta$, (2.) cette même tension sera $= \frac{dx}{dy} Ru\sin\varphi^2$.

Digitized by Google

PLANC. V.

(18) Pour trouver maintenant cette tenſion en quantités connues & dégagées des différencielles, on égalera les forces oppoſées qui agiſſent ſur le point A, en les réduiſant à la direction verticale. La force qui agit ſuivant AF étant $= \frac{P \sin \varphi . \sin (\varphi+\theta) dh}{\sin \theta \, dy}$, celle qui en réſulte ſuivant AE ſera $= \frac{P \sin \varphi . \sin (\varphi+\theta) dx}{\sin \theta \, dy}$. Par la même raiſon, la force ſuivant CA, réſultante de la tenſion de la ficelle ſuivant DA, ſera $= \frac{P \sin \varphi . \sin (\varphi+\theta)(dx-ddx)}{\sin \theta \, dy}$, en ſuppoſant dy conſtante. En outre, h étant la longueur de la ficelle, que nous ſuppoſons d'une denſité & d'une groſſeur uniforme dans toute ſon étendue, nous pouvons repréſenter par kh le poids total de la ficelle, & par conſéquent le poids total d'une de ſes différencielles ſera exprimé par kdh. Or ce poids joint à la force ſuivant CA doit faire équilibre à la force ſuivant AE: donc $\frac{P \sin \varphi . \sin (\varphi+\theta) dx}{\sin \theta \, dy} = \frac{P \sin \varphi . \sin (\varphi+\theta)(dx-ddx)}{\sin \theta \, dy} + kdh$, d'où il réſulte $\frac{dydh}{ddx} = \frac{P \sin \varphi . \sin (\varphi+\theta)}{k \sin \theta}$; quantité conſtante. Faiſant, donc, $\frac{P \sin \varphi . \sin (\varphi+\theta)}{k \sin \theta} = A$, on aura $\frac{dydh}{ddx} = A$, ou $dydh = Addx$: en intégrant, on trouvera $(B+h)dy = Adx = A(dh^2 - dy^2)^{\frac{1}{2}}$; & en quarrant $(B+h)^2 dy^2 = A^2(dh^2 - dy^2)$, ce qui donne $\frac{dh}{dy} = \frac{(B+h)^2 + A^2)^{\frac{1}{2}}}{A}$. En introduiſant cette valeur dans l'expreſſion trouvée de la tenſion de la ficelle $\frac{P \sin \varphi . \sin (\varphi+\theta) dh}{\sin \theta \, dy}$, elle deviendra $\frac{P \sin \varphi . \sin (\varphi+\theta)((B+h)^2 + A^2)^{\frac{1}{2}}}{A \sin \theta} = k\left((B+h)^2 + A^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

(19.) Pour trouver maintenant la valeur de la conſtante B qui complette l'intégrale, conſidérons qu'à l'extrémité ſupérieure G de la ficelle on a $\frac{dh}{dy} = \frac{1}{\sin (\varphi+\theta)}$; mais de l'équation $\frac{P \sin \varphi . \sin (\varphi+\theta)}{k \sin \theta} = A$, on tire $\frac{1}{\sin (\varphi+\theta)} = \frac{P \sin \varphi}{Ak \sin \theta}$: donc on aura pour l'extrémité ſupérieure de la ficelle $\frac{P \sin \varphi}{Ak \sin \theta} = \frac{((B+h)^2 + A^2)^{\frac{1}{2}}}{A}$, h marquant la longueur totale de la ficelle. On aura donc auſſi $\frac{P^2 \sin \varphi^2}{k^2 \sin \theta^2} = (B+h)^2 + A^2 = (B+h)^2 + \frac{P^2 \sin \varphi^2 . \sin (\varphi+\theta)^2}{k^2 \sin \theta^2}$, d'où il réſulte $(B+h)^2 = \frac{P^2 \sin \varphi^2}{k^2 \sin \theta^2}\left(1 - \sin (\varphi+\theta)^2\right) = \frac{P^2 \sin \varphi^2 . \cos (\varphi+\theta)^2}{k^2 \sin \theta^2}$: donc $B = \frac{P \sin \varphi . \cos (\varphi+\theta)}{k \sin \theta} - h$.

(20.) Si l'on ſubſtitue cette valeur de B dans l'expreſſion de la tenſion de la ficelle qu'on a trouvée, *Art.* 18, on aura cette tenſion dans

Digitized by Google

un point quelconque éloigné de l'origine de la quantité, $H = \frac{1}{fin\,\theta}\left((P\,fin\,\varphi.cof(\varphi+\theta)-k\,fin\,\theta(h-H))^2+P^2\,fin\,\varphi^2.fin(\varphi+\theta)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

(21.) A l'origine de la ficelle, ou dans le point V le plus bas, on a $H=0$: donc la tenſion dans le point V eſt $= \ldots\ldots\ldots$ $\frac{1}{fin\,\theta}\left((P\,fin\,\varphi.cof(\varphi+\theta)-k\,fin\,\theta)^2+P^2\,fin\,\varphi^2.fin(\varphi+\theta)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \ldots\ldots$ $\left(\left(\frac{P(Rue-Pg)\,(Rub+Pg)-P^3(b+e)^2}{(Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2}-k\right)^2+\frac{R^2u^2P^4(b+e)^4}{((Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

(22.) Soit ſuppoſé $u=0$, la force, ou tenſion, de la ficelle dans le point V deviendra $= \frac{-P\left(P^2g^2+P^2(b+)^2\right)}{P^2g^2+P^2(b+e)^2}-kh = -(P+kh)$; poids du Cerf-volant & de la ficelle.

(23.) Soit $Rue = Pg$, la tenſion deviendra $= \ldots\ldots\ldots$ $\left((-P-kh)^2+\frac{P^2g^2}{e^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{P^2(g^2+e^2)}{e^2}+kh\,(2P+kh)\right)^{\frac{1}{2}}$.

(24.) Soit $u=\infty$, la tenſion ſera $= \frac{Pb}{e}-kh$.

(25.) On déduit clairement de l'analyſe de tous ces cas, que la tenſion de la ficelle varie, à meſure que la viteſſe u du vent varie ; & que cette tenſion n'arrive pas à être la plus grande lorſque cette viteſſe $u=\infty$. Car, quoique l'inſpection ſeule de la formule faſſe voir que le premier terme augmente à meſure que la viteſſe u augmente, elle manifeſte auſſi que le ſecond diminue en même temps. On apperçoit cette vérité encore plus clairement, en réduiſant en ſérie la quantité $\frac{P(Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^3(b+e)^2}{(Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2}$: car la tenſion devient alors $= \ldots$ $\left(\left(\frac{P(Rub+Pg)}{Rue-Pg}-\frac{P^3(b+)^3Ru}{(Rue-Pg)^3}+\frac{P^5(b+e)^5Ru}{(Rue-Pg)^5}-\&c.-kh\right)^2+\frac{R^2u^2P^4(b+e)^4}{(Rue-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Cette expreſſion fait voir qu'auſſi-tôt que Pg eſt négligeable par rapport à Rue, la tenſion demeure ſenſiblement conſtante, & $= \frac{Pb}{e}-kh$, quelque augmentation que reçoive la viteſſe u.

(26.) L'expreſſion $\frac{Pb}{e}$ manifeſte auſſi, que plus b ſera grand par rapport à e, plus la tenſion augmentera ; c'eſt-à-dire que plus la queue du Cerf-volant ſera longue & peſante, plus la tenſion ou la force qui agit ſur la ficelle augmentera.

Trouver la hauteur verticale que prendra le Cerf-volant.

(27.) De l'équation $(B+H)\,dy=Adx$, on déduit auſſi $\ldots\ldots$ $(B+H)^2\,(dH^2-dx^2)=A^2dx^2$, ce qui donne $dx=\frac{(B+H)dH}{((B+H)^2+A^2)^{\frac{1}{2}}}$: &

Digitized by Google

en intégrant $x = ((B+H)^2+A^2)^{\frac{1}{2}}$, ou, $x^2=(B+H)^2+A^2$; équation d'une hyperpole équilatere, dont le demi-axe est $=A$, les abscisses comptés du centre $=x$, & les ordonnées $=B+H$ *. Si donc, avec le demi-axe $A=\frac{P \sin \varphi . \sin(\varphi+\zeta)}{k \sin \theta} = CD$, on décrit l'hyperbole équilatere DEF, les ordonnées donneront les longueurs de la ficelle, & les abscisses, les hauteurs verticales du Cerf-volant. PLANC. V. FIG. 83.

(28.) Soit supposé F le point correspondant au Cerf-volant, on aura, pour ce point, $H=h$, & (19.), $(B+h)^2+A^2=\frac{P^2 \sin \varphi^2}{k^2 \sin \theta^2} = x^2$: donc $x=FL=\frac{P \sin \varphi}{k \sin \theta}$.

(29.) EM est l'abscisse qui correspond au cas où l'on auroit $EH=B$, & $H=0$: faisant donc dans l'équation $x^2=(B+H)^2+A^2$, $H=0$, & substituant à la place de B sa valeur $\frac{P \sin \varphi . \cos(\varphi+\zeta)}{k \sin \theta} - h$, (19.), on aura $x^2=(EM)^2=\left(\frac{P \sin \varphi . \cos(\varphi+\zeta)}{k \sin \theta} - h\right)^2+\frac{P^2 \sin \varphi^2 . \sin(\varphi+\zeta)^2}{k^2 \sin \theta^2}$, d'où l'on tire $EM=\frac{((P \sin \varphi . \cos(\varphi+\zeta) - kh \sin \theta)^2+P^2 \sin \varphi^2 . \sin(\varphi+\zeta)^2)^{\frac{1}{2}}}{k \sin \theta}$.

(30.) On aura donc la hauteur verticale EK du Cerf-volant, (*Fig.* 83), ou HL (*Fig.* 78.) $= \ldots\ldots\ldots\ldots$ FIG. 83 & 78.
$\frac{P \sin \varphi}{k \sin \theta} - \frac{1}{k \sin \theta}((P \sin \varphi . \cos(\varphi+\zeta) - hk \sin \theta)^2+P^2 \sin \varphi^2 . \sin(\varphi+\zeta)^2)^{\frac{1}{2}}$, laquelle quantité est la différence des tensions de la ficelle à ses deux extrêmités, divisée par k, (13 & 20.).

(31.) Si cette différence étoit donc zéro, la différence de la hauteur verticale des deux extrêmités de la ficelle, seroit aussi zéro; c'est-à-dire que si les deux tensions des extrêmités étoient égales, ces extrêmités se trouveroient dans une même ligne horisontale. Ce principe est bien connu dans la Méchanique.

(32.) Nous avons trouvé (13.) la tension à l'extrêmité supérieure de la ficelle du Cerf-volant $= \frac{P((Rub+Pg)^2+P^2(b+c)^2)^{\frac{1}{2}}}{((Ruc-Pg)^2+P^2(b+c)^2)^{\frac{1}{2}}}$, & (21.) celle à l'extrêmité inférieure $V = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\left(\left(\frac{P(Ruc-Pg)(Rub+Pg)-P^2(b+c)^2}{(Ruc-Pg)^2+P^2(b+c)^2} - kh\right)^2+\frac{R^2u^2P^2(b+c)^2}{((Ruc-Pg)^2-P^2(b+c)^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, donc la hauteur verticale à laquelle parviendra le Cerf volant au-dessus de

* *Voyez* la Troisieme Partie du *Cours de Mathématiques* de M. *Bezout*, Art. 324 & 336.

PLANC. V. l'horiſon ſera $= \frac{P((Rub+Pg)^2+P^2(b+c)^2)^{\frac{1}{2}}}{k((Ruc-Pg)^2+P^2(b+c)^2)^{\frac{1}{2}}} - \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\left(\left(\frac{P((Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^2(b+c)^2)}{k((Rue-Pg)^2+P^2(b+c)^2)} - h\right)^2 + \frac{R^2u^2P^2(b+c)^2}{k^2((Rue-Pg)^2+P^2(b+c)^2)}\right)^{\frac{1}{2}}$.

(33.) Soit ſuppoſé $u=o$, la hauteur verticale du Cerf-volant ſera $= \frac{P}{k} - \frac{P}{k} - h = -h$, longueur négative de la ficelle; ce qui eſt bien connu.

(34.) Soit $u=\infty$, la hauteur verticale ſera $= \frac{Pb}{ke} - \frac{Pb}{ke} + h = +h$ longueur de la ficelle.

(35.) Pour trouver maintenant le cas dans lequel la hauteur verticale ſera zéro, ou, ce qui revient au même, dans lequel le Cerf-volant ſe maintiendra dans la même horiſontale que le point V, on égalera l'expreſſion de cette hauteur à zéro. En prenant celle de l'*Art.* 30, on aura . . . . . .

$\frac{P \sin\varphi}{k \sin\theta} - \frac{1}{k \sin\theta}((P\sin\varphi.\cos(\varphi+\theta) - kh\sin\theta)^2 + P^2\sin\varphi^2.\sin(\varphi+\theta)^2)^{\frac{1}{2}} = o$;

ou en multipliant par $k \sin\theta$, & en quarrant $P^2 \sin\varphi^2 = P^2 \sin\varphi^2 - 2Pkh \sin\varphi.\sin\theta.\cos(\varphi+\theta) + k^2h^2 \sin\theta^2$; expreſſion qui ſe réduit à $\frac{2P \sin\varphi.\cos(\varphi+\theta)}{k \sin\theta} - h = o$. Mais (19.) $B = \frac{P \sin\varphi.\cos(\varphi+\theta)}{k \sin\theta} - h$, ou $B+h = \frac{P \sin\varphi.\cos(\varphi+\theta)}{k \sin\theta}$: donc pour que la hauteur verticale ſoit zéro, on doit avoir $2B+h=o$, ou $B=-\frac{1}{2}h$: c'eſt-à-dire, que les deux extrêmités de la ficelle doivent être également diſtantes, de part & d'autre de l'axe de l'hyperbole, conſéquence qui eſt bien conforme aux principes connus.

(36.) En ſubſtituant les valeurs des ſinus & coſinus, dans . . . $\frac{2P \sin\varphi.\cos(\varphi+\theta)}{k \sin\varphi} - h$, il en réſulte $\frac{2P((Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^2(b+c)^2)}{(Rue-Pg)^2+P^2(b+c)^2} = kh$;

FIG. 78. équation qui doit avoir lieu pour que le Cerf-volant demeure dans la ligne horiſontale du point V.

(37.) Si l'on ſuppoſe maintenant la viteſſe du vent conſtante, en laiſſant variable la longueur h de la ficelle, la hauteur verticale du Cerf-volant ſera auſſi variable. Mais comme le ſecond terme de l'expreſſion de cette hauteur eſt négatif, plus ce terme ſera petit, plus la hauteur verticale ſera grande: or en ne ſuppoſant variable que la longueur h, ce terme aura la moindre valeur qu'il eſt poſſible lorſque $\frac{P((Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^2(b+c)^2)}{k((Rue-Pg)^2+P^2(b+c)^2)} - h = o$; ou ce qui eſt la même choſe,

Digitized by Google

lorsqu'on a $B=0$ (19.): donc la plus grande hauteur du Cerf-volant au-dessus de l'horison, a lieu lorsque $h=\ldots\ldots\ldots$, $\frac{P((Ruc-Pg)(Rab+Pg)-P^2(b+e)^2)}{k((Ruc-Pg)^2+P^2(b+e)^2)}$, & cette même plus grande hauteur sera $=\frac{P((Rab+Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}{k((Ruc-Pg)^2+P^2(b+e)^2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{RuP^2(b+e)^2}{k((Ruc-Pg)^2+P^2(b+e)^2)}$.

(38.) Comme la valeur de h dans ce dernier cas, n'est que la moitié de celle qu'on a trouvée dans le précédent, il s'ensuit que la longueur de la ficelle qui fait que le Cerf volant s'éleve à la plus grande hauteur, n'est que la moitié de celle qui l'oblige à se maintenir dans la même horisontale que le point V.

(39.) Comme la hauteur verticale du Cerf-volant dépend de la différence des tensions aux deux extrêmités de la ficelle, il s'ensuit qu'il s'élevera à sa plus grande hauteur, lorsque la tension à l'extrêmité inférieure V de la ficelle sera la moindre possible. Pour sçavoir donc quand le Cerf-volant acquerra sa plus grande hauteur, il suffit d'avoir attention que la ficelle fasse en ce point la moindre force possible.

(40.) Le sinus de l'angle que forme la ficelle avec la verticale dans un point quelconque, a été trouvé, *Art.* 17 & 18, $\ldots\ldots=\frac{dh}{dy}=\frac{(B+H)^2+A^2}{A}$: mais pour l'extrêmité inférieure V, on a $H=0$; & l'on a pareillement $B=0$ pour le cas où le Cerf-volant acquerra sa plus grande hauteur : donc le sinus de l'angle que formera la ficelle avec la verticale, à son extrêmité inférieure V, est $=\frac{A}{A}=1$: donc cet angle sera droit. Ainsi, pour sçavoir quand le Cerf-volant acquerra sa plus grande hauteur, il suffit d'observer quand la ficelle se trouve horisontale à son extrêmité inférieure V.

Trouver la valeur de l'horisontale VL.

(41.) Des deux équations $(B+H)\,dy=Adx$, & $x^2=(B+H)^2+A^2$, on tire $dy=\frac{Adx}{(x^2-A^2)^{\frac{1}{2}}}$ *; mais $\int\frac{A^2dx}{2(x^2-A^2)^{\frac{1}{2}}}$ est l'expression d'un sec-

* C'est l'équation de la *Chaînette*, telle que l'a trouvée *Jean Bernoulli*, Journal des Sçavants, année 1692. Plusieurs autres, après lui, ont aussi trouvé l'équation de cette courbe. *Voyez* le *Tome III de ses Œuvres, page* 491. *Voyez* aussi la Quatrieme Partie du *Cours de Mathématiques* de M. *Bezout*, *Article* 561 & *suiv.*

Digitized by Google

PLANC. V. teur de l'hyperbole * : donc on aura la valeur de y en divisant le secteur de l'hyperbole par $\frac{1}{2}A$.

FIG. 53. (42.) Pour trouver la valeur d'un secteur hyperbolique FDC, EDC, eDC, &c., nommons z les abscisses de l'asymptote CQ, & faisons les ordonnées perpendiculaires $FQ = v$. L'équation à cette asymptote sera $vz = \frac{1}{2}A^2$ **, & la différencielle de l'aire $CFDP$ sera $vdz = \frac{A^2 dz}{2z}$, dont l'intégrale est $\frac{1}{2}A^2 \log z$; mais, pour que cette intégrale désigne seulement l'aire $QFDP$, il faut qu'elle devienne égale à zéro, lorsque $z = CP = A\sqrt{\frac{1}{2}}$: donc l'aire $QFDP = \frac{1}{2}A^2 . \log \frac{z}{A\sqrt{\frac{1}{2}}}$. Or cette aire est égale au secteur CFD, parce que $QFDC = QFDP + PDC = QFC + FDC$, & $PDC = QFC$, donc $QFDP = FDC$: donc le secteur $FDC = \frac{1}{2}A^2 . \log \frac{z}{A\sqrt{\frac{1}{2}}}$: donc enfin $y = A . \log \frac{z}{A\sqrt{\frac{1}{2}}}$.

(43.) La valeur de z se trouve en considérant que $CF^2 = v^2 + z^2 = 2x^2 - A^2$, équation d'où l'on tire $z^2 = x^2 - \frac{1}{2}A^2 \pm \sqrt{(x^2 - \frac{1}{2}A^2)^2 - \frac{1}{4}A^4}$, & par conséquent on aura $y = A . \log \frac{(B+H)^2 + \frac{1}{2}A^2 \pm \sqrt{(B+H)^4 + \frac{1}{2}A^2 . B - \frac{1}{4}A^4}}{A\sqrt{\frac{1}{2}}}$ ...

Donc on aura, pour l'extrêmité de la ficelle où est attaché le Cerf-

PLANC. A. FIG. 5. * Pour le démontrer, soit PCA un secteur d'hyperbole équilatere, dont on veut avoir l'expression, soit C le centre de la courbe; $CA = A$ son demi-axe; $CM = x$ une abscisse; & $PM = y$ l'ordonnée correspondante. Menons la ligne Cp infiniment prochede CR, & le petit triangle différenciel CpP, sera l'élément du secteur PCA. Pour trouver l'expression de cet élément, décrivons du point C, comme centre, un petit arc Po, qu'on pourra regarder comme une petite ligne droite perpendiculaire sur Cp, faisons $CP = t$; $Po = dt$, nous aurons $po = dt$, $Cp = t + dt$, & par conséquent le triangle $CpP = \frac{1}{2}Cp . Po$ sera $= \frac{1}{2}(t+dt)dt = \frac{1}{2}tdt + \frac{1}{2}dtdt = \frac{1}{2}tdt$, à cause que $\frac{1}{2}dtdt$ est un infiniment petit du second ordre: donc le secteur PCA (pour expression $\int \frac{1}{2}tdt$.

Pour trouver la valeur de cette quantité en x, dx & constantes, soit mené l'ordonnée pm, & la perpendiculaire Pr sur cette ordonnée, on aura $pr = dy$, $Pr = dx$, & $Pp = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$: donc Po ou $dt = \sqrt{(Pp^2 - po^2)} = \sqrt{(dx^2 + dy^2 - dt^2)}$. Maintenant l'équation de la courbe donne $yy = xx - A^2$; en substituant cette valeur de yy dans celle de $t = \sqrt{(xx + yy)}$, on aura $t = \sqrt{(2xx - A^2)}$. De plus, en différenciant les valeurs de y & de t, on en déduira $dy = \frac{xdx}{\sqrt{xx - A^2}}$; & $dt = \frac{4xxdx^2}{2xx - A^2}$; & par conséquent $dt = \sqrt{\left(dx^2 + \frac{xxdx^2}{xx - A^2} - \frac{4xxdx^2}{2xx - A^2}\right)} = \ldots$. $\frac{A^2 dx}{\sqrt{(xx - A^2)}\sqrt{(2xx - A^2)}}$. Donc enfin $\int \frac{1}{2}tdt = \int \frac{1}{2}\sqrt{(2xx - A^2)} \frac{A^2 dx}{\sqrt{(xx - A^2)}\sqrt{(2xx - A^2)}}$ $\int \frac{A^2 dx}{2\sqrt{(xx - A^2)}}$.

** Voyez la Troisieme Partie du *Cours de Mathématiques* de M. *Bezout*, *Article* 347. En faisant attention qu'il s'agit ici de l'hyperbole équilatere.

*** Car $x - \frac{1}{2}A^2 = xx - A^2 + \frac{1}{4}A^2 = yy + \frac{1}{4}A^2 = (B+H)^2 + \frac{1}{4}A^2$. Voyez d'ailleurs la note *.

volant

Digitized by Google

volant, & à laquelle $H = h$. . . . . .

$y = A.log \frac{(B+h)^2+\frac{1}{4}A^2 \pm \sqrt{((B+h)^2+\frac{1}{4}A^2)^2-\frac{1}{4}A^4}}{A\sqrt{\frac{1}{8}}}$, & à l'autre extrémité, ou $H=0$, $y = A.log \frac{(B^2+\frac{1}{4}A^2 \pm \sqrt{((B^2+\frac{1}{4}A^2)^2-\frac{1}{4}A^4}}{A\sqrt{\frac{1}{8}}}$. Soustrayant cette deuxieme quantité de la premiere, on aura l'horisontale $VL = \frac{1}{8}A.log \frac{(B+h)^2+\frac{1}{4}A^2 \pm \sqrt{((B+h)^2+\frac{1}{4}A^2)^2-\frac{1}{4}A^4}}{B^2+\frac{1}{4}A^2 \pm \sqrt{(B^2+\frac{1}{4}A^2)^2-\frac{1}{4}A^4}}$; ou, en regardant ce logarithme comme un logarithme des Tables ordinaires, & le réduisant en logarithme hyperbolique, afin de conserver la même valeur à l'expression, $VL =$ . . . . . $\frac{1}{8}A\ (2,302585\,1)\ log \frac{(B+h)^2+\frac{1}{4}A^2 \pm \sqrt{((B+h)^2+\frac{1}{4}A^2)^2-\frac{1}{4}A^4}}{B^2+\frac{1}{4}A^2 \pm \sqrt{(B^2+\frac{1}{4}A^2)^2-\frac{1}{4}A^4}}$ *. On substituera ensuite dans cette expression la valeur de $B =$ . . . . . $\frac{P((Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^2(b+c)^2)}{k((Rue-Pg)^2+P^2(b+c)^2)} - h$, & de $A = \frac{RuP^2(b+c)^2}{k((Rue-Pg)^2+P^2(b+c)^2)}$; en prenant le signe positif, tant au numérateur qu'au dénominateur, si B est positif : on le prendra positif au numérateur, & négatif au dénominateur, si B est négatif & $h > B$: enfin on prendra le signe négatif, tant au numérateur qu'au dénominateur, si B est négatif, & $h < B$.

(44.) Si l'on suppose $u=0$, alors $A=0$, & par conséquent $VL=0$.

(45.) Si $u=\infty$, on aura $A=0$, & par conséquent $VL=0$, comme auparavant.

(46.) Dans le cas où les deux extrémités de la ficelle se trouvent dans la même horisontale, on a (35.) $B = -\frac{1}{2}h$, on aura donc, dans ce cas, $VL = \frac{1}{8}A(2,302585\,1)\ log \frac{\frac{1}{4}h^2+\frac{1}{4}A^2+\sqrt{(\frac{1}{4}h^2+\frac{1}{4}A^2)^2-\frac{1}{4}A^4}}{\frac{1}{4}h^2+\frac{1}{4}A^2-\sqrt{(\frac{1}{4}h^2+\frac{1}{4}A^2)^2-\frac{1}{4}A^4}}$; expression qui se réduit à $VL = A\ (2,302585\,1)\ log \frac{1+cof(\varphi+\vartheta)}{1-cof(\varphi+\vartheta)}$ **, à cause de $B = \frac{P\ fin\ \varphi.cof(\varphi+\vartheta)}{k\ fin\ \vartheta} - h = -\frac{1}{2}h$, (19.), d'où l'on tire (11.) $A = \frac{P\ fin\ \varphi.fin(\varphi+\vartheta)}{k\ fin\ \vartheta} = \frac{h\ fin(\varphi+\vartheta)}{2\ cof(\varphi+\vartheta)}$.

* Voyez la Quatrieme Partie du *Cours de Mathématiques* de M. *Bezout*, *Art.* 113.

** Car de la valeur de B, on tire $P = \frac{kh\ fin\ \vartheta}{2\ fin\ \varphi.cof(\varphi+\vartheta)}$. Et cette valeur étant substituée dans celle de A, donne l'expression que l'Auteur indique.

Digitized by Google

Réduire les formules à un cas facile pour la pratique.

(47.) Nous pouvons supposer pour cela $e=b$, & $g=2e$: car cette détermination de valeurs dépend seulement de la longueur des ficelles AG, GD, & de la position du point D, deux choses qui sont absolument arbitraires. La distance PC étant donc transportée de C en E, on fera $AG=(4b^2+(CA-b)^2)^{\frac{1}{2}}$, & prenant ensuite le point D à volonté, l'on aura $e=b$, & $g=2e$.

(48.) Suivant la théorie des Voiles, qu'on verra développée dans le *Tome II, Art.* 261 de cet Ouvrage, la force du Cerf-volant est $=\frac{1}{10}mua^2 \sin\varphi$; ou en prenant les deux tiers de cette quantité, à cause de ce qu'on a dit (644.), elle sera $=\frac{1}{15}mua^2 \sin\varphi$: donc $R=\frac{1}{15}ma^2$, a^2 désignant l'aire du Cerf-volant, que nous supposerons de 9 pieds, & m le poids d'un pied cube d'eau de mer, que nous verrons dans le *Tome II, Art.* 109, être de 64 liv. $\frac{1}{4}$ *. On aura donc $R=\frac{64\frac{1}{4}\cdot 9}{30}$, ou $=19$ à peu près.

(49.) Supposons, en outre, que le poids du Cerf-volant avec sa queue soit d'une demi-livre, ou que $P=\frac{1}{2}$, & que 2000 pieds de ficelle pesent une livre, on aura $2000\,k=1$, ou $k=\frac{1}{2000}$.

Toutes ces valeurs étant substituées dans les formules, les réduisent à un cas très-facile pour la pratique.

(50.) Les valeurs des sinus & cosinus des angles φ, θ, & $\varphi+\theta$, deviennent, d'après ces substitutions, telles qu'il suit : . . . . . .

$$\sin\varphi=\frac{1}{((19u-1)^2+1)^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots\ldots \quad \cos\varphi=\frac{19u-1}{((19u-1)^2+1)^{\frac{1}{2}}}.$$

$$\sin\theta=\frac{1}{((19u+1)^2+1)^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots\ldots \quad \cos\theta=\frac{19u+1}{((19u+1)^2+1)^{\frac{1}{2}}}.$$

$$\sin(\varphi+\theta)=\frac{19u}{(((19u-1)^2+1)((19u+1)^2+1))^{\frac{1}{2}}}$$

$$\cos(\varphi+\theta)=\frac{(19u-1)(19u+1)-1}{(((19u-1)^2+1)((19u+1)^2+1))^{\frac{1}{2}}}$$

(51.) Ces valeurs font voir clairement combien il faut peu de vitesse au vent, pour que la tangente HF s'éleve ae-dessus de l'horison. Cette tangente doit demeurer horisontale, lorsque $\cos(\varphi+\theta)=0$: donc, pour que ce cas arrive, on doit avoir $(19u-1)(19u+1)=1$. ou $u=\frac{1}{19}\sqrt{2}$; de sorte qu'il faut que le vent ne parcoure pas

* Il s'agit ici du pied cube Anglais, qui pese 1030 onces, *Averdupois*, ou 64 liv. $\frac{1}{4}$. *Voyez* l'endroit cité.

Digitized by Google

même 11 lignes par seconde, pour que la tangente HF demeure horisontale.

(52.) Les mêmes valeurs manifestent également, que, pour peu que la vitesse u du vent soit sensible, déjà le Cerf-volant se met presque horisontal: il suffit, pour cela, que $\sin\varphi = \frac{1}{((19u-1)^2+1)^{\frac{1}{2}}}$ soit négligeable. Supposons donc que $\frac{1}{((19u-1)^2+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{10}$, sinus d'un angle moindre qu'un degré, on aura à très-peu près $\frac{1}{19u} = \frac{1}{10}$ ce qui donne donne $u = 2$; c'est à-dire que le vent ayant seulement 2 pieds de vitesse par seconde, cela suffit pour faire prendre au Cerf-volant une situation horisontale, à moins d'un degré près.

(53.) Nous avons trouvé la tension de la ficelle à son extrémité V (21.) $= \left(\left(\frac{P(Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^3(b+c)^2}{(Rue-Pg)^2+P^2(b+c)^2}\frac{1}{2000} - kh\right)^2 + \frac{R^2u^2P^4(b+c)^4}{((Rue-Pg)^2+P^2(b+c)^2)^3}\right)^{\frac{1}{2}}$ donc, dans le cas présent, cette tension sera $= \ldots\ldots\ldots$

$$\left(\left(\frac{\frac{1}{2}(19u-1)(19u+1)-\frac{1}{2}}{(19u-1)^2+1} - \frac{h}{2000}\right) + \frac{19^2u^2}{((19u-1)^2+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(54.) Cette expression se réduit à $\frac{1}{2} - \frac{h}{2000}$, lorsque u a une valeur un peu considérable: d'où l'on voit que la tension de la ficelle se maintient presque sensiblement constante, quelque augmentation qui survienne dans la vitesse du vent.

(55.) Nous avons trouvé (32.) la hauteur à laquelle s'éleve le Cerf-volant $= \frac{P((Rub+Pg)^2+P^2(b+c)^2)^{\frac{1}{2}}}{k((Rue-Pg)^2+P^2(b+c)^2)^{\frac{1}{2}}} - \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\left(\left(\frac{P(Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^3(b+c)^2}{k((Rue-Pg)^2+P^2(b+c)^2)} - h\right) + \frac{R^2u^2P^4(b+c)^4}{k^2((Rue-Pg)^2+P^2(b+c)^2)^3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc dans le cas présent, cette hauteur sera $= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(19u+1)^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2000}((19u-1)^2+1)^{\frac{1}{2}}} = \ldots\ldots$

$$\left(\left(\frac{\frac{1}{2}(19u-1)(19u+1)-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2000}((19u-1)^2+1)} - h\right)^2 + \frac{19^2u^2}{(\frac{1}{2000})^2((19u-1)^2+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On a de même (37.) la plus grande hauteur $= \frac{1000((19u+1)^2+1)^{\frac{1}{2}}}{((19u-1)^2+1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2000.19u}{(19u-1)^2+1}$; expression qui se réduit à $1000 - \frac{2000}{19u}$, lorsque u a une valeur un peu considérable; par conséquent plus la vitesse du vent sera grande, plus la plus grande hauteur à laquelle s'élevera le Cerf-volant sera considérable.

(56.) La longueur de la ficelle propre à obtenir cette plus grande

Digitized by Google

hauteur verticale du Cerf-volant a été trouvée (37.) = ... $\frac{P((Rue-Pg)(Rub+Pg)-P^2(b+c)^2)}{k((Rue-Pg)^2+P^2(b+c)^2)}$: donc elle sera, dans la supposition présente, $\frac{\frac{1}{2}((19u-1)(19u+1)-1)}{\frac{1}{2000}((19u-1)^2+1)}$; expression qui se réduit à $1000\left(1+\frac{2}{19u}\right)$, u ayant une valeur un peu considérable. Si l'on avoit $u=2$, elle seroit $=1052,6$.

(57.) Une autre longueur de ficelle, quelle qu'elle soit, moindre, ou plus grande que celle-ci, donnera une moindre hauteur verticale au Cerf-volant. 1000 pieds de longueur de ficelle, en supposant $u=2$, ne donnent que 925, 7 pieds de hauteur au Cerf-volant, tandis que la plus grande hauteur pour cette vitesse est de 947,4: 1500 pieds de longueur de ficelle ne donnent que 549, 6 de hauteur verticale. Enfin si l'on donne à la ficelle une longueur double des 1052, 6, qui donnent la plus grande élévation; c'est-à-dire, si l'on donne 2105, 2 pieds de ficelle, on tombe dans le cas où le Cerf-volant demeure dans l'horisontale du point V, (38.).

(58.) Nous avons trouvé (43.) la distance horisontale $VL = \frac{1}{8}A(2,3025851)\ log\ \frac{(B+h)^2+\frac{1}{8}A^2\pm\sqrt{((B+h)^2+\frac{1}{8}A^2)^2-\frac{1}{4}A}}{B^2+\frac{1}{8}A^2\pm\sqrt{(B^2+\frac{1}{8}A^2)^2-\frac{1}{4}A^4}}$; & dans le cas de la plus grande hauteur verticale du Cerf-volant, où l'on a $B=0$, (37.) elle devient $=\frac{1}{8}A(2,3025851)log\ \frac{h^2+\frac{1}{8}A^2+\sqrt{(h^2+\frac{1}{8}A^2)^2-\frac{1}{64}A^4}}{\frac{1}{8}A^2}$.

Mais nous avons trouvé ci-dessus (56.), $h=1000\left(1+\frac{2}{19u}\right)$, & (43.) $A=\frac{RuP^2(b+c)^2}{k((Rue-Pg)^2+P^2(b+c)^2)}$, & lorsque u a une valeur un peu considérable, cette valeur de A se réduit à $\frac{2000.19u}{19^2u^2-2.19u}$, ou à $1000\ \frac{2}{19u}\left(1+\frac{2}{19u}\right)=\frac{2^4}{19u}$. Donc, en substituant cette valeur de A dans l'expression de l'horisontale VL pour le cas de la plus grande hauteur, elle deviendra = ...

$$\frac{1000}{19^2u^2}(19u+2)(2,3025851)\ log\ \frac{1+\frac{2}{19^2u^2}+\left(\left(1+\frac{2}{19^2.u^2}\right)^2-\frac{4}{19^2.u^4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{2}{19^2u^2}} =$$

$$\frac{1000}{19^2.u^2}(19u+2)(2,3025851)\ log\ \frac{19^2u^2+2+19u\sqrt{19^2u^2+4}}{2}$$; ou à peu près $=\frac{2000}{19^2.u^2}(19u+2)(2,3025851)\ log\ 19u$. Faisant maintenant $u=2$, nous aurons $VL=\frac{1000}{19^2}(20)(2,3025851)\ log\ 38=201,5$ pieds.

Digitized by Google

(59.) Ceci donne l'angle $LVG = 78°$, & la distance directe $VG = 969,3$; de sorte que la courbure de la ficelle emploie 83,3 pieds.

Réduire les formules au cas considéré par Euler, *dans lequel* $g = o$, *ayant aussi* $e = b$.

(60.) Dans ce cas, on aura (3.) $\sin(\varphi+\theta) = \ldots\ldots\ldots$ $\frac{4PRu}{R^2u^2+4P^2}$, & $\cos(\varphi+\theta) = \frac{R^2u^2-4P^2}{R^2u^2+4P^2}$.

(61.) Soit $u = o$, on aura $\sin(\varphi+\theta) = o$, & $\cos(\varphi+\theta) = -1$; ce qui s'accorde avec ce qu'on a dit, *Art.* 4, & avec les principes connus de Méchanique.

(62.) La force que le vent exerce sur le Cerf-volant, se réduit dans ce cas, à $\frac{2PRu}{(R^2u^2+4P^2)^{\frac{1}{2}}}$; (7.).

(63.) La force, ou tension à l'extrêmité V de la ficelle, se réduit pareillement, en ce cas (21.), à $\left(\left(\frac{PR^2u^2-4P^3}{R^2u^2+4P^2} - kh\right)^2 + \frac{16R^2u^2P^4}{(R^2u^2+4P^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

(64.) Si $u = o$, cette force, ou tension, sera $= -P - kh$, poids du Cerf-volant & de la ficelle.

(65.) La hauteur verticale du Cerf-volant se réduit, dans ce cas (32.), à $\frac{P(R^2u^2+4P^2)^{\frac{1}{2}}}{k^2(R^2u^2+4P^2)^{\frac{1}{2}}} - \left(\left(\frac{P(R^2u^2-4P^2)}{k(R^2u^2+4P^2)} - h\right)^2 + \frac{16R^2u^2P^4}{k^2(R^2u^2+4P^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{P}{k} - \left(\left(\frac{P(R^2u^2-4P^2)}{k(R^2u^2+4P^2)}\right)^2 + \frac{16R^2u^2P^4}{k^2(R^2u^2+4P^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

(66.) Si $u = o$, la hauteur verticale deviendra $= \frac{P}{k} - \frac{P}{k} - h = -h$; longueur de la ficelle.

(67.) La quantité h étant variable, l'expression de la plus grande hauteur se réduit à $\frac{P(Ru-2P)^2}{k(R^2u^2+4P^2)}$: & celle de la longueur h de la ficelle qui donne cette plus grande hauteur devient $= \frac{P(R^2u^2-4P^2)}{k(R^2u^2+4P^2)}$.

(68.) Cette longueur de la ficelle qui donne la plus grande hauteur sera donc à cette plus grande hauteur, comme $Ru+2P$, est à $Ru-2P$.

(69.) La longueur de la ficelle nécessaire pour que le Cerf-volant demeure dans l'horisontale du point V, se réduit (36.) à $h = \frac{2P(R^2u^2-4P^2)}{k(R^2u^2+4P^2)}$.

Tous ces résultats conviennent parfaitement avec ce qu'on observe dans la pratique. Examinons maintenant s'il en est de même dans le

Digitized by Google

ſyſtême où l'on ſuppoſe que les forces du vent ſont en raiſon compoſée doublée de ſes viteſſes & de ſes ſinus d'incidence.

Théorie des Cerf-volants, ou Cometes, en ſuppoſant la réſiſtance des Fluides en raiſon compoſée doublée de leurs viteſſes & des ſinus des angles d'incidence.

(70.) L'expreſſion de la force du vent ſur le Cerf-volant, ſera préſentement $ru^2 \sin\varphi^2$. Cette quantité ſubſtituée dans l'équation de l'*Art.* 1, en place de $Ru \sin\varphi$, qui exprimoit la même force, & faiſant $c=b$, & $g=0$, on aura $ru^2 \sin\varphi^2 = 2P \cos\varphi$.

(71.) On aura donc, $\sin\varphi^2 = \frac{2P}{ru^2}\cos\varphi$: & $1-\sin\varphi^2 = \cos\varphi^2 = 1-\frac{2P}{ru^2}\cos\varphi$: d'où l'on déduit $\cos\varphi = -\frac{P}{ru^2} \pm \left(1+\frac{P^2}{r^2u^4}\right)^{\frac{1}{2}}$: .... & $\sin\varphi = \left(-\frac{2P^2}{r^2u^4} \pm \frac{2P}{ru^2}\left(1+\frac{P^2}{r^2u^4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

(72.) L'équation de *l'Art.* 2 devient $ru^2 \sin\varphi^2 \sin\theta = P \sin(\varphi+\theta) = P(\sin\varphi.\cos\theta+\sin\theta.\cos\varphi)$; & en ſubſtituant, d'après ce qui précede, $2P\cos\varphi$, à la place de $ru^2 \sin\varphi^2$, l'on aura $2P\sin\theta.\cos\varphi = P(\sin\varphi.\cos\theta+\sin\theta.\cos\varphi)$, ou $\sin\theta\cos\varphi = \sin\varphi.\cos\theta$: donc $\varphi=\theta$.

(73.) Nous aurons donc $\sin(\varphi+\theta) = 2\sin\varphi.\cos\varphi$, & $\cos(\varphi+\theta) = \cos\varphi^2 - \sin\varphi^2 = 2\cos\varphi^2 - 1$; ce qui donne $\sin(\varphi+\theta) = \left(\frac{8P}{ru^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{P}{ru^2} \pm \left(1+\frac{P^2}{r^2u^4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$: & $\cos(\varphi+\theta) = 1+\frac{4P^2}{r^2u^4} \mp \frac{4P}{ru^2}\left(1+\frac{P^2}{r^2u^4}\right)^{\frac{1}{2}}$.

(74.) pour rendre ces expreſſions plus traitables, & en même temps plus intelligibles, ſuppoſons $\frac{r^2u^4}{P^2} = n^2-1$ *, alors nous aurons $\sin(\varphi+\theta) = \frac{2}{(n+1)}\sqrt{2(n-1)}$, & $\cos(\varphi+\theta) = 1-\frac{4}{n+1}$.

(75.) Soit ſuppoſé $u=0$, l'on aura $n=1$, $\sin(\varphi+\theta)=0$, & $\cos(\varphi+\theta) = -1$.

(76.) Soit $\frac{r^2u^4}{P^2} = 8$, l'on aura $n=3$, $\sin(\varphi+\theta)=1$, & $\cos(\varphi+\theta)=0$.

(77.) Soit $u=\infty$, l'on aura $n=\infty$, $\sin(\varphi+\theta)=0$, & $\cos(\varphi+\theta)=1$.

(78) La force que le vent exerce ſur le Cerf-volant eſt .... $ru^2 \sin\varphi^2 = 2P\cos\varphi = -\frac{2P^2}{ru^2} \pm 2P\left(1+\frac{P^2}{ru^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 2P\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}$.

* On trouve dans l'original $r^2u^4 = n^2-1$; mais il nous paroît évident que c'eſt une mépriſe de l'Auteur : car en ſubſtituant cette quantité, on ne parviendroit pas aux valeurs qu'il indique pour $\sin(\varphi+\theta)$, & $\cos(\varphi+\theta)$; mais on les trouve en faiſant $\frac{r^2u^4}{P^2} = n^2-1$. Nous avons rétabli ce paſſage & les ſuivans qui en dépendent.

Digitized by Google

(79.) Soit $u=0$, l'on aura $n=1$; ce qui donne $ru^2 \sin \varphi^2 = 0$.

(80.) Soit $\frac{r^2u^4}{P^2}=8$, l'on aura $n=3$, ce qui donne $ru^2 \sin \varphi^2 = P\sqrt{2}$.

(81.) Soit $u=\infty$, l'on aura $n=\infty$; ce qui donne $r^2u^2 \sin \varphi^2 = 2P$.

(82.) La théorie de la tenſion, ou force, qui agit ſur la ficelle, eſt la même dans ce ſyſtême de réſiſtance que dans l'autre; il eſt ſeulement néceſſaire de ſubſtituer dans les formules les valeurs correſpondantes des ſinus & coſinus des angles φ, θ, & $\varphi+\theta$.

L'expreſſion de *l'Art.* 20 eſt . . . . . $\frac{1}{P+kh}\big((P \sin \varphi.cos\,(\varphi+\theta)-kh \sin \theta)^2+P^2 \sin \varphi^2.\sin\,(\varphi+\theta)^2\big)^{\frac{1}{2}}$: en faiſant $\varphi=\theta$, elle devient $\big(P^2+k^2h^2-2Pkh\,cos\,(\varphi+\theta)\big)^{\frac{1}{2}}=\big((P-kh)^2+\frac{8Pkh}{n+1}\big)^{\frac{1}{2}}$; en mettant pour $cos\,(\varphi+\theta)$ ſa valeur. Quant à l'expreſſion de *l'Art.* 13, elle devient $=P$.

(83.) Soit maintenant $u=0$, l'on aura $n=1$; ce qui donne la tenſion de la ficelle $=P+kh$, poids du cerf-volant & de la ficelle.

(84.) Soit $\frac{r^2u^4}{P^2}=8$, l'on aura $n=3$; ce qui donne la tenſion $=(P^2+k^2h^2)^{\frac{1}{2}}$.

(85.) Soit $u=\infty$, l'on aura $n=\infty$; ce qui donne la tenſion $=P-kh=$ le poids du Cerf-volant, moins celui de la ficelle.

(86.) Comme la hauteur verticale du Cerf-volant dépend des mêmes éléments que la tenſion, elle ſera la même que dans l'autre ſyſtême; c'eſt-à-dire qu'elle ſera égale à la différence des tenſions aux extrêmités de la ficelle diviſée par k: elle ſera donc $=\frac{P}{k}-\frac{1}{k}\big((P-kh)^2+\frac{8Fk^2}{n+1}\big)^{\frac{1}{2}}$.

(87.) Soit $u=0$, ou $n=1$, & la hauteur verticale ſera $=\frac{P}{k}-\frac{P}{k}-h=-h$.

(88.) Soit $\frac{r^2u^2}{P^2}=8$, ou $n=3$, la hauteur verticale ſera $=\frac{P}{k}-\frac{1}{k}(P^2+k^2h^2)^{\frac{1}{2}}$.

(89.) Soit $u=\infty$, ou $n=\infty$, la hauteur verticale ſera $=\frac{P}{k}-\frac{P}{k}+h=+h$.

(90.) Pour le cas où le Cerf-volant doit ſe maintenir dans l'horiſontale V, nous aurons (35.) $\frac{P}{k}=\frac{1}{k}\big((P+kh)^2+\frac{8Pkh}{n+1}\big)^{\frac{1}{2}}$, ou $2P-kh=\frac{8P}{n+1}$; ce qui donne $n=\frac{6P+kh}{2P-kh}$, & $\frac{r^2u^4}{P^2}=\frac{16P(2P+kh)}{(2P-kh)^2}$.

(91.) Juſqu'ici ce ſyſtême de réſiſtance ne nous a manifeſté aucun

Digitized by Google

défaut qui autorise à le rejetter; mais ils se manifestent aussi-tôt qu'on examine avec un peu d'attention les expressions de ces hauteurs verticales. Ayant $\frac{r^2u^4}{p^2} = 8$, la hauteur verticale du Cerf-volant est $= \frac{P}{k} - \frac{1}{k}(P^2 + k^2h^2)^{\frac{1}{2}}$, quantité constante négative, quelles que soient les valeurs de h, de k, & même de P: de sorte que d'après ce système, le Cerf-volant ne peut pas même s'élever jusqu'à l'horisontale du point V, avec la seule vitesse du vent $u = \left(\frac{8P^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{4}}$. Or, dans ce système (644.), $ru^2 = \frac{ma^2}{64}u^2$: donc $r = \frac{ma^2}{64}$, ou en faisant la densité de l'air $= m = \frac{64}{29.29}$, & $a^2 = 9$, on aura $r = \frac{9}{29^2}$, & $r^2 = \frac{81}{29^4}$. Le Cerf-volant ne pourra donc pas même s'élever jusqu'à l'horisontale du point V, ayant $u = \frac{29}{3}(8)^{\frac{1}{4}}r^{\frac{1}{2}}$: c'est-à-dire, lorsque la vitesse du vent est de $12\frac{1}{4}$ pieds à peu près * par seconde; ce qui est évidemment contraire à l'expérience, qui fait voir que cette vitesse est capable, non-seulement d'élever le Cerf-volant jusqu'à l'horisontale du point V, mais de le mettre presque vertical à ce point, principalement lorsque kh est une petite quantité. En effet, dans l'autre système de résistance, lorsque u a une valeur aussi grande, on peut négliger toutes les quantités dans lesquelles u ne se trouve pas; ce qui réduit la hauteur verticale à $\frac{P}{k} - \frac{P}{k} + h = h$. longueur de la ficelle.

(92.) On a vu ci-dessus que l'équation $\frac{r^2u^4}{P^2} = \frac{16P(2P+kh)}{(2P-kh)^2}$ doit avoir lieu, pour que le Cerf-volant demeure dans l'horisontale du point V. Substituant dans cette expression $P = \frac{1}{2}$, $k = 2000$, $h = 1000$, on aura $r^2u^4 = 12$, ou $u = \frac{29}{3}(12)^{\frac{1}{4}}$, ce qui donne la vitesse u de plus de 18 pieds par seconde **; vitesse excessive qui est capable de mettre le Cerf-volant en pieces, bien loin de ne pouvoir l'élever

* Par une suite de la faute que nous avons fait remarquer dans la note de l'*Article 74*, l'Auteur trouve 16 p. $\frac{1}{2}$, au lieu de 12 p. $\frac{1}{4}$ que nous trouvons. Cette vitesse 16 p. $\frac{1}{2}$ auroit effectivement lieu, en supposant $P = 1$; mais, pour conserver l'analogie dans la comparaison des deux systèmes, nous faisons $P = \frac{1}{2}$, quoique l'Auteur n'en avertisse pas. Au surplus, on trouve cette derniere supposition dans l'article suivant.

** Dans l'original, on trouve $r^2u^4 = 48$, ce qui donne u de plus de 25 pieds; mais nous avons déjà indiqué l'origine de cette différence. Au reste, cela n'est, comme on voit, d'aucune importance pour les conséquences que l'Auteur déduit de ses calculs.

jusqu'à

Digitized by Google

jusqu'à l'horisontale du point *V*. Dans l'autre syſtême, cette même viteſſe élevera le Cerf-volant juſqu'à le mettre ſenſiblement vertical au point *V*.

Ceci ſuffit, pour convaincre de la fauſſeté du ſyſtême qui ſuppoſe la réſiſtance des Fluides en raiſon compoſée doublée des viteſſes & des ſinus des angles d'incidence.

APPENDICE II.

L'IMPRESSION de cet ouvrage étoit preſque finie, lorſque je reçus d'Angleterre le reſte des tranſactions Philoſophiques de la Société Royale, qui étoient nouvellement imprimées. Dans le Volume 51, *Part.* 1, *page* 100, on trouve quelques expériences faites par M. *J. Smeaton*, ſous le titre, *An experimental inquiry concerning the natural powers of water and wind to turn mills, and other machines depending on a circular motion.* L'Auteur donne la deſcription d'une petite machine de ſon invention, dont il a fait uſage pour déterminer, par des expériences répétées, la force qu'exerce l'eau, qui, en ſortant d'un réſervoir par une ouverture, choque les aubes d'une roue verticale, diſpoſée comme celle d'un moulin. Sur l'axe de cette roue s'enveloppe une corde, à laquelle eſt ſuſpendu un poids qui ſert pour meſurer l'effet de la machine. L'Auteur en ſoumettant ces matieres à un nouvel examen, prouve clairement le peu de confiance qu'il avoit dans les déterminations données juſqu'alors ſur les forces, ou réſiſtances, de l'eau. Avant de commencer, il examine les différences qui doivent réſulter de faire les expériences avec des modeles, ou de les faire avec des machines en grand, à cauſe du frottement, qui, comme nous l'avons vu, doit être différent, ſuivant les différentes dimenſions & peſanteurs des pieces qui compoſent la machine. Pour éviter cette difficulté, il donne une méthode très-ingénieuſe pour déterminer les frottements, & en corriger les effets dans les expériences, afin qu'on puiſſe avoir confiance dans leurs réſultats autant qu'il eſt poſſible, ou au moins, ſuffiſamment pour connoître la loi ſuivant laquelle l'eau produit ſon action.

Nous ne nous arrêterons pas à l'examen, ou à la détermination des forces abſolues; nous nous contenterons de faire voir combien

Digitized by Google

les résultats de ces expériences s'accordent avec la Théorie que nous avons donnée, & combien elles s'éloignent de celle qu'on a enseignée jusqu'ici. Pour cela il suffit de dire que l'effet d'une machine doit se mesurer par le produit du poids qu'elle éleve, par la vîtesse avec laquelle il est élevé: parce que si la vîtesse est zéro, l'effet l'est également, & ce seroit la même chose si le poids étoit zéro. Par-là on voit clairement que si depuis un poids fort petit, on alloit en augmentant graduellement, l'effet de la machine qui éleve ce poids deviendroit de plus en plus grand jusqu'à un certain terme, au de-là duquel il doit diminuer, parce que le poids devenant excessif, la machine ne pourra le mouvoir, & l'effet deviendra zéro. Ce terme où l'effet cesse d'augmenter, est par conséquent le *maximum*, & c'est celui qu'on a toujours cherché pour obtenir le plus grand avantage dans l'usage des machines. La maniere de le trouver, est de calculer premiérement la valeur du poids élevé en fonctions de la puissance, ou de la force motrice; de multiplier cette valeur par la vîtesse du même poids, & de chercher ensuite le *maximum* de cette expression. Cela posé, soit supposé, dans le cas de notre Auteur,

V la vîtesse avec laquelle se meut l'eau choquante;
u la vîtesse des aubes de la roue, & celle du poids;
P le poids;
R le rayon de la roue;
r le rayon de l'axe sur lequel se roule la corde;
F la quantité du frottement résultant du poids de toute la machine.

Il suit de ces dénominations que $V-u$ sera la vîtesse avec laquelle l'eau choque les aubes; & suivant la Théorie qu'on a enseignée jusqu'ici, on peut exprimer la force de l'eau par $A(V-u)^2$, A étant une quantité constante, & son moment par $RA(V-u)^2$. Ce moment doit être égal à celui rP du poids, plus ceux des frottements. Le frottement qui provient du poids peut s'exprimer par nP, n étant un nombre constant quelconque: & celui qui résulte du poids total de la machine par fF, f étant un autre nombre constant quelconque. Nous aurons donc, $RA(V-u)^2=rP+nP+fF$; d'où nous tirerons $P=\frac{RA(V-u)^2-fF}{r+n}$; & $Pu=\frac{RAu(V-u)^2-fFu}{r+n}$. Pour trouver maintenant le *maximum* de cette quantité, nous devons la différencier, & égaler la différencielle à zéro. On aura par conséquent $RAdu(V^2-4Vu+3u^2)-fFdu=0$, ce qui donne $u=\frac{1}{3}V-\left(\frac{fF}{3RA}+\frac{1}{9}V^2\right)^{\frac{1}{2}}$: c'est l'expression de la vîtesse que doivent prendre

les aubes de la roue, & le poids, pour que la machine produise le plus grand effet possible. De sorte qu'on doit proportionner le poids pour obtenir cette vîtesse. Si l'on suppose $f=0$: c'est-à-dire, le frottement nul, on aura $u=\frac{1}{3}V$: c'est ce que nous ont enseigné jusqu'ici tous les Auteurs. La vîtesse V de l'eau devroit donc, suivant cette Théorie, être à la vîtesse u des aubes, abstraction faite du frottement, comme 3 est à 1: & en ayant égard au frottement, cette raison devroit être encore plus grande; ensorte que, suivant ce système, la vîtesse des aubes doit être encore moindre que le tiers de la vîtesse de l'eau: or c'est ce que les expériences de M. *Smeaton* contredisent manifestement. Pour s'en convaincre, il ne faut que jetter les yeux sur la *page* 115, *colonne* 12. On y verra clairement la fausseté de ce système: car on ne trouve pas même une seule expérience parmi les 27 qu'il expose, qui ne donne la vîtesse des aubes plus grande que le tiers de la vîtesse de l'eau: il y en a même quelques unes dans lesquelles la vîtesse des aubes va jusqu'à être la moitié de celle de l'eau.

Pour résoudre maintenant le même cas suivant notre Théorie, nous n'avons qu'à exprimer la force avec laquelle l'eau choque les aubes par $A(V-u)$: ce qui réduira la premiere équation à $RA(V-u)=rP+nP+fF$, & donnera $P=\frac{RA(V-u)-fF}{r+n}$, & $Pu=\frac{RAu(V-u)-fFu}{r+n}$; expression dont la différencielle étant égalée à zéro, donne $RA(V-2u)-fF=0$, & par conséquent $u=\frac{1}{4}V-\frac{fF}{2RA}$: d'où l'on voit que la vîtesse des aubes doit être un peu moindre que la moitié de la vîtesse de l'eau qui les choque: c'est aussi ce qu'on a trouvé par l'expérience, & ce qui est exprimé à très-peu près dans la *colonne* 12 de la *page* 115 de notre Auteur. Mais ce n'est pas seulement cet accord, qui confirme d'avantage notre Théorie. La quantité A est la constante, qui, multipliée par la vîtesse exprime la résistance, ou la force, du Fluide. Or, cette force (642.) est $=\frac{2}{3}mca^{\frac{1}{2}}u\sin\theta$, ou, à cause de $\sin\theta=1$, $=\frac{2}{3}mca^{\frac{1}{2}}u$: on aura donc $A=\frac{2}{3}mca^{\frac{1}{2}}$; expression dans laquelle ca désigne la section verticale de l'eau dans le canal, ou dans l'orifice par lequel elle sort. Ainsi on voit que plus cette ouverture sera grande, plus la quantité $\frac{fF}{2RA}$ sera petite, & plus la vîtesse u des aubes, & du poids P sera grande. Or, rien n'est plus conforme aux expériences de

Digitized by Google

l'Auteur. Dans la même *page* 115, on voit qu'il a fait ſes expériences avec ſix orifices différents, les uns plus grands que les autres. Les dix premieres faites avec le plus petit orifice, donnent, en prenant un milieu entr'elles, & ſuppoſant $V = 10$, donnent, dis-je, $u = 3, 548$, & $\frac{fF}{2RA} = 1, 452$. Les ſept ſecondes faites avec un plus grand orifice donnent $u = 3,89$, & $\frac{fF}{2RA} = 1, 11$. Les quatre troiſiemes, avec un autre orifice plus grand, donnent $u = 4,3$, & $\frac{fF}{2RA} = 0, 7$. Les trois quatriemes, avec un orifice encore plus grand, donnent $u = 4, 53$, & $\frac{fF}{2RA} = 0, 47$. Les deux cinquiemes, faites avec un orifice plus grand, donnent $u = 4, 775$, & $\frac{fF}{2RA} = 0,225$: & enfin la ſixieme, faite avec le plus grand orifice, donne $u = 5, 2$: quantité qui exède de quelque choſe, la plus grande valeur que puiſſe avoir u qui eſt $= 5$, mais cette différence eſt bien petite, en comparaiſon de celles que donnent les autres expériences. La même théorie ne ſera pas moins accréditée, & recevra encore un nouveau dégré de certitude, lorſque, dans le *Tome II*, on l'appliquera à tous les phénomenes que préſentent les mouvements du Navire.

Fin du Tome premier.

Digitized by Google

TABLE ALPHABÉTIQUE ET RAISONNÉE

Des Matieres contenues dans ce premier Volume.

N. B. Les Renvois indiquent les *Articles*, & non les *Pages*, à moins qu'on ne l'exprime.

ACTION est égale à la réaction, & lui est opposée, *Article* 22. Voyez *Forces*, *Réfistance*, *Momens*, &c.

ALEMBERT (d') Auteur d'un principe très-fécond dans la science du mouvement, 112 (*Note.*) — Fait voir avec la plus grande évidence que la question des forces vives & mortes est une question de nom, 246 (*Note.*)

AMONTONS, ses résultats sur le frottement, 407. V. *Frottement.*

AMPLITUDE des fibres, 208. V. *Levier.*

ANGLE DE ROTATION. V. *Rotation.*

APPUI (point d'). V. *Levier.*

ARISTOTE demande pourquoi une hache divise le bois par un coup, & non quand elle est seulement comprimée, mais résout pas la question, 246.

ASPÉRITÉS. V. *Frottement.*

ATOMES primitifs des corps sont privés de pores, 236.

AUBES d'une roue à l'eau; vitesse qu'elles prennent suivant cette système, confirmée par l'expérience, &c. *App. II*, *pg.* 392 & *suiv.*

AXE DE ROTATION, 165 & 220. V. *Rotation.*

BERNOULLI (Daniel) distingue le centre des masses de ceux des puissances, 99. V. *Centre de gravité.* — Que sa théorie de la résistance des fluides est sujette aux mêmes difficultés que celles des autres Auteurs. — Sa distinction des fluides élastiques & non élastiques, 693.

BERNOULLI (Jean) ne détermine le rayon de rotation d'un système que dans un cas. — A cru que le système tournoit sur un centre d'oscillation. — N'a déterminé, ainsi que M. *Bouguer*, l'axe & le rayon de rotation que pour le premier instant, 229. — Sa définition des forces vives & mortes, 246. — Etablit que ces deux forces ne sont pas plus comparables que le fini avec l'infini, une ligne avec une surface; & en même temps que la force vive ne dépend pas absolument du choc. Obscurité des notions de cet Auteur, 246. — Il donne à penser qu'il doutoit de la réunion des centres de percussion & d'oscillation, 332.

BILFINGER, ses résultats sur le frottement, 407. V. *Frottement.*

BOUGUER établit qu'une ligne droite tourne sur son centre de gravité, étant poussée, ou tirée perpendiculairement par deux puissances égales, & de direction contraire, appliquées à ses extrémités. Que cette proposition peut être énoncée d'une maniere plus générale, 228. — Que la règle qu'il donne sur la situation de l'axe & du rayon de rotation des corps, n'est pas générale, 229. — N'a considéré la stabilité des corps flottants qu'en les supposant sans mouvement progressif; différence qui en résulte, 848. — Sa regle sur la stabilité des corps flottants; & restriction qu'on doit y faire, 894. — Qu'il néglige de considérer l'effet des résistances dans la rotation des corps flottants; & erreur qui en résulte, 931.

CABESTAN, 424 - 491. V. *Treuil.*

CALIGNAS, 531. V. *Mouffles.*

CATARACTE, 623.

CENTRE DE CONVERSION, 129 (*Note.*). V. *Rotation.*

CENTRE DE FIGURE, ou de GRANDEUR, 123.

CENTRE DE GRAVITÉ *d'un système & de son mouvement*, 80 *jusqu'à* 127. — Formule de l'espace parcouru par un point quelconque de la ligne qui joint deux corps qui se meuvent suivant des directions paralleles, en vertu de puissances quelconques, 81. — *Idem*, si les distances de chacun des corps au point dont on considere la vitesse, sont en raison inverse de leur masse, 83. — Que les longueurs absolues de ces distances n'affectent pas le mouvement du point dont il s'agit, 84. — Qu'on peut les supposer égales à zéro; & que, par conséquent, le point dont il s'agit se meut comme si les deux corps y étoient réunis, & seroient animés par une seule puissance égale à la somme des deux premieres, 85. — Mêmes formules pour trois corps, & conséquences semblables, 86, 87 & 88. — *Idem*, pour quatre corps, & pour un nombre quelconque de corps, 89, 90. — Simplification de cette formule, 91. — Formules de la distance du même point à un plan quelconque pour deux corps, 92. — *Idem*, pour trois corps, 94. — *Idem*, pour un nombre quelconque de corps, 96. — *Idem*, en considérant les puissances, au lieu des masses, 93 & 95. — Que cette distance est égale à la somme des produits de chaque masse, ou de chaque puissance, par sa distance perpendiculaire au plan qu'on a choisi, 96. — Réciproquement, si un point est tel que sa distance perpendiculaire à un plan soit égale à la somme des produits de chaque masse, par sa distance au même plan, divisée par la somme des masses, ce point aura les propriétés démontrées aux *Art.* 81 *jusqu'à* 94, 97. — Que le point dont il s'agit est ce qu'on appelle le Centre de gravité, 98. — Que ce nom ne lui convient que lorsque les puissances agissantes sont les gravités, 99.

CENTRE DE GRAVITÉ dans les corps pesants, ne peut parvenir au repos qu'en descendant le plus bas qu'il est possible, 181,

CENTRE DES MASSES, 99. Que le centre des masses est le même que celui de gravité, ou des puissances dans les corps graves, 99, 180. Toutes les masses d'un système se mouvant suivant des directions paralleles, le centre de gravité se meut aussi dans une direction parallele à celle des masses, 100. — C'est la même chose pour le centre des puissances, si elles sont constantes, 101. — Différencielle de l'espace parcouru par le centre des masses d'un système, est la même que celle que parcourroient les masses, si elles étoient réunies à leur centre, & animées d'une seule puissance égale à leur somme, 102, 105, 116. — Distance perpendiculaire du centre des masses d'un système, ou d'un corps, à un plan, est égale à la somme des produits de chaque masse par sa distance perpendiculaire au même plan, divisée par la somme des masses, 103, 120, 121. — Mêmes propriétés pour le centre des puissances, 104. — Différencielle de l'espace parcouru par le centre des masses, 105, 116. — *Idem*, de la vitesse de ce centre, & ex-

Digitized by Google

preſſion de cette viteſſe, 105, 107, 116. — Expreſſion du quarré de la viteſſe du centre des maſſes, 106, 116 — La viteſſe du centre des maſſes eſt égale à la ſomme des produits de chaque maſſe par ſa viteſſe divifée par la ſomme des maſſes, 107. — Cas où les puiſſances ne ſont pas paralleles, 108. — Qu'il ſuffit de réſoudre le cas des puiſſances paralleles, 109. — Que le *Centre des maſſes* eſt immobile, ſi les puiſſances poſitives ſont égales aux négatives, 110. — Que l'eſpace parcouru par le *Centre des maſſes* peut être zéro, ſuivant une ou deux directions, ſans ceſſer d'exiſter ſuivant les autres, 111. — Que le *Centre des maſſes* d'un ſyſtême ne reçoit aucun mouvement par l'action des forces avec leſquelles les corps ſe tirent mutuellement lorſqu'ils ſont liés entre eux par des lignes inflexibles, 112 (*Note.*) — Que ſon mouvement eſt le même que ſi les corps étoient libres, 113. — Le *Centre des maſſes* d'un corps quelconque ſe meut comme ſi chaque particule étoit ſéparée & libre, 114. — Qu'on doit entendre la même choſe d'un ſyſtême de corps, quoique ſa maſſe ne ſoit pas réunie à ſon centre, 115. — Le *Centre des maſſes* étant immobile dans un ſyſtême, ou machine, compoſé de deux corps, les viteſſes des corps ſont en raiſon inverſe de leurs maſſes, 117. — Même loi quand la gravité eſt le principe moteur : & que ce n'eſt pas la même choſe quand le centre de gravité eſt en mouvement, 118. — Le *Centre des maſſes* ne peut ſe mouvoir uniformément, à moins que les puiſſances agiſſantes ne ſe détruiſent mutuellement, 119 (*Note.*) — Situation du *Centre des maſſes* dans les corps uniformément denſes qui peuvent être partagés en deux parties égales & ſemblables par trois plans, 122. — Que le *Centre des maſſes* de tous ces corps eſt le même que leur *Centre de figure*, ou de *grandeur*, 123. — Recherche du *Centre des maſſes* d'un corps quelconque uniformément denſe, 124. — Formules générales de la diſtance du *Centre des maſſes* au plan primitif, pour les ſolides de révolution, 124. — Application à la demi-ſphere & au paraboloïde, 125 & 126. — Que c'eſt la même choſe pour le centre des puiſſances, 127.

Centre des puissances, 99.

Centre d'oscillation, 190. — Sa diſtance au centre de gravité, 191. — Il eſt plus éloigné de l'axe que le centre de gravité, 192. — Eſt le même que celui de percuſſion, lorſque le corps eſt un plan coïncidant avec l'axe, 346. — Que ces centres ſont différents dans tout autre cas, 348.

Centre de percussion, 232, 344. *V. Percuſſion.* Trouver le centre de *percuſſion*, 344. — Une puiſſance placée au centre de *percuſſion*, & égale à la ſomme de toutes les autres, produit le même effet qu'elles, 345. — Ce centre eſt le même que celui *d'oſcillation*, lorſque le corps eſt un plan coïncidant avec l'axe : & lorſque le corps ne tourne pas, il eſt confondu avec le centre de gravité, 347. — Que ces centres ſont différents dans tout autre cas, 348. — Un obſtacle rencontré par un corps dans un autre point que ſon *centre de percuſſion*, ne reçoit qu'une partie de la *percuſſion*, le reſte eſt ſupporté par la cohéſion des parties du corps qui ſont, par rapport à l'axe, au-delà du point où ſe fait le choc, 349. — *Centres de percuſſion & d'oſcillation* ſont mal à propos confondus enſemble par tous les Auteurs, 350. — *Centre de percuſſion* du triangle iſocelle tournant latéralement, n'eſt pas le même que celui *d'oſcillation* : développement, 350 (*Note.*)

Centre des résistances, 850. V. *Réſiſtance.* Expreſſion de la diſtance du centre des réſiſtances horiſontales qu'éprouve un parallélipipede au centre de gravité, 850. — *Idem*, à la ſuperficie du fluide, 850.

Centre spontané de rotation, 129 (*Note.*). *Rotation.*

Cerf-volant. Théorie des Cometes ou *Cerf-volant* pour vérifier la loi des réſiſtances, *Appendice I, page* 372 *ſuiv.* Trouver la valeur des ſinus & coſinus des angles, applications à différents cas, *App. I, 1 juſqu'à* 6. Trouver la force que le vent exerce ſur le *Cerf-volant*, 7 *juſqu'à* 12. — *Idem*, la force avec laquelle la ficelle eſt tendue, 13 *juſqu'à* 26. — *Idem*, la hauteur verticale que prendra le *Cerf-volant*, 27 *juſqu'à* 40 — Que cette hauteur eſt exprimée par la différence des tenſions aux deux extrémités de la ficelle, 30. — Cas où le *Cerf-volant* demeure horiſontal, 31 - 35 & 36. — Cas où il devient vertical, 34. — Déterminer le cas de la plus grande hauteur, 37 *juſqu'à* 40. — Trouver la valeur de l'horiſontale dans différents cas, 41 *juſqu'à* 46. — Réduire les formules à un cas facile pour la pratique, & application, 47 *juſqu'à* 59. — Réduire les formules au cas conſidéré par *Albert Euler*, 60 *juſqu'à* 69. — Théorie des *Cerfs-volants*, ſuivant l'ancien ſyſtême des réſiſtances, & abſurdités qui découlent de ce ſyſtême, 70 *juſqu'à* 92.

Chaînette, ſon équation, *App. I*, 42.

Chappe. V. *Poulie.*

Choc. V. *Percuſſion.*

Coin, 414, 458, *juſqu'à* 477. Que cette machine ſurpaſſe les corps quoique les forces qui les uniſſent ſoient plus grandes que celles qui agiſſent ſur le *Coin*, 459. — Sa théorie au *Plan incliné*, 460 & 461. V. *Plan inclané. Coin* s'employe à diviſer les corps, & ce qui arrive dans ce cas, 462, 463. — Trouver la puiſſance néceſſaire pour mettre le *Coin* en mouvement, & diviſer les corps, 466 — *Idem*, pour le *Coin* immobile, 470. — Rapport donné par tous les Auteurs pour les forces qu'exerce le *Coin*, n'eſt vrai qu'en ſuppoſant le frottement nul ; & le point ſur lequel ſe fait la rotation des parties à une diſtance infinie, 467, 468. — Erreur qui en réſulte dans les autres cas, 469. — Que cette puiſſance peut être beaucoup moindre ſuivant notre théorie que ſuivant celle des Auteurs qui nous ont précédés, 471. — Cas où le *Coin* retourne en arriere, la puiſſance ceſſant d'agir, 472, 473. — Que cette circonſtance ne dépend pas ſeulement de l'angle du *Coin*, 474.

Comete. V. *Cerf-volant.*

Composition du mouvement. V. *Mouvement.*

Conservation des forces vives, 274 (*Note.*). V. *Forces vives.*

Conservation du mouvement. V. *Mouvement.*

Conoïde parabolique eſt la figure du leviet également réſiſtant, 216, 217. V. *Levier.*

Cordes, théorie de leur rupture, & exemple 318.

Corps perſévérant dans leur état de mouvement uniforme, ſuivant la direction qu'on leur a imprimée, à moins qu'ils n'en ſoient détournés, 16. — Un *Corps* peut être conſidéré comme un ſyſtême de corps infiniment petits, 114.

Corps pesants, parcourent, en tombant dans le voiſinage de la ſurface de la terre, des eſpaces qui ſont entre eux comme les quarrés des temps, 44. — *Idem*, parcourent des eſpaces égaux en temps égaux, 47. — *Idem*, parcourent à peu près 16 pieds anglais dans la premiere ſeconde de leur chûte, (*Note*) 51, 373. — Font leur chûte dans le même temps, en tombant par la cycloïde, que celle que fait la hauteur de leur chûte, 397.

Corps, ſont impénétrables, 233.

Corps durs. — Que leur exiſtence répugne à la loi de la continuité qui s'obſerve dans la nature, 230. — Qu'on ne

Digitized by Google

peut cependant gueres se refuser à admettre la dureté absolue des atomes primitifs, 236.

Corps durs et tenaces, n'ont pas leur impression de la même figure que le corps choquant, 252.

Corps elastiques. Qu'il n'y a point de corps, à l'exception des atomes primitifs, qui ne soit élastique, 250.

Corps fragiles, 241.

Corps mous comme l'huile, le suif, interposés entre les corps, diminuent le frottement, & pourquoi, 599.

Corps absolument mous, n'existent absolument pas, 249.

Corps tenaces, 240.

Couteau, 407. V. *Frottement.*

Cycloïde, sa génération & ses principales propriétés, 365 (*Note.*) — Temps de la chûte des corps graves par la *Cycloïde*, 365, 366.— Arc de cycloïde double de la corde correspondante du cercle générateur, 365 (*Note.*) — De quelque hauteur qu'un corps tombe par la *cycloïde*, le temps de sa chûte est toujours le même, 367. — Espace que parcourt un corps, en tombant librement pendant le temps qu'un autre corps tombe par la *cycloïde.*

Cycloïde. V. *Pendules.*

Cycloïde. V. *Lames.*

Décomposition du mouvement & des forces. V. *Mouvement, Fluide, Moment.*

Denivellation. V. *Force, Réfistance, Moment, Stabilité.*

Densité, uniforme, inégale, 12.— *Densités* sont entre elles comme les gravités, 49.— S'expriment par le poids d'un pied cubique de la matiere dont les corps sont composés, 49.

Descartes distingue, avant Huygens, les deux centres d'oscillation & de percussion, 350 (*Note.*)

Direction. V. *Mouvement.*

Dureté. V. *Percussion.* Que la *dureté* ne doit pas être confondue avec la densité; qu'elle peut cependant en dépendre, mais qu'elle dépend aussi de la cohésion des parties, 239. —Qu'elle peut varier dans le choc des corps, 252.

Ecrou. V. *Vis.*

Elasticité réside dans toutes les particules de matiere, à moins que quelques-unes ne se rompent, & ne se séparent, 242.— Qu'elle agit dans tous les instants du choc, qu'elle fait partie de la force de percussion, & est même identique avec elle, 242. — Sa distinction en *Elasticité* parfaite & imparfaite, 243.— Qu'elle augmente à mesure que l'impression devient plus grande; & est la plus grande qu'il est possible lorsque l'impression a acquis toute sa grandeur, 243. — Que c'est dans cet état que réside toute la force d'*Elasticité*, 243.

Element *d'un arc de cercle* exprimé par son sinus, 324 (*Note.*)— *Idem*, par son sinus verse, 365 (*Note.*)— *Id m*, par sa tangente, 792 (*Note.*).

Espace *parcouru.* V. *Mouvement, Centre de gravité, Centre de masse, &c. Percussion, Frottement.* — *Espace* peut être pareu en ligne droite, ou en ligne courbe, 9.—Sa distinction en *Espace* absolu & en *Espace* relatif, & expression de ces *Espaces*, 10.— Parcourus uniformément par un corps, sont entre eux comme les temps, 23.— Parcourus en temps égaux, sont comme les vitesses, 24.— Sont en raison composée des vitesses & des temps, 25.— Formules de l'*Espace* parcouru depuis le premier instant du mouvement, 35, 41. — Pour le cas où la puissance est constante, 36, 42.— La course commençant depuis le repos, & la puissance étant constante, les *Espaces* sont comme les quarrés des temps, & réciproquement, 37; ou comme les quarrés des vitesses acquises, 43.— *Espaces* parcourus depuis le commencement du mouvement, sont en raison composée des temps & des vitesses acquises, 38.— N'est que la moitié de celui que parcourroit un corps qui se mouvoit uniformément pendant le même temps avec la vitesse acquise, 39.— Cas où l'*Espace* parcouru d'un mouvement accéléré qui commence du repos, est égal à celui qui est parcouru d'un mouvement retardé qui arrive au repos, 40.—*Espace* parcouru par les corps graves, 46, 50, 52, 53.— *Idem*, pendant la premiere seconde de leur chûte. ur le bord de la mer, en *Espagne*, sous l'Equateur, sous le Pole, & en différents endroits du globe, 373 (*Note.*)

Euler (Albert), sa théorie des Cerfs-volants, *Appendice I, pag.* 372 *& suiv.*

Euler (Léonard) emploie le premier l'expression *Momens d'inertie*, 134.— Dit que la force vive n'est autre chose que la force de percussion, 246.— Donne une théorie du flottement; & que les difficultés auxquelles elle est sujette, n'ont point lieu dans la nôtre. Que les expériences qu'il rapporte sur l'accélération du mouvement des corps qui coulent sur des plans inclinés, s'accordent parfaitement avec notre théorie, 422 (*Note.*)— Sa théorie de la résistance des fluides; imperfections de cette théorie reconnues par l'Auteur même; & sa comparaison avec la nôtre, 594. — N'a considéré la stabilité des corps flottants qu'en les supposant en repos; & différence qui en résulte, 848.—Néglige de considérer les résistances, dans la rotation des corps sur les fluides; erreur qui en résulte, 931.

Fibre. V. *Levier.*

Filet. V. *Vis.*

Fluide, 542 *jusqu'à* 946. V. *Force, Réfistance, Moment, Rotation, Inclinaison, Stabilité.* La force que souffre chaque particule d'un *Fluide* en repos, est toujours la même dans quelque direction que ce soit; & est égale au poids de la colonne verticale du *Fluide* qui est au-dessus d'elle, 543, 545.— *Idem*, pour la *force* qui la comprime en vertu de la gravité, 544.— La masse d'un *Fluide* étant en repos, sa superficie est horisontale, & réciproquement, 547, 548, 549.— La hauteur de la superficie de différents *Fluides* qui se communiquent, au-dessus des orifices, est en raison inverse des densités des *Fluides*, 551.

Force. V. *Réfistance, Frottement.*— *Force innée, d'inertie*, ou *d'inaction.* Que le nom d'*inertie* ne convient pas dans tous les cas, 14.— *Force de percussion*, 235. V. *Percussion.*—*Forces vives & mortes*, 246.— Que la question des *Forces* vives & mortes est une question de nom; que leur considération est inutile; que la *Force* de percussion suffit pour expliquer tous les phénomenes que le choc présente, 246. — Que la *Force* vive agit comme la *Force* de pression, 246.— *Force qu'exercent les fluides en repos*, 542 *jusqu'à* 562. — *Force* que souffre une différencio-différentielle de la surface qui renferme un fluide, est perpendiculaire à cette surface, 552.— Est égale au poids d'une colonne verticale du même fluide, dont la base est cette différencio-différentielle, & dont la hauteur est celle du fluide au-dessus d'elle, 553. — Expression de cette *Force*, 554.— Sa décomposition en deux autres, l'une verticale, & l'autre horisontale, & leurs expressions, 555.— Rapport de la force horisontale à la verticale, 550.— Autre expression de la *Force* horisontale, 557. — Sa décomposition en deux autres *Forces* aussi horisontales, & leur rapport, 558.— Autre expression de la *Force* verti-

Digitized by Google

cale, 559. — Que la somme des *Forces* horisontales qui agissent sur un corps submergé dans un fluide en repos, est zéro, 560. — Que la somme des *Forces* verticales est égale au poids du volume de fluide dont le corps occupe la place, 561. — Que pour qu'un corps submergé dans un fluide en repos soit sans mouvement vertical, il faut que son poids soit égal à celui du volume de fluide qu'il déplace, & que de plus la verticale qui passe par le centre du volume déplacé coincide avec celle qui passe par le centre de gravité du corps, 562. — La vitesse avec laquelle un fluide, dont la masse est en repos, jaillit par un orifice infiniment petit fait dans la surface qui le renferme, est égale à celle qu'il acquerroit en tombant librement de la hauteur verticale du fluide au-dessus de l'orifice, 563. — Qu'une particule du fluide prend la même vitesse suivant une direction quelconque, 564. — Que les fluides prennent réellement une vitesse moindre que celle qu'indique la théorie, & pourquoi, 565. — Rapport entre la *Force* qui agit sur une différencio-différencielle, & la vitesse avec laquelle le fluide jailliroit par elle, 566. — Trouver l'effort que supporte cette différencio - différencielle, 567. — Expression de la *Force* perpendiculaire qu'éprouve une différencio-différencielle de surface qui se meut dans un fluide, dans une direction qui lui soit perpendiculaire, 568, 569. — Pour le cas où la surface se meut dans une autre direction, 570. — Expression de la *Résistance* que la différencio-différencielle éprouve dans une direction quelconque, 571, 574, 576, 581, 587. — *Idem*, lorsque la surface est en repos, & que c'est le fluide qui se meut, 589. — *Idem*, lorsque la surface & le fluide sont en mouvement, 592. — *Idem*, suivant la direction du mouvement, 572, 587. — *Idem*, lorsque c'est ce fluide qui se meut, 589. — *Idem*, de la *Résistance* horisontale, 577, 587. — *Idem*, lorsque c'est le fluide qui se meut, 589. — Rapport de cette dernière *Résistance* avec celle dans une direction quelconque, 578, 579. — De la *Resistance* verticale, 580, 582, 587. — *Idem*, lorsque c'est le fluide qui se meut, 589. — *Résistance* horisontale quand le mouvement est aussi horisontal, 586. — Lorsque c'est le fluide qui se meut, 589. — *Résistance* verticale quand le mouvement est aussi vertical, 586. — *Idem*, lorsque c'est le fluide qui se meut, 589. — Expression générale du sinus de l'angle que forme la direction du mouvement avec la surface, 573. — *Idem*, pour le cas où il s'agit de la *Resistance* suivant la direction du mouvement, 583 — *Idem*, dans le cas où le mouvement est horisontal, 584. — Où le mouvement est vertical, 585. — Lorsqu'un fluide se meut en vertu de sa gravité, & prend une vitesse constante, une partie de l'action de ses particules est détruite par une force quelconque, 588. — Que ce n'est pas la même chose de supposer le fluide en mouvement, ou la surface, à moins que le fluide ne se meuve horisontalement, 589, 590. — Que la théorie de la percussion des corps solides ne peut s'appliquer aux fluides, ou du moins qu'on n'en peut déduire une connoissance parfaite de leur action, 593. — Doutes qui se présentent sur l'action qu'éprouvent les surfaces mues dans les fluides; examen de ce qu'ont produit jusqu'ici les plus célebres Géometres, & erreurs dans lesquelles ils sont tombés, 593. — Que la *Résistance* augmente à proportion que la surface est plus profondément enfoncée dans le fluide, 593. — Qu'il n'est pas possible que cette *Force* soit simplement comme une fonction de la vitesse, 593. — Qu'on n'a rien déduit de satisfaisant des expériences faites en petit, avec différentes machines, 593. — *Développement* qui a lieu dans la superficie d'un fluide par le mouvement d'une surface dans ce fluide, 594. — *Force* dont les différencielles des surfaces supportent l'effort dans les développements, 595 — Que la partie développée du fluide prend la figure d'une parabole du premier genre, 597. — Réduction des *Forces* dans une direction quelconque à celle des *Forces* horisontales, & réciproquement, 599. — Trouver la *Force* horisontale qui agit sur une surface plane dont l'extrémité supérieure fort du fluide, en ayant égard à la développement, 600. — Cas où l'on peut négliger la développement, 601. — *Idem*, sur la surface choquante, lorsqu'elle sort du fluide d'une quantité moindre que la hauteur de la développement, 602. — *Idem*, lorsque c'est le fluide qui se meut, 602. — Lorsque l'extrémité supérieure de la surface coincide avec la superficie du fluide, 604, 612. — *Idem*, lorsqu'elle est à une hauteur égale ou plus grande que celle de la développement, 605. — Singularité que présentent ces formules, 606 (*Note.*) Trouver la même *Force*, & dans les mêmes cas pour la surface choquée, 607, 608, 609. — Réflexions sur un cas particulier de l'application de ces formules, 607. — Trouver la *Force* horisontale, lorsque l'extrémité supérieure est submergée dans le fluide, 611. — Réduire la *Force* horisontale à celles qui agissent dans une direction quelconque, tant pour la surface choquante que pour la surface choquée, 613. — Autre transformation des mêmes Forces, 613, 614. — *Idem*, pour le cas où la surface plane est horisontale, 615. — Trouver la *Force* verticale qui agit sur une surface plane qui se meut dans un fluide, 616, 621. — Transformation de ces expressions, 617. — Pour le cas où la surface est horisontale, 618. — *Idem*, pour le cas où c'est la surface qui se meut, 619. — Où c'est le fluide qui se meut, 620. — Qu'il est bien différent que ce soit la surface qui se meuve, ou le fluide, 622. — FORCE *avec laquelle les fluides en mouvement agissent contre des surfaces quelconques*, 624 *jusqu'à* 637. — Trouver la *Force* horisontale qui agit sur une surface quelconque qui se meut dans un fluide, 624. — *Idem*, pour la développement, 625. — Réduction de l'expression en série, 626. — Ce que devient cette formule dans le cas où la surface est submergée à une grande profondeur, 627, 631. — Qu'on peut s'en tenir, à très-peu près, à cette expression, même pour les quadrilateres contigus à la superficie du fluide, 628, 630, 631. — Véritable expression de la *Force* pour ce cas extrême, 629. — Trouver la *Force* horisontale qu'éprouve la surface d'un corps formé par la révolution d'une ligne droite, ou courbe, autour d'un axe, le corps se mouvant dans la direction de cet axe, & parallélement à l'horison, 632. — Cas où cette surface se réduit à un plan circulaire, 633. — *Idem*, pour la surface d'un cylindre qui se meut horisontalement & perpendiculairement à son axe, 634. — *Force* verticale qui agit sur une surface quelconque, 635. — Réduction de la formule en série, 636. — *Force* verticale qui agit sur la surface d'un cylindre qui se meut horisontalement & perpendiculairement à son axe, . . . 637.

FROTTEMENT, *& altérations qu'il produit dans le mouvement des corps posés sur des surfaces*, 382 *jusqu'à* 422. V. *Plan incliné*, *Coin*, *Vis*, *Treuil*, *Poulie* & *Mouffle*. Obstacle formé par la force perpendiculaire, doit être vaincu par la force parallele, 383. — Aspérités dont la surface des corps est hérissée, 383. — Impressions réciproques, 383. — Que la résistance du *Frottement* ne differe en rien de la force de percussion, 383. — Distinction de deux cas dans le *Frottement*, 383. — Trouver la force réunie de l'obstacle & des aspérités, & plus grande valeur de cette force, 384, 385. — *Idem*, pour le cas où l'action provient de deux autres, l'une perpendiculaire, & l'autre parallele au plan, 398. — Ré-

Digitized by Google

fistance du *Frottement* demeure conſtante tant que l'amplitude de l'obſtacle & des aſpérités ne varie point, 386.— Force de percuſſion que peut produire une puiſſance qui agit ſur un corps parallélement au plan, 387.— Cette force étant moindre que celle du *Frottement*, le corps ſe meut en avant & en arriere par des oſcillations répétées, & parvient enfin au repos. Dans le cas contraire, le corps ſe meut ſans diſcontinuer, 388.— *Idem*, lorſque cette force eſt plus grande que celle du *Frottement*, 389.— Cas où le *Frottement* eſt vaincu, & que le corps eſt ſur le point de ſe mouvoir, 390, 399.— Que la puiſſance qui preſſe le corps perpendiculairement, eſt à celle qui ſurmonte le *Frottement*, comme l'amplitude de l'impreſſion eſt à celle de l'obſtacle & des aſpérités, 392, 394, 400.— Ce que devient ce rapport pour les corps très-liſſes, 396.— Application de cette théorie, 397.— La puiſſance qui ſurmonte le *Frottement* eſt d'autant moindre que le nombre & la grandeur des aſpérités ſont plus grands, 393.— Que le nombre des aſpérités peut être ſuppoſé proportionnel à l'amplitude de l'impreſſion, ſur-tout dans les corps qui ne ſont pas très-élaſtiques, 394.— *Frottement* devient d'autant moindre que l'impreſſion a plus de longueur, 395.— Corps mous comme l'huile, le ſuif, &c. interpoſés entre deux corps diminuent le *Frottement*; & pourquoi, 397. — *Frottement* diminué lorſque la viteſſe perpendiculaire au plan eſt zéro, 401.— Cas où le *Frottement* eſt ſurmonté par la ſeule action de la viteſſe parallele primitive, 402.— Condition eſſentielle pour que le *Frottement* ſoit vaincu, & que le corps commence à ſe mouvoir, 403, 426.— Cas où le plan eſt horiſontal, & que la puiſſance eſt la gravité, 404. — *Frottement* ſurmonté avec une viteſſe primitive très-petite dans les corps durs, 405.— Que les expériences d'*Amontons* & de *Biſfinger* peuvent ſe concilier avec notre théorie du *Frottement*, & qu'elle eſt même confirmée par elles, 407.— Couteau ſe meut plus facilement ſuivant la direction de ſon tranchant que perpendiculairement au plan de ſa lame, & pourquoi, 407 (*Note*.).

FROTTEMENT *vaincu, & effets qui en réſultent*, 408 *juſq.* 422.—Trouver la relation entre l'eſpace parcouru & la viteſſe en ayant égard au *Frottement*, 408, 413.— *Idem*, pour le cas où il n'y a qu'une ſeule puiſſance, 409. — Lorſque la profondeur de l'impreſſion dans le corps eſt nulle à l'égard de celle qui exiſte dans le plan, 410. — Condition pour que le corps s'arrête, 411, 412.— Pour le cas où l'impreſſion dans le corps a acquis ſa plus grande profondeur, 414 (*Note*.).— Rapport entre l'eſpace parcouru ſur un plan par un corps, & la durée de ſon mouvement, en ayant égard au *Frottement*, 415 (*Note*.), 417.— Temps dans lequel le corps parcourt le plus grand eſpace poſſible ſur un plan, en ayant égard au *Frottement*, 416, 419. — Relation entre la viteſſe d'un corps qui ſe meut ſur un plan, & le temps du mouvement, en tenant compte du *Frottement*, 418, 420 (*Note*.).—Le corps deſcendant le long du plan par la ſeule action de la gravité; comparaiſon de notre théorie avec l'expérience, & ſon accord parfait avec elle, 420, 421.

FROTTEMENT *dans les machines ſimples*, 423 *juſq.* 541. V. *Plan incliné*, *Coin*, *Vis*, *Treuil*, *Poulie*, *Mouffles*.—*Frottement* nul dans le levier.

'S GRAVESANDE, ſes expériences de la chûte des corps ſur de l'argille; qu'elles confirment notre théorie de la percuſſion, (*Note*.) 291, 293, 294.

GRAVITÉ eſt une force conſtante, 45.— Formules de la viteſſe des corps graves, & de l'eſpace qu'ils parcourent, 46, 50, 52, 53.— Les *Gravités* ſont entre elles comme les maſſes, 48.— Rapport de la force de gravité à celle de percuſſion, 313, 314.

GYRATOIRE (Angle) 128.

HACHE. Déterminer l'effet de la *Hache*. Que cet effet eſt proportionnel au produit de la maſſe de la *Hache*, par le quarré de la viteſſe qu'on lui imptime, 476, 477.

HYPOMOCHLION, V. *Levier*.

IMPRESSIONS, V. *Percuſſion*, *Frottement*. — Profondeur de l'*Impreſſion*, 247.— Amplitude de l'*Impreſſion*, 247.— Corps durs & tenaces n'ont pas leur *Impreſſion* de la même figure que le corps choquant, 252.

INCLINAISON. *De l'inclinaiſon que prennent les corps flottants, lorſqu'ils ſont pouſſés par une ou par pluſieurs puiſſances*, 873 *juſq.* 911. V. *Stabilité*.—Trouver l'*Inclinaiſon* que prennent les corps flottants, lorſqu'ils ſont pouſſés par une ou par pluſieurs puiſſances, 873.— Trouver le moment avec lequel agit un poids qu'on ajoute à un corps flottant, 874.— *Idem*, pour pluſieurs poids ajoutés, 876.— *Idem*, dans le cas où l'on retranche un poids, 877.— Où l'on fait le retranchement du poids dans la partie oppoſée à l'axe, 878.— Où le poids retranché ſe tranſporte au côté oppoſé, 879.— L'*Inclinaiſon* étant infiniment petite, le moment eſt égal au produit du poids, par la diſtance à laquelle on l'auroit tranſporté, 880.— Si l'on place le poids au-deſſous du plan horiſontal qui coïncide avec l'axe, 881.— Que tout poids placé au-deſſous du centre de gravité, dans le plan qui paſſe par l'axe, & par les centres de gravité & de grandeur, reſiſte à l'*Inclinaiſon*, 882.— Si l'on retranche du poids, cela augmente l'*Inclinaiſon*, 883.— Trouver l'*Inclinaiſon* que prendra un parallélipipede reſtangle flottant ſur un fluide auquel on ajoute un nouveau poids, 884 (*Note*.).— Cas où le parallélipipede ne peut prendre qu'une ſeule diſpoſition, 885.— Où il peut prendre trois *Inclinaiſons* diſtinctes, 886.— Des limites des momens poſitifs & négatifs, 887.— Que les momens ſont négatifs avant que le parallélipipede s'établiſſe dans la ſituation correſpondante à la premiere racine de l'équation, 888 — Qu'il doit s'incliner juſqu'à la ſituation qui répond à la premiere racine, & ne peut paſſer à celle qui répond à la ſeconde, ſans l'action d'une force étrangere, 889. — Qu'ayant été tiré de la ſituation correſpondante à la ſeconde, il ne peut s'y rétablir, 890.— Que ſa ſtabilité conſiſte en ce qu'aucune force ne puiſſe le tirer de la ſituation qui répond à la ſeconde racine, 891.— Cas où le parallélipipede doit ſe maintenir droit, à moins que quelque force étrangere ne ſurmonte les momens qui ſe manifeſtent dans l'*Inclinaiſon*, 892.— De la reſtriction qu'on doit faire à la regle de M. *Bouguer* ſur ce que la ſtabilité eſt en raiſon inverſe de la profondeur qu'auroit le parallélipipede dans le fluide, 894.— Trouver l'inclinaiſon que prendra le même parallélipipede, lorſque quelqu'un des angles de la baſe ſortira du fluide, 895.—Que dans ce cas les momens qu'éprouve la baſe ne ſont pas les mêmes que dans le précédent, 896.— Exemple de ce cas, où l'on fait voir que le parallélipipede peut prendre une *Inclinaiſon* de plus de 88°, malgré qu'il ſoit peu enfoncé dans le fluide, 898.— Trouver l'*Inclinaiſon* que prendra un corps quelconque auquel on ajoute un nouveau poids, 899.— Cas où l'*Inclinaiſon* eſt infiniment petite, 900.— Pour les corps formés par la révolution d'une ligne quelconque autour de l'axe horiſontal de rotation, 901, 902.— Que les momens ſont toujours poſitifs depuis l'*Inclinaiſon* correſpondante à la premiere racine, 903.— Trouver

l'*Inclinaiſon* que prendra un corps quelconque pouſſé par une puiſſance horiſontale, 905 (*Note.*).— *Idem*, pour un cylindre, 906.—Solution pour le cas où la vîteſſe du cylindre eſt nulle, ou qu'il ne peut prendre qu'un mouvement de rotation, 907.— Rapport des tangentes des *Inclinaiſons*, dans le cas où le cylindre eſt libre, & dans le cas où il tourne ſur un axe fixe, 908.— Que les moments du cylindre ont lieu pour tous les ſolides de révolution, 909.— Reſtriction pour les corps qui ne ſont pas formés par la révolution d'une ligne autour d'un axe, 910.— Autre expreſſion du ſinus de l'*Inclinaiſon*, 911.

INTERSTICES, V. *Pores.*

LAMES (viteſſe des) 816.— Que leur figure eſt celle d'une cycloïde, 817.— Des lames qui vont en croiſſant, & de celles qui vont en diminuant, 818. — Cas où notre théorie convient avec celle de *Newton*, 819.

LEIBNITZ. Que ce Sçavant appelle force vive la force de percuſſion; & la force de preſſion il l'appelle force morte, 246.

LEVIER, 196 *juſq.* 219, & 424, 425.— Sa diſtinction en trois eſpeces, 197.— Angle de rotation dans les *Leviers*, 198, 199. V. *Rotation.*— Conſéquences relatives à la longueur des perpendiculaires abaiſſées du point d'appui ſur les directions des puiſſances, 200.— Qu'il convient que la puiſſance ſoit perpendiculaire à la longueur du *Levier*, 201.— Que le *Levier* ait le moins de denſité poſſible, 202.— Cas où le *Levier* eſt en équilibre, 203. — La même choſe pour un nombre quelconque de puiſſances, 204.— Expreſſion de la puiſſance qui agit dans le *Levier*, 205.— Action qu'éprouve le *Levier* eſt en raiſon compoſée de la ſomme des moments d'inertie & de la différencielle de la viteſſe, 206, 207, 210.— Un *Levier* étant fixé par un de ſes points, ſes fibres ſupportent toute l'action, 208. Expreſſion de l'intenſité de la force des fibres, 208 (*Note*), 210, 212.— Que c'eſt la même choſe lorſque le *Levier* tourne autour d'un point, 209. — Cas où le *Levier* réſiſtera à l'action des puiſſances, & cas où il ſe rompra, 211.— Relation de l'intenſité de la force des fibres dans deux *Leviers* différents, 213.— Relation des puiſſances dont les *Leviers* d'une même matiere peuvent ſupporter l'action, 214.— Que les dimenſions linéaires d'un *Levier* homogene également réſiſtant dans toutes ſes ſections, doivent être entre elles comme les racines cubiques de leur diſtance à la direction de la puiſſance, 205 (*Note.*).— Ce *Levier* doit avoir la forme d'un conoïde paraboloique du ſecond genre, 216 (*Note.*).— *Idem*, lorſque pluſieurs puiſſances diſtribuées ſur le *Levier* agiſſent pour en opérer la rupture; mais le conoïde, quoique du ſecond genre, eſt d'une eſpece différente, 217 (*Note.*).— L'axe de rotation étant plus éloigné de celui qui diviſe la baſe en deux parties égales, le *Levier* ſera capable d'une plus grande réſiſtance, 218.— Que c'eſt à l'expérience à faire connoître ſi les fibres réſiſtent autant à leur compreſſion qu'à leur dilatation, 219.

LIEU DES CORPS, 1.— Abſolu, relatif, 2.

LOI DE CONTINUITÉ, 234.

MACHINES, 423.— Leur diſtinction en machines ſimples, & compoſées, 424.

MARIOTTE, ſes expériences ſur la réſiſtance des fluides, bien éloignées des nôtres; erreur des expériences de cet Auteur, 644.

MASSE, 11.— Suppoſée infiniment petite, ou réunie en un point, 82.

MERCURE, plus denſe que l'argent, & n'eſt pas dur, 239.

MÉTACENTRE, 894.

MOMENTS des puiſſances, 132.— *Idem*, des maſſes, ou des gravités, 133.— *Moments* d'inertie, 134, 168. (*Note.*). — Formule de la ſomme des *Moments* d'inertie à l'égard d'un axe quelconque, 179.— A l'égard d'un axe qui paſſe par le centre de gravité, 177.— Recherche des *Moments* d'inertie, 350 (*Note.*).

MOMENTS, V. *Rotation*, *Inclinaiſon*, *Stabilité.*

MOMENTS *que les corps flottants éprouvent dans leur mouvement progreſſif horiſontal*, 820 *juſq.* 872. — Trouver les *Moments* qu'éprouve un corps qui ſe meut horiſontalement dans un fluide, 820, 822.— Qu'ils peuvent être conſidérés par rapport à trois axes, 821.— *Moments* qui réſultent de la dénivellation ſont poſitifs, 823.— Diſtinction des *Moments* relatifs à un axe horiſontal en *Moments* horiſontaux & verticaux, 834.— *Idem*, pour ceux à l'égard d'un axe vertical, 825.— Cas où le plan vertical qui coincide avec l'une des directions, coupe le corps en deux parties égales & ſemblables, 826.— Trouver les *Moments* à l'égard d'un axe vertical, le corps flottant ſe mouvant horiſontalement dans une direction perpendiculaire au plan vertical qui partage le corps en deux parties égales & ſemblables, 872. — *Idem*, pour les deux dénivellations, 828.

MOMENTS *qui agiſſent ſur les corps qui tournent librement dans des fluides autour d'un axe quelconque qui paſſe par leur centre de gravité*, 912 *juſqu'à* 928. — Trouver ces *Moments* pour un corps quelconque, 912, 915. — Ceux produits par les deux dénivellations, 913, 916. — Pour le cas où les moitiés du corps ſont égales & ſemblables, 914, 917.— Cas où l'on exprimeroit les ſurfaces du corps par une équation, 918.—Où les deux moitiés du corps ſont égales & ſemblables, 919.— A quelle quantité les *Moments* ſont proportionnels, 920. — Cas où les *Moments* ſont égaux à zéro, 921.— Décompoſer les *Moments* en horiſontaux & verticaux, lorſque les moitiés du corps ſont égales & ſemblables, 922.— Réduire les *Moments* qui agiſſent ſur un corps dont les moitiés ſont égales & ſemblables, & qui tournent ſur un axe vertical, à deux *Moments* horiſontaux perpendiculaires entre eux, 923.— Trouver les *Moments* qui agiſſent ſur un cylindre qui flotte horiſontalement, & qui tourne ſur un axe parallele à ſes côtés, & paſſant par le centre de gravité, 926.— Qu'on peut négliger le *Moment* de la dénivellation, 927.— Que tous les *Moments* s'évanouiſſent, lorſque le centre de gravité coïncide avec l'axe, 928.

MOUFLES, 531. Trouver la relation entre la puiſſance agiſſante & la puiſſance réſiſtante dans les *Mouffles*, 533, 534, 535 (*Note.*), 539 & 540.— Qu'il eſt avantageux dans les *Mouffles* que le frottement ſoit le plus petit qu'il eſt poſſible, ainſi que le rayon de l'axe; & qu'au contraire, le rayon du rouet ſoit le plus grand qu'il eſt poſſible, eu égard aux circonſtances, 535.— Développement, 536 (*Note.*).—Qu'il eſt avantageux d'arranger les *Mouffles* de maniere que la puiſſance à vaincre ſoit appliquée à la *Mouffle* qui a le plus de poulies, ou à laquelle aboutit un plus grand nombre de cordons, 538. —Comparaiſon de la théorie ordinaire avec la nôtre, & différence entre les réſultats, 540.—Qu'on pourroit facilement introduire dans le calcul le poids des cordes & des *Mouffles*, 541.

MOUVEMENT (*definitions*, *axiomes & principes du*), 1 *juſq.* 55.— *Mouvement*, 3.— Abſolu, relatif, 4.— *Mouvement* abſolu peut être un repos relatif, 4, 7.— Sa direction, 5.— *Mouvement* uniforme, accéléré, retardé, 8. V. *Eſpace*, *Temps*, *Viteſſe.*— Que la quantité du *Mouvement* eſt

Digitized by Google

le produit de la masse par la vîtesse, 15.— Que la différencielle du *Mouvement* est toujours proportionnelle au produit de la puissance dont elle est l'effet par le temps qu'a duré son action, 18.— Qu'on peut égaler ces deux quantités, 20.— Doutes que quelques Auteurs élevent contre cette proportionnalité, 21. — Fondement de ces doutes, 21.— Examen de ce sujet, 268. — Que la discussion de cet objet est inutile dans la méchanique, 21.— *Mouvement* accéléré ou retardé, peut être regardé comme uniforme pendant un instant, 29.

Mouvement *composé*, 55 *jusq.* 79. — *Mouvement* d'un corps dans une direction, n'est pas altéré par l'action des puissances qui agiroient sur lui dans d'autres directions, 56.—Deux puissances qui agissent en même temps sur un corps, chacune suivant une direction particuliere, lui font prendre une direction moyenne. Equation de la ligne qui exprime cette direction, 57.— Le corps parcourt uniformément une ligne droite, si les *Mouvements* composans sont uniformes & rectilignes. Que le corps parcourt une parabole, si l'un des *mouvements* composans est produit par une force accélératrice constante; équation de cette parabole, & développement du calcul, 59 (*Note.*).— Conséquence, 60.— Que la direction du *mouvement* composé est toujours dans le même plan que celle des *Mouvements* composans, 61.— Le corps étant animé en même temps par trois puissances, prend une direction moyenne; équation de la ligne qui marque cette direction, & maniere de trouver la direction compofée, 62.— Les trois puissances étant dans un même plan, la direction résultante y est aussi, 63.— *Idem*, pour un plus grand nombre de puissances, 64.— Différencielle de l'espace parcouru en vertu de l'action simultanée de deux puissances qui agissent dans des directions quelconques, 65.— Cas où les deux directions concourent ensemble, 67.— Où les puissances sont égales, 68, 69.— Où le corps demeure sans *Mouvement*, 70.— *Idem*, lorsque le nombre des puissances est plus considérable, 71.— Décomposition du *Mouvement*, 72.— Cas où l'on suppose que l'action procede de deux autres, suivant des directions quelconques; & rapport de ces trois puissances, 73, 75.— Leur valeur, 74.— Que la décomposition du *Mouvement* est arbitraire, 76.— Cas où l'on suppose que l'action procede de trois puissances; & rapport des quatre puissances, 77.— Que la direction des trois composantes est arbitraire; & maniere de trouver leur valeur, 78.— Qu'on peut décomposer une puissance en quatre, cinq, &c. autres puissances, 79.— Que la somme des *Mouvements* des corps est toujours la même après le choc que pendant sa durée & auparavant, 262.— Que cette proposition n'est pas généralement vraie, comme l'ont établi tous les Auteurs, 263.— Examen de la question de la conservation du *Mouvement*, 264.

Mouvement *des corps posés sur des surfaces*, 351 *jusq.* 382.— Espace que parcourent deux spheres pouſſées par une puissance, 352. Cas où l'une des spheres est d'une grandeur & d'une masse infinie, 353, 354.—*Idem*, pour une sphere posée sur un plan, 354, 355.—Puissance qui anime une sphere posée sur une surface courbe parallélement à la tangente dans tous les points de cette surface, 356.— Vîtesse acquise par une sphere dans un point quelconque d'une surface, 357.— La puissance étant constante, 358, 359.— Vîtesse que les corps graves acquierent en tombant le long des surfaces, ne dépend point de l'inclinaison de ces surfaces à l'égard de l'horison, mais seulement de la hauteur d'où les corps tombent, 358, 360.— Vîtesse acquise par une sphere qui tombe le long d'un plan, excede sa vîtesse initiale, & la différence est en raison composée du temps & du sinus de l'angle que forme le plan avec l'horison, 361.— Espaces parcourus par un corps grave qui tombe depuis le repos le long d'un plan incliné, sont en raison composée du quarré des temps & du sinus de l'angle que forme le plan avec l'horison, 362.— Expreſſion du temps de la chûte des corps sur des plans, ou sur des surfaces courbes, 363.— Les chûtes se faisant librement, 364.— Temps de la chûte des corps graves par la cycloïde, 365. V. *Cycloïde*. — Trouver les pouſſances perpendiculaire & parallele à la tangente qui agissent sur un corps quelconque posé sur une surface, 374.— Pouſſance parallele à la tangente la même pour tous les corps, 375.

Mouvement *progreſſif des corps flottants*, 792 *jusqu'à* 819. — Trouver la relation entre le temps & la vîtesse qu'acquiert un corps flottant pouſſé par une pouſſance horisontale, placée au centre des réſistances, & ce centre coincidant avec celui de gravité, 792 (*Note.*). — Cas où la vîteſſe va en diminuant, 793.— Que l'équation doit avoir deux racines imaginaires, 792 (*Note.*). & 806. — Cas où la pouſſance est zéro, 794.— Où le corps a acquis la plus grande ou la moindre vîteſſe, 795.— Qu'il lui faut un temps infini pour l'acquérir, 796, 799.— Que cependant il l'acquiert preſque toute dans un temps très-court, 808. — Cas où les moitiés du corps sont égales & ſemblables, & qu'on peut négliger la dénivellation, 797.— Plus grande ou moindre vîteſſe dans ce cas, 798, 801, & *Note*, sur une mépriſe de l'Auteur.— Que cette vîteſſe est plus grande qu'en ayant égard à la dénivellation, 803.— Ces deux vîteſſes sont égales, ou celle qui a lieu, en ayant égard à la dénivellation, excede celle dans le cas où on la néglige, lorſque la partie choquante du corps est aiguë à l'égard de la choquée, 804.— Différence entre ces deux vîteſſes, 805.— Vîteſſe à un inſtant quelconque du mouvement du corps dans le cas de la vîteſſe croiſſante, 800.— *Idem*, dans le cas de la vîteſſe décroiſſante, 801.— Qu'il faudroit, pour que cette théorie fût vraie, que le centre de gravité ſuivît les variations du centre des réſiſtances, ce qui est impoſſible; mais que la différence est négligeable, lorſque les réſiſtances ne sont pas exceſſives, & que l'inclinaiſon n'est pas conſidérable, 807.— Trouver la relation entre la vîteſſe & l'eſpace que parcourt un corps flottant pouſſé par une pouſſance horiſontale placée au centre des réſiſtances, ce centre coïncidant avec celui de gravité, 809.— Qu'il ne peut acquérir ſa plus grande ou ſa moindre vîteſſe qu'après avoir parcouru un eſpace infini, 811.— Cas où le corps a ſes moitiés égales & ſemblables, & qu'on peut négliger la dénivellation, 812. — Où la marche du corps commence du repos, 813.— Expreſſion de l'eſpace parcouru lorſque le corps acquiert une vîteſſe moindre que la plus grande d'un centieme, 814. — Eſpace parcouru est en raiſon directe de la pouſſance, & en raiſon inverſe doublée de la conſtante qui multiplie les réſiſtances, 815.

Newton avertit que le nom de force d'inertie ne convient pas dans tous les cas, 14.— Examine les conſéquences qui ſuivent de ce que les réſiſtances des fluides sont comme les ſimples vîteſſes, ou comme le quarré des vîteſſes; ſes expériences en faiſant oſciller des pendules dans des fluides; que ces expériences prouvent plutôt que les réſiſtances ſuivent la raiſon des ſimples vîteſſes que celle de leurs quarrés, &c. 593.—Erreur dans laquelle il eſt tombé en cherchant le poids que ſupporte une ſurface plane horiſontale, lorſque le fluide tombe verticalement ſur elle, 623.— Cas où ſa théorie de la vîteſſe des lames convient avec la nôtre, 819.

Obstacle. V. *Frottement*.

Digitized by Google

Or est plus dense que l'acier, & est moins dur, 239. — Battu avec le marteau devient plus dur, & en même temps plus dense, 239.

Oscillation, 183. V. *Centre, Pendule.*

Palan, 531. V. *Mouffle.*

Pas de la vis, 480. V. *Vis.*

Pendule, 182 *juſqu'à* 195. Pendule ſimple, 182 — compoſé, 186.— Angle de rotation, du *Pendule* ſimple, 184. V. *Rotation.*— Pour le cas où la gravité feule agit, 185. — *Idem*, pour le *Pendule* compoſé, 187.— Longueur du *Pendule* ſimple iſochrone au *Pendule* compoſé, 188, 189, 193.— Pour le cas où les corps ſont dans une même ligne droite, 194.— Que la formule donnée pour générale par tous les Auteurs, ne peut avoir lieu que dans ce cas, 195. *Pendule* dont les oſcillations ſont fort petites, peut être conçu décrire des arcs de cycloïde, 369.— Durée de ſes oſcillations, 369. V. *Cycloïde.*— Eſpace qu'un corps parcourt en tombant librement pendant la durée d'une oſcillation du *Pendule* qui décrit des arcs coïncidants avec ceux d'une cycloïde, 370, 371.— Que les longueurs des *Pendules* ſont entre elles comme le quarré des durées des oſcillations, 372.— *Pendules* qui oſcillent dans les fluides, 593.— Trouver la longueur d'un *Pendule* ſimple iſochrone avec les oſcillations d'un corps flottant, 934.— Corps flottant oſcille comme un *Pendule*, 936.— *Idem*, en ayant égard aux réſiſtances, 940.— Temps de la durée d'une oſcillation des corps flottants, 937, 938.— Longueur du *Pendule* ſimple iſochrone avec un cylindre flottant, en ayant égard aux réſiſtances, 930 (*Note.*).— Temps de la durée d'une oſcillation, 942.

Percussion, 239 *juſqu'à* 359. V. *Frottement.*— Que la nature opere par des mouvements ſucceſſifs, 234 — Force de *Percuſſion* produit un effet beaucoup plus grand que celle preſſion, 246.— Eſt en raiſon compoſée de la dureté des corps, & de l'amplitude des impreſſions, 247 (*Note.*).— Que cela a lieu, quoique les baſes des impreſſions ne ſoient pas paralleles à leurs amplitudes, pourvu que la dureté ne ſoit pas changée par cette circonſtance, 248, 251. V. *Impreſſion.* — Qu'il eſt difficile de déterminer la meſure exacte de la force de *Percuſſion*, 252.— Relation entre cette force, la dureté des corps, & l'amplitude des impreſſions, 253.— Ce qui arrive lorſque les particules viennent à ſe rompre, 254.— Que le corps choquant retourne toujours en arriere, après avoir ceſſé de ſe mouvoir dans la direction ſuivant laquelle le choc s'eſt exécuté, 254.— Relation entre les impreſſions & l'eſpace parcouru dans le temps du choc, 256.— Eſpace parcouru par le corps choquant pendant le choc, eſt égal à celui parcouru par le corps choqué, s'ils ſont parfaitement élaſtiques, 257.— Différencielle du temps de la durée du choc, 258.— Les corps marchent avec une même viteſſe à l'inſtant où s'acheve la plus grande impreſſion, 259.— Relation entre les viteſſes des corps choquant & choqué, 262.— Conſéquences, 261.— Viteſſe des corps à l'inſtant de la plus grande impreſſion, 265, 266.— Les corps d'une très-petite élaſticité ſe meuvent, après le choc, avec la viteſſe qu'ils ont lors de la plus grande impreſſion, 267.— Rapport entre les différencielles des viteſſes & celles des impreſſions, 269.— Viteſſes relatives ſont les mêmes avant & après le choc, 270.— Viteſſe du corps choquant, 271, 273.— *Idem*, du choqué, 272, 273.— Somme des produits de chaque maſſe par le quarré de ſa viteſſe, eſt la même avant & après le choc, & pendant la durée du choc, 274 (*Note.*).— Que le produit de la dureté par l'amplitude de l'impreſſion, & par la différencielle de l'eſpace parcouru par les particules des corps, eſt le même pour le corps choquant & pour le corps choqué, 275.— Rapports entre les viteſſes & les impreſſions, 276.— Viteſſe du corps choquant dans un inſtant quelconque du choc, 277.— Le corps choqué étant en repos, & d'une maſſe infinie, 278.— Viteſſes poſitives & négatives du corps choquant ſont les mêmes à égale diſtance du point où ſe termine la plus grande impreſſion, les corps étant parfaitement élaſtiques, 279.— La viteſſe poſitive eſt plus grande que la négative, les corps n'étant pas parfaitement élaſtiques, 280, 281 (*Note.*).— *Idem*, qu'il ſe fait un ſecond choc, 282.— Que l'origine des profondeurs de l'impreſſion eſt placée plus profondément dans le ſecond choc, 283.— La même choſe dans les troiſieme, quatrieme, &c. chocs, 284.— Viteſſe du corps choqué, 285.— Valeur de l'impreſſion, la dureté étant conſtante, 286. — *Idem*, de la plus grande, 287.— *Idem*, le corps choqué étant en repos, & d'une maſſe infinie, 288.— *Idem*, pour les corps qui tombent librement par la ſeule action de la gravité, 289.— *Idem*, lorſque les profondeurs de l'impreſſion ſont très-petites à l'égard de la hauteur d'où le corps tombe, 290.— Les impreſſions ſont en raiſon directe compoſée des maſſes & des quarrés des viteſſes, & en raiſon inverſe des duretés, lorſque les deux corps ſont égaux, & ne ſont animés par aucune puiſſance, 292.— Sont ſenſiblement de la figure du corps choquant dans les corps mous comme l'argile, 294.— Modification lorſque l'amplitude de l'impreſſion eſt très-grande à l'égard de la profondeur, 294.— Profondeur de l'impreſſion dans le choc, 295.— *Idem*, la force de *Percuſſion* étant conſtante, 299.— *Idem*, de la plus grande, 296, 301.— Le corps choqué étant en repos, & d'une maſſe infinie, 297, 300.— Impreſſion faite par la ſimple preſſion eſt en raiſon directe de la puiſſance, 298.— Cas où l'impreſſion n'a pas de limites, 302.— Le corps choqué étant en repos, & d'une maſſe infinie, 303.— Valeur de la dureté, 304. — *Idem*, le corps choqué étant en repos, & d'une maſſe infinie, 305.— Théorie de la *Percuſſion* appliquée aux expériences de *'s Graveſande*, pour trouver la dureté du corps choquant, 306 (*Note.*).— Dureté du corps choqué, 307.— Plus grande force de *Percuſſion* agit au moment où s'acheve l'impreſſion, 308.— Expreſſion de la force de *Percuſſion*, 309, 312.— *Idem*, pour la chûte des corps graves, 309.— Pour le cas où le corps choqué eſt d'une maſſe infinie, & eſt en repos, & que la dureté du corps choquant eſt infinie à l'égard de celle du corps choqué, 312.— Rapport de cette force avec celle de gravité, 313.— Exemple, 314 (*Note.*). — Pour le cas où les duretés ſont égales, 315, 316.— Force de *Percuſſion* dans le marteau, & exemple frappant de l'accord de cette théorie avec l'expérience, 317.— Qu'on ne doit point être étonné de l'effet prodigieux de la force de *Percuſſion*, 317.— Application de cette théorie à la recherche de l'effort des cordes dans les ſecouſſes qu'on leur fait éprouver, 318.— Expreſſion de la différencielle du temps de la durée du choc dans différents cas, 313, 320, 321, 322, 340. — Temps de la durée du choc, & développement de l'intégrale, (*Note.*) 324, 334, 340.— Pour les corps parfaitement élaſtiques, 326.— Pour ceux qui n'ont que peu ou point d'élaſticité, 328. — Pour le cas où les corps ne ſont animés par aucune puiſſance, 329.— Quand l'impreſſion eſt formée par la ſeule preſſion, les corps étant parfaitement élaſtiques, 331. — Quand la force de *Percuſſion* eſt conſtante, 341.— Temps dans lequel l'impreſſion va en augmentant, ou en diminuant, à compter du commencement du choc; & égalité de ces deux expreſſions, à l'inſtant où s'acheve la plus grande impreſſion,

Digitized by Google

324.— Temps dans lequel se forme la plus grande impression, 325.— Est la moitié de toute la durée du choc dans les corps parfaitement élastiques, 327.— Pour les corps qui n'ont aucune élasticité, lorsqu'ils ne sont animés par aucune puissance, 329, 331.— Quand l'impression est formée par la seule pression, les corps étant parfaitement élastiques, 331.— Lorsque le corps choqué est d'une masse infinie, & est en repos, 338, 339.— Application, lorsque la force de percussion est constante, 342.— *Idem*, le corps choqué étant en repos, & d'une masse infinie, 343.— Temps de la durée du choc ne dépend pas des vitesses primitives avec lesquelles se fait le choc, lorsque les corps ne sont animés par aucune puissance, 325, 330.— Lorsque les corps ne sont animés que par des puissances, ce temps est double de ce qu'il est lorsqu'aucune puissance ne les anime, 332.— Est toujours le même, quelles que soient les puissances, lorsque les corps ne sont animés que par elles, 333.— Temps de la durée du choc est très-court; est presque infiniment petit dans les corps très-durs, 336. Exemples.— Application au cas où les corps agissent par la seule pression, 337.— Trouver le *Centre de percussion*, 344. V. *Centre de percussion*.

PLAN DIRECTEUR, 167, 172.

PLAN PRIMITIF, 124.

PLAN DE ROTATION, 140, 164, 172.

PLAN INCLINÉ, 424, 426 *jusqu'à* 457.— La puissance nécessaire pour faire monter un corps le long d'un plan incliné, doit être plus grande que celle que lui imprime la gravité pour le faire descendre, plus la résistance de frottement, 427.— Expression de cette puissance, 428, 433.— Cas où elle est moindre que celle qu'il faut employer pour élever le corps verticalement, 429.— Cas où le *Plan incliné* facilite le mouvement, 429, 430, 431.— Ce qui arrive lorsque le plan est horisontal, 430.— Que la puissance ne peut jamais être zéro, 431.— Que le plan étant vertical, la puissance pour faire monter le corps le long du *Plan* est égale à celle qu'il faut employer pour l'élever verticalement, 432.— Ce qui arrive lorsque le *Plan* est très-dur, 434.— Cas où la puissance qui fait monter le corps doit être la plus grande possible. Expression de cette puissance, & qu'elle peut être plus grande que celle qu'il faut pour élever le corps verticalement, 435, 436.— Valeur du sinus de l'inclinaison qui répond à ce cas extrême, 435 (*Note*.)— Que le *minimum* de la puissance ne peut avoir lieu, à moins que le sinus de l'inclinaison ne soit négatif, 437.— Relation de la puissance qui fait monter le corps sur le plan, avec la vîteſſe qu'il doit prendre, 438, 439, 440. Trouver l'eſpace parcouru en montant par la relation avec la vîteſſe, 442, 443 — *Idem*, par la relation avec le temps employé à le parcourir, 444, 445.

PORES sont la cauſe que les parties des corps cedent plus ou moins dans le choc; ce qui produit les enfoncements, cavités, ou impreſſions, 237, 238.

POULIE, 515 *juſqu'à* 530 — Se réduit au treuil dont les leviers ſont égaux, 516. V. *Treuil*. — Rapport entre les puiſſances, 517.— Que la force pour vaincre le frottement eſt proportionnelle à celle qu'il s'agit de ſurmonter, 518.— Valeur de la plus grande & de la plus petite puiſſance, 519.— Que la plus petite ne peut avoir lieu dans la *Poulie*, 520.— Que pour la plus grande puiſſance il faut que le rayon de l'axe ſoit le plus petit qu'il eſt poſſible, 521.— Déterminer ſi dans la *Poulie* le mouvement doit ſe faire ſur le rouet, ou ſur l'axe fixe, 523.— Qu'il eſt poſſible que le mouvement ſe faſſe ſur le rouet, 524.— Que le frottement étant nul, le mouvement ſe fait indifféremment ſur l'axe, ou ſur le rouet, 525.— Que la *Poulie fixe* n'augmente point l'effet de la puiſſance, 526.— Déterminer la relation entre les puiſſances & la force qui agit ſur le point où la *Poulie* eſt fixée, 527.— *Poulie mobile*, 528.— Relation entre les puiſſances dans la *Poulie mobile*, 529.— Plus grande & plus petite valeur de ces puiſſances, 530.

PRESSION, 231.

PUISSANCE, conſtante, variable, poſitive, ou négative. 13, V. *Force*.

RAYON *de rotation*, 220. V. *Rotation*.

REACTION eſt oppoſée à l'action, & lui eſt égale, 22.

REPOS, 4.

RESISTANCE, V. *Force*, *Moments*.— *Réſiſtances horiſontales qu'éprouvent les corps mus dans les fluides, & au contraire*, 638 *juſq.* 674.— Trouver les *Réſiſtances* horiſontales qu'éprouve un corps mu dans un fluide, 638.— *Idem*, pour un parallélipipede rectangle, &c. 639.— Cas où le fluide ne peut paſſer par-deſſus le parallélipipede par l'effet de la dénivellation, 640, 646.— Où ſa face ſupérieure eſt de niveau avec la ſuperficie du fluide, 641, 647, 649, 651. — Où l'on néglige la dénivellation, 642.— Circonſtances où l'on peut faire cette négligence, 643.— Doutes ſur la théorie des réſiſtances, & que les principes de *Mariotte* ſur ce ſujet ſont défectueux, 644.— *Réſiſtance* abſolue n'eſt que les deux tiers de celle que fournit la théorie, 644.— Trouver la *Réſiſtance* horiſontale du même parallélipipede dans d'autres cas, 645. — *Idem*, quand le parallélipipede eſt entiérement ſubmergé, 648, 650, 652, 655.— Réduction de la formule en ſérie, 653.— Pour le cas où le parallélipipede eſt ſubmergé à une très-grande profondeur, 654.— Que la *Réſiſtance* du parallélipipede ne dépend point de ſa longueur, 657. — Qu'elles ſont les mêmes pour un quadrilatere, 658. — Trouver la même *Réſiſtance* horiſontale, le parallélipipede ayant ſes côtés inclinés à l'horiſon, 659.— Réduction d'une partie de la formule en ſérie, 660 — Cas où l'on néglige la dénivellation, 660.— Où l'angle d'inclinaiſon & la vîteſſe ſont infiniment petits, 662.— *Réſiſtance* horiſontale qu'éprouve un cylindre qui ſe meut horiſontalement dans une direction perpendiculaire à ſon axe, 663.— Autre méthode appliquée à la *Reſiſtance* du cylindre, de la ſphere, &c 664. (*Note*.). — *Réſiſtance* horiſontale qu'éprouve un corps quelconque, 665.— Son expreſſion pour deux petits quadrilateres correſpondants, 666.— Réduction d'une partie de la formule en ſérie.— Que la premiere partie de la formule ſuit la raiſon des ſimples vîteſſes, & la ſeconde celle de leurs quarrés; & cas où cette ſeconde partie eſt poſitive ou négative, 667 & 669. *Note* ſur le cas qui convient à la Marine, 667.— Cas où le corps eſt ſubmergé à une grande profondeur, 668. — Où la partie poſtérieure eſt égale & ſemblable à la partie antérieure, 669.— Où le corps eſt ſubmergé à une grande profondeur, 670.— Expreſſion de l'effet de la dénivellation, 671. — Ce que devient cette expreſſion lorſque les dénivellations ne ſont pas exceſſives, 672. — Que les *Réſiſtances* horiſontales qui proviennent de la dénivellation, ſuivent la raiſon des quatrièmes puiſſances des vîteſſes, 673.— *Réſiſtance* horiſontale qui agit ſur un corps quelconque, eſt comme trois quantités, une comme les ſimples vîteſſes, l'autre comme leurs quarrés, & la troiſieme comme leurs quatrièmes puiſſances, 674.

Réſiſtances verticales qu'éprouvent les corps mus dans les fluides, & au contraire, &c, 675 *juſqu'à* 693. — Trouver la réſiſtance verticale qu'éprouve un parallélipipede qui ſe meut horiſontalement, étant entiérement ſubmergé, &c. 675. — Cas où c'eſt le parallélipipede

Digitized by Google

qui se meut, & non le fluide, 675.— Où le parallélipipede se réduit à un plan; 677.— Où il est submergé à une grande profondeur, 678.— Où le mouvement est vertical, 679.— Où le mouvement est horisontal, 680.— Que ce dernier cas est le même que celui où le parallélipipede est en repos, 681. Cas où le mouvement se fait vers le haut, 682, 684.— Où c'est le fluide qui se meut, 683.— Où le parallélipipede se réduit à un plan, 685.— *Résistance* qu'éprouve le même parallélipipede, sa surface supérieure étant hors du fluide, 686. Cas où c'est le parallélipipede qui se meut, 687.— Où le mouvement est vertical, 688.— Distinction des cas où le mouvement se fait vers le haut ou vers le bas, dans une circonstance particuliere, 689.— Cas où le corps est sans mouvement, 690.— Où le mouvement est horisontal, 691.— Où c'est le fluide qui se meut, 692.— Où il se meut verticalement, 693.

Quantité dont les dénivellations produites par quelques surfaces, alterent les forces & les Résistances qu'éprouvent d'autres surfaces, 694 *jusqu'à* 735.— La dénivellation qui provient de l'action d'une surface, s'étend tout autour d'elle, en formant une parabole égale & semblable, 694, 695, 696. — Que les dénivellations produisent des *Forces* positives, ou négatives, qui agissent sur les surfaces qu'elles environnent, & alterent également les vîtesses avec lesquelles le fluide jailliroit par un orifice ouvert dans ces surfaces, 697.— Cas où la surface est plane, 698.— Trouver la vîtesse avec laquelle le fluide jailliroit par un orifice ouvert dans une surface, en ayant égard à l'effet de la dénivellation produite par une autre surface, 699.— Trouver la *Force* horisontale qui agit sur une surface plane choquante, entiérement submergée, en ayant égard à la dénivellation que produit une autre surface choquante, (*Note.*) 700 *jusqu'à* 704.— *Idem*, pour une surface choquée, 705, 706, 707.— *Idem*, pour une surface choquée entiérement submergée, en ayant égard à la dénivellation que produit une autre surface plane choquante 708 *jusq.* 712.— Lorsque la surface choquée s'étend hors du fluide, 713 *jusq.* 718.— Lorsque les surfaces choquante & choquée se réduisent à une seule, 719.— Trouver les *Forces* horisontales qui agissent sur une surface choquante, ou choquée, lorsqu'elles sont séparées par quelque distance, 721 *jusq.* 726. — Trouver la *Résistance* horisontale qu'éprouve un parallélipipede rectangle, en ayant égard à la force que la dénivellation, produite par la surface choquante, communique à la surface choquée, 726.— Cas particulier, 727.— Si le parallélipipede se réduit à un plan, 728.— *Resistance* du parallélipipede, est plus grande que celle du plan, 729, 730.— Est double de celle du plan, lorsque la vîtesse est fort petite, 731. — Le parallélipipede étant enfoncé à une grande profondeur dans le fluide, 732.— *Résistance* d'un parallélipipede dont la base est un quarré, 732.— *Idem* d'une sphere, 733.

Des surfaces & des solides de moindre Résistance, 736 *jusq.* 791.—Trouver la ligne ou la surface qui jouisse d'une certaine propriété dans le plus haut ou le plus bas degré, &c. 736.— Trouver la figure que doit avoir une surface plane verticale, donnée de grandeur, pour qu'elle éprouve la plus grande ou la moindre *Résistance*, 737.— *Idem*, en ayant égard à la dénivellation, 737.— Que cette figure est celle d'un rectangle, si la dimension horisontale est déterminée, 738.— Que les dimensions du rectangle dépendent non seulement de la vîtesse, mais encore de l'angle sous lequel le fluide le frappe, 740.— Moindre *Résistance* qu'éprouve le rectangle, 742.— Trouver la ligne qui doit terminer un plan horisontal, pour qu'il éprouve la plus grande ou la moindre *Résistance*, 744 *jusq.* 752.— Autre cas, 753 *jusq.* 765.— Qu'un corps composé de deux prismes triangulaires, éprouve moins de *Résistance* que s'il étoit terminé par quelque surface courbe: condition pour que cela ait lieu, 764, 765.— La longueur & la largeur d'un plan horisontal étant donnée, trouver l'endroit où l'on doit placer la plus grande largeur, pour que la *Résistance* soit la plus grande ou la moindre qu'il est possible, 766 *jusq.* 770.— Trouver la relation entre la largeur & la profondeur que doit avoir un corps d'un volume constant, pour qu'il éprouve la moindre *Résistance* dans le fluide, 771 (*Note.*).— Difficulté de calcul que présente ce problême, 771, (*Note.*).—Qu'un double prisme dont les deux bases horisontales sont égales, éprouve moins de *Résistance* que si l'inférieure étoit plus petite que la supérieure, 772.— Que c'est la même chose pour tout autre corps, 773.— Trouver la ligne qui doit terminer un plan horisontal, pour qu'en renfermant le plus grand, ou le moindre espace, il éprouve la plus grande, ou la moindre *Force* possible, 774.— Défaut dans le calcul de l'Auteur, 774 (*Note*).—*Idem*, pour la plus grande, ou la plus petite *Résistance*, 775, 791.— Pour une partie de la courbe, 790. — Table des abscisses & des ordonnées de la courbe qui, en renfermant le plus grand, ou le moindre espace, éprouve la moindre, ou la plus grande *Résistance*, 791.— Vérification de la loi des *Resistances*, *App. I & II*, *pag.* 372 & 393. V. *Corfvolant.*— Application de notre théorie aux expériences de *Smeaton*, & leur accord parfait avec elle, tandis que l'ancien système en est fort éloigné, *App. II*, *pag.* 393.

Richer fait des expériences à Cayenne sur la longueur du pendule; & est le premier qui ait soupçonné la diminution de la pesanteur, en allant vers l'équateur, 373 (*Note.*)

Rotation d'un système, 129 *jusq.* 219.— Formule de l'angle de *Rotation* pour deux corps liés entre eux, & animés par des puissances paralleles, & *Notes* pour le développement du calcul, 129 (*Note*), 136 (*Note.*)— Vîtesse d'un des corps, 131.— Distance perpendiculaire des corps à une ligne parallele à la direction des puissances, qui passe par le centre des masses, 135.— Corps supposés réunis à leur centre de masses, 137.—La somme des moments étant égale à zéro, le système ne tourne point, 138.— *Rotation* se fait dans le plan qui coïncide avec les directions des puissances, & avec la droite qui passe par le centre des masses, 139.— Un des corps étant infini, le centre des masses coïncide avec lui, 141, 174. — Angle de *Rotation* pour ce cas, 175, 178.— Expression de l'angle de *Rotation* pour un corps obligé de tourner autour d'un point fixe, 142 (*Note.*). *Idem*, lorsqu'il n'y a qu'une seule puissance & deux corps, 143.— Cas où la puissance fait le même effet que s'il n'y avoit qu'un seul corps, 144.— Que le lieu du corps est indifférent, pourvu qu'il soit toujours à la même distance du point fixe, 145.— Pour trois corps animés de deux puissances, 146.— Pour quatre corps animés de deux puissances, 147.— Pour un nombre quelconque de corps, 148.— Pour un corps animé de deux puissances, 149.— *Idem*, pour un nombre quelconque de corps animés de trois puissances, 151.— *Idem*, animés de quatre puissances, 152.— Pour un nombre quelconque de corps animés par un nombre quelconque de puissances, 153, 154, 157, 158, 168, 175, 178.— Les mêmes, pour un corps fini, animé par un nombre quelconque de puissances, 173.— L'angle de *Rotation* n'éprouve aucun changement, quelque situation qu'on donne aux puissances, qu'on les divise, qu'on les réunisse, &c. pourvu que leur somme soit toujours la même, & que la distance perpendiculaire de leur centre à la direction qui passe par le centre des masses soit toujours la même, 155.— La même chose arrive, quelque changement qu'on fasse éprouver aux masses, pourvu que la somme

Digitized by Google

des moments d'inertie soit constante ; 156. — La *Rotation* est la même, le système étant libre, que si le centre des masses étoit fixe, 159. — Conséquence, 164. — Les formules de l'angle de *Rotation* sont les mêmes, lorsque tous les corps, ainsi que toutes les puissances, ne sont pas dans un même plan, 160, 166. — Que les corps peuvent être divisés, ou réunis, 161, 162. — Qu'il n'est pas nécessaire que les corps pris deux à deux soient dans la même droite, qu'ils peuvent être plus hauts, ou plus bas; qu'il n'y aura que le centre des masses qui changera, 169. — La même chose pour les puissances, 170. — Que l'axe de *Rotation* varie lorsqu'on change le centre des puissances; & position qu'il prend, 171. — La *Rotation* se faisant autour d'un axe fixe qui passe par le centre des masses, elle est la même que si le système ou le corps étoit libre, 179. — Angle de *Rotation* pour les corps pesans, 182. — Angle de *Rotation* du pendule simple, 184. — Pour le cas où la gravité seule agit, 185. — *Idem*, du Pendule composé, 187. — Angle de *Rotation* dans les Leviers, 198, 199.

De l'Axe & du Rayon de Rotation, 220 *jusqu'à* 229. — Trouver l'Axe de *Rotation* d'un système, 221. — Que cet Axe ne peut être fixe, à moins que le centre de gravité ne le soit, 222. — Qu'il n'y a point d'Axe fixe, à moins que le système ne tourne sur celui qui passe par son centre de gravité, 223. — Expressions du *Rayon de Rotation*, 224, 225. — Qu'il est infini pour les corps qui tombent librement, 226. — Qu'il est zéro lorsque les puissances se détruisent mutuellement, 227. — Réflexions sur l'Axe & le Rayon de *Rotation* qu'ont alligné MM *Bouguer* & *J. Bernoulli*, 224. — *Angle de Rotation* produit par la force perpendiculaire qui anime un corps posé sur une surface, 376. — Cet angle est nul lorsque la perpendiculaire abaissée du centre de gravité sur le plan, coincide avec le point d'appui, 377. — Condition essentielle pour que cela ait lieu lorsque le corps est appuyé par deux points, 378. — La même chose, quel que soit le nombre de points par lesquels le corps appuie sur la surface, 379. — Que la puissance parallele agit toujours, quoique la *Rotation* soit nulle, 380. — Angle de *Rotation* que doivent prendre les corps posés sur des plans inclinés lorsqu'ils sont dans mouvement progressif, 446, 447, 448. — *Idem*, lorsque la gravité est la seule puissance active, 450. — Cas où cet angle devient nul, 449. — Que la *Rotation* a toujours lieu, lorsque la verticale qui passe par le centre de gravité, tombe hors de l'appui, 451. — Angle de *Rotation* lorsque le frottement est vaincu, & que le point d'appui est déjà en mouvement, 452, 453, 454. — Que, dans ce cas, la *Rotation* se fait vers la partie supérieure, quoique la verticale qui passe par le centre de gravité, passe aussi par l'appui, 455, 456. — Erreur de tous les Auteurs sur ce point, 457. — Que toutes les *Rotations* possibles peuvent se réduire à trois; qu'il est seulement nécessaire de les considérer par rapport à deux axes, l'un horisontal, & l'autre vertical, 923.

De la Vitesse angulaire avec laquelle les corps flottants tournent, 929 *jusq.* 946. — Trouver la *Vitesse angulaire* avec laquelle les corps flottants tournent sur un axe quelconque, étant animés par une, ou par plusieurs puissances, 929. — Plus les moments d'inertie sont grands, plus il faudra de temps au corps pour acquérir une *Vitesse angulaire* donnée, 930. — Nécessité absolue que les résistances agissent dans la *Rotation*; & qu'on n'en peut faire abstraction, comme l'ont fait MM. *Bouguer* & *Eule*, 931. — Expression de la *Vitesse angulaire* des corps flottants, 932 (*Note.*), 933. — Raison entre la stabilité d'un cylindre & le moment résultant qui résulte de la *Rotation*, 939. — *Stabilité*. — Trouver la plus grande, ou la moindre Vitesse avec laquelle tournent les corps flottants, 943. Action que supportent les fibres d'un corps flottant pour cause de la *Rotation*; & que la plus grande a lieu lorsqu'elle commence, & lorsqu'elle finit, 944. — Que la plus grande action ne dépend pas de la résistance du fluide, 945. — Action que supporte une partie déterminée du corps flottant, telle que seroit un levier qui l'auroit uni, 946.

Rouet, V. *Poulie*.

Roulette, V. *Cycloïde*.

Secteur d'hyperbole équilatere, *App. I, Art.* 41.

Segment sphérique (solidité du), 306 (*Not.*).

Smeaton. Expériences de cet Auteur sur la résistance des fluides; accord parfait de notre théorie avec ses résultats, & leur opposition avec l'ancien système, *Ap. II, p.* 393.

Spire, V. *Vis*.

Stabilité, V. *Inclinaison*, *Moment*, *Rotation*. Trouver la *Stabilité* d'un corps flottant quelconque qui se meut horisontalement dans une direction perpendiculaire à l'axe horisontal de rotation, 830, 833. — Moments qui résultent des deux dénivellations, 832. — Moments, lorsque le plan vertical qui coincide avec l'axe, partage le corps en deux parties égales & semblables, 832. — Qu'ils se réduisent aux seuls moments verticaux, lorsque le corps est sans mouvement horisontal, 834. — Que ces moments sont égaux au produit du poids du corps multiplié par la distance horisontale du centre de gravité à la verticale qui passe par le centre de volume, 835. — Valeur de ce produit pour les corps formés par la révolution d'un plan autour d'un axe, 838. — Que ces moments verticaux peuvent être positifs, ou négatifs, ou égaux à zéro, 836, 837. — Que cette expression est la même pour les autres corps; mais la distance du centre de volume au centre de gravité est variable à chaque inclinaison, 839. — Le centre de volume étant plus bas que le centre de gravité, les moments sont négatifs, 840. — Moments qui résultent des puids doivent être pris en entier, tandis que ceux des résistances doivent être réduits aux deux tiers, 841. — Trouver en général la *Stabilité*, le corps étant sans mouvement, 842 (*Note.*). Equation qui en résulte, 844. — Autres expressions du moment, le corps étant en mouvement, les inclinaisons étant toujours infiniment petites, 845. — Quantité à laquelle on peut réduire cette expression, 846. — Qu'on doit ajouter les moments qui résultent de la dénivellation, ainsi que ceux qui proviennent de l'action mutuelle des surfaces, à moins qu'ils ne soient susceptibles d'être négligés, 847. — Différence qui résulte de considérer les corps en mouvement, ou en repos, 848. — Trouver la *Stabilité* d'un parallélipipede rectangle, 849. — Cas où le parallélipipede élevé ou abaissé fut extrémité choquante, ou bien demeure dans une situation horisontale, 851. — Trouver les moments qu'éprouve la base du parallélipipede, & qui résultent de la dénivellation, 853. — *Idem*, lorsque la viteſſe excede la longueur du parallélipipede, 854. — Lorsqu'elle est égale, les moments ne peuvent augmenter par l'augmentation de la viteſſe, 855. — Que ces moments sont positifs, 856. — Expression des moments du parallélipipede, en tenant compte de l'effet de la dénivellation sur sa base, 857. — Cas où le parallélipipede tourne en élevant ou en abaissant son extrémité choquante, 858. — Que les moments ne dépendent pas seulement de la viteſſe, mais encore de la disposition du parallélipipede, 859. — Combien il est différent de considérer le corps en repos, ou en mouvement, 860. — De ce qui est cause que le parallélipipede n'a pas

Digitized by Google

besoin d'un temps infini pour acquérir ſa plus grande viteſſe, 861.— Expreſſion de la verticale compriſe entre la perpendiculaire élevée ſur un plan vertical, & l'axe, 862.— Trouver la *Stabilité* du parallélipipede, ſa baſe étant inclinée à l'horiſon, 863.— Plus le centre de gravité ſera bas, plus le parallélipipede élevera avec force ſon extrémité choquante, 864.— Quantités dont la relation rend les moments poſitifs, ou négatifs, 865.— Que les moments de la baſe ne dépendent nullement de la ſituation du centre de gravité, 866.— Conditions pour que les moments ſoient poſitifs dès le premier inſtant, 867.— Trouver la *Stabilité* d'un cylindre, 869, 870. — *Idem*, lorſque la viteſſe eſt zéro, 870. — Que l'expreſſion précédente contient les moments de la déniveſlation, 872.— Raiſon entre la *Stabilité* d'un cylindre, & le moment réſiſtant qui réſulte de la rotation, 939.

SUPERFICIE du fluide, 546.
SURFACE choquante, 598.
SURFACE choquée, 598.
SYSTÊME de corps, 80.

TEMPS. V. *Mouvement*, *Eſpace*, *Viteſſe*, *Percuſſion*, *Frottement*.

TEMPS, dans le mouvement uniforme, ſont en raiſon directe de l'eſpace, & en raiſon inverſe de la viteſſe, 27.

TREUIL ou *Cabeſtan*, 424; 491 *juſq.* 541.— Qu'il eſt indifférent qu'il y ait pluſieurs leviers, ou que ce ſoit une roue avec différentes puiſſances appliquées à ſa circonférence, 492.— *Treuil* eſt un levier de la premiere, ſeconde ou troiſieme eſpece, ſuivant la ſituation de la puiſſance par rapport à l'axe, 493.— Trouver la puiſſance néceſſaire pour vaincre le frottement, & mettre la machine en mouvement, (*Note*) 494.— *Idem*, pour le cas où il y a deux leviers égaux & oppoſés, & des puiſſances égales appliquées à leurs extrémités, 506.— *Idem*, quand il y en a un plus grand nombre, 507. — Que c'eſt la même choſe, lorſqu'au lieu de leviers, c'eſt une roue, 508.— Que la puiſſance néceſſaire pour vaincre le frottement eſt toujours proportionnelle à celle qu'on applique au *Treuil*, 495.— Qu'elle eſt variable, 496.— Trouver la plus grande & la plus petite puiſſance qui peuvent vaincre le frottement, 497.— Avantage qui réſulte de la coïncidence des leviers, 498.— *Idem*, de leur longueur, 499, 509.— *Treuil*, ne donne aucun avantage ſi les leviers ſont égaux, lorſqu'ils coïncident, & eſt déſavantageux ſi les leviers ſont dans des ſituations oppoſées, 500.— Cas où le *Treuil* eſt déſavantageux dans les deux cas, 501.— Déterminer les cas où le *Treuil* ceſſe d'être avantageux, les leviers étant dans des ſituations oppoſées, 502.— Avantage qui réſulte de la diminution du rayon du cylindre, 503, 509.— Qu'en ſuppoſant le frottement nul, la ſituation des leviers eſt indifférente, & alors notre théorie convient avec celle de tous les Auteurs de Méchanique, 504.— Erreur dans laquelle ils ſont tombés ſur les effets du *Treuil*, 505.— *Treuil* une fois mis en mouvement avec une viteſſe conſtante, continue à ſe mouvoir avec la même viteſſe, en ſurmontant continuellement le frottement, 510, 511.— Frottement eſt le même dans le mouvement qu'au moment où il eſt ſurmonté, 510.— Expreſſion de la puiſſance néceſſaire pour maintenir le treuil en mouvement, avec une viteſſe conſtante déjà acquiſe, dans le cas de la roue, & dans celui où il n'y a qu'une ſeule puiſſance, 510.— Qu'on peut faire entrer dans le calcul la peſanteur de la machine, 512.— Qu'il eſt avantageux que le poids de la machine s'oppoſe à la réſiſtance à vaincre, 513.— Que l'action qui réſulte du poids de la machine ne ſe fait point ſentir dans le treuil vertical, 514.

TROCHOÏDE. V. *Cycloïde*, (*Note.*) 365.

VIS, 424, 478 *juſq.* 490. V. *Frottement*, *Plan incliné*. — Sa diſtinction en vis mâle & vis femelle, 478.— Spire, filet ou pas de la vis, 480.— Comment cette machine produit ſon effet, 481.— Que la *Vis* n'eſt pas une machine ſimple, lorſque le levier a plus de longueur que le rayon du cylindre, 482.— Trouver la puiſſance néceſſaire pour la mettre en mouvement, en ayant égard au frottement, 483.— Cas où elle demeure ſans mouvement, 484.— Une fois miſe en mouvement avec une viteſſe conſtante, elle continue avec cette viteſſe tant que la puiſſance appliquée ſuffit pour vaincre le frottement, 486.— Le frottement étant nul, la puiſſance qui anime la vis, eſt à celle qu'elle doit vaincre, comme la hauteur du pas de la vis eſt à la circonférence que décrit la puiſſance, 486.— Que cette analogie eſt celle que donnent tous les Auteurs, & conſéquences, 487.— Cas où la *Vis* rétrogradera, la puiſſance ceſſant d'agir, 488.— Trouver la relation entre la puiſſance appliquée à la *Vis*, & la viteſſe avec laquelle elle ſe mouvera après avoir ſurmonté le frottement, 489. — *Idem*, entre la même puiſſance & l'eſpace que parcourt la *Vis* dans la direction de ſon axe, 490.

VITESSE, 6. V. *Mouvement*, *Eſpace*, *Temps*, *Percuſſion*, *Frottement*, *Centre*.

VITESSE *abſolue*, *relative*, 7.— Que la viteſſe abſolue peut être un repos relatif; expreſſion générale de ces viteſſes, 8. — Dans le mouvement uniforme, la *Viteſſe* eſt en raiſon directe de l'eſpace, & en raiſon inverſe du temps, 26.— S'exprime par l'eſpace parcouru pendant une ſeconde, 28.— Formule de la différence entre la viteſſe initiale d'un corps, & ſa viteſſe à chaque inſtant de ſa courſe, 30 — Développement de cette formule (*Note.*) 30.—La puiſſance étant conſtante, cette différence eſt, en raiſon directe, compoſée de la puiſſance & du temps, & en raiſon inverſe de la maſſe, 31.— Cas où le corps eſt en repos lorſque la puiſſance commence ſon action, 32.— Cas du mouvement retardé, où le corps parvient au repos, 33.— Viteſſe acquiſe dans le mouvement accéléré & perdue dans le retardé; & cas où ces viteſſes ſont égales, 34.— Viteſſe des corps graves, 46, 50, 53.

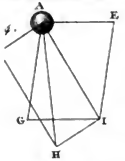
VITESSE *angulaire*, 130, V. *Rotation*.

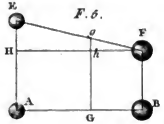
VOLUME peut être pris pour exprimer la maſſe, la denſité étant uniforme, 121 — Volume de fluide déplacé par un corps flottant eſt égal au poids du corps, 561, 562.

WALLIS, (*le Docteur*) établit la réſiſtance des fluides proportionnelle à la ſimple viteſſe, 593.

FIN DE LA TABLE DES MATIERES.

Digitized by Google





F. 6.

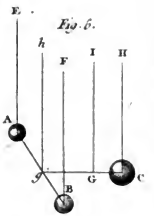
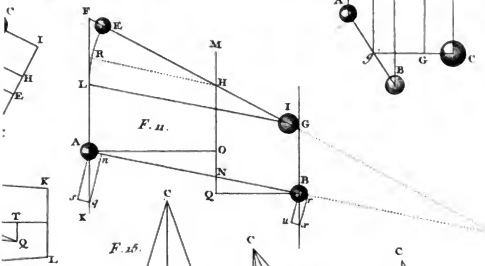
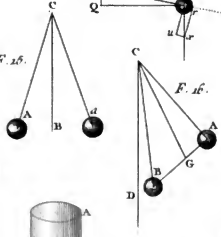


Fig. 6.

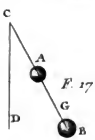


F. 11.

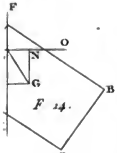


F. 16.

F. 16.

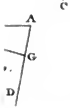


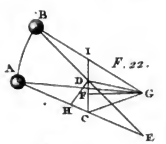
F. 17.



F. 14.

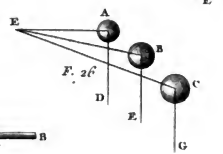
F. 21.



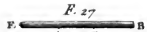


F. 22.

F. 25.



F. 26.



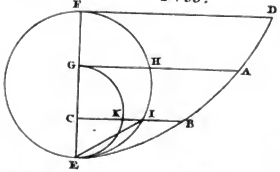
F. 27.

Digitized by Google

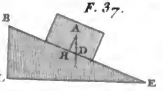
Digitized by Google

F. 32

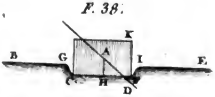
F. 33.



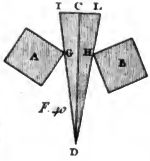
F. 37.



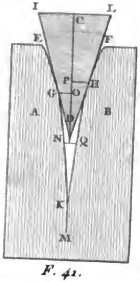
F. 38.



F. 40.



F. 41.



F. 44.

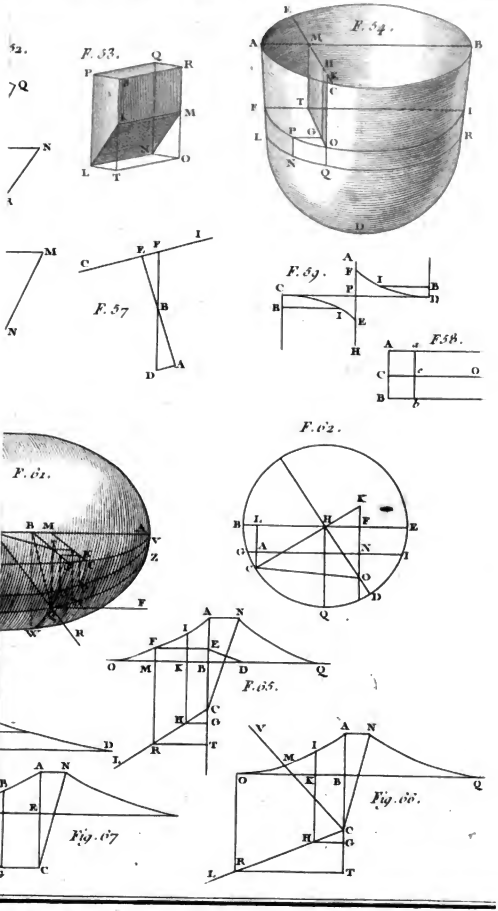
F. 48.

F. 49.

F. 50

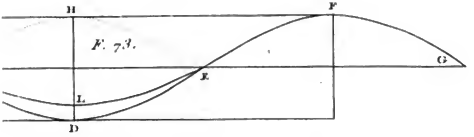
Digitized by Google

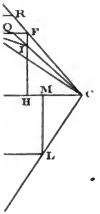
Digitized by Google

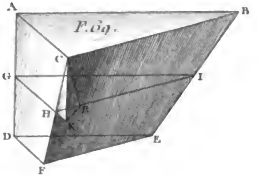


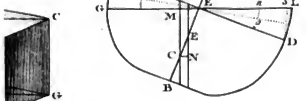
Digitized by Google

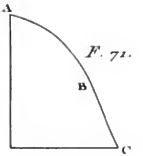
Digitized by Google

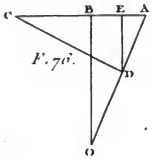


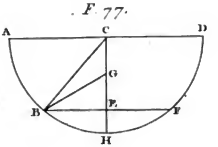








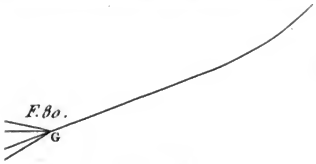




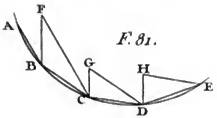
Digitized by Google

Digitized by Google

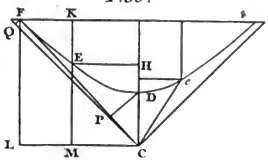
F. 80.



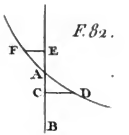
F. 81.



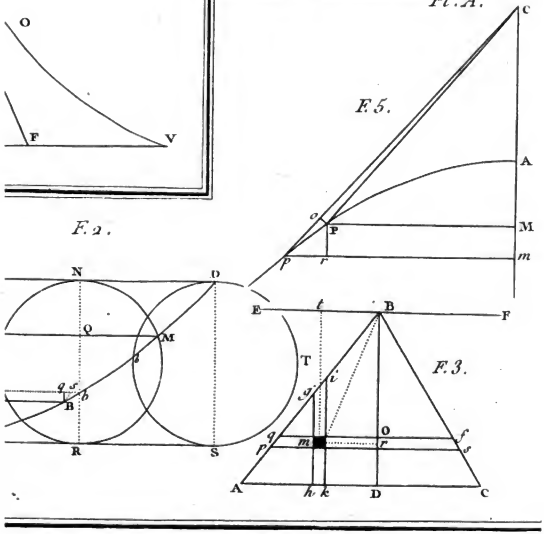
F. 83.



F. 82.



Pl. A.



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

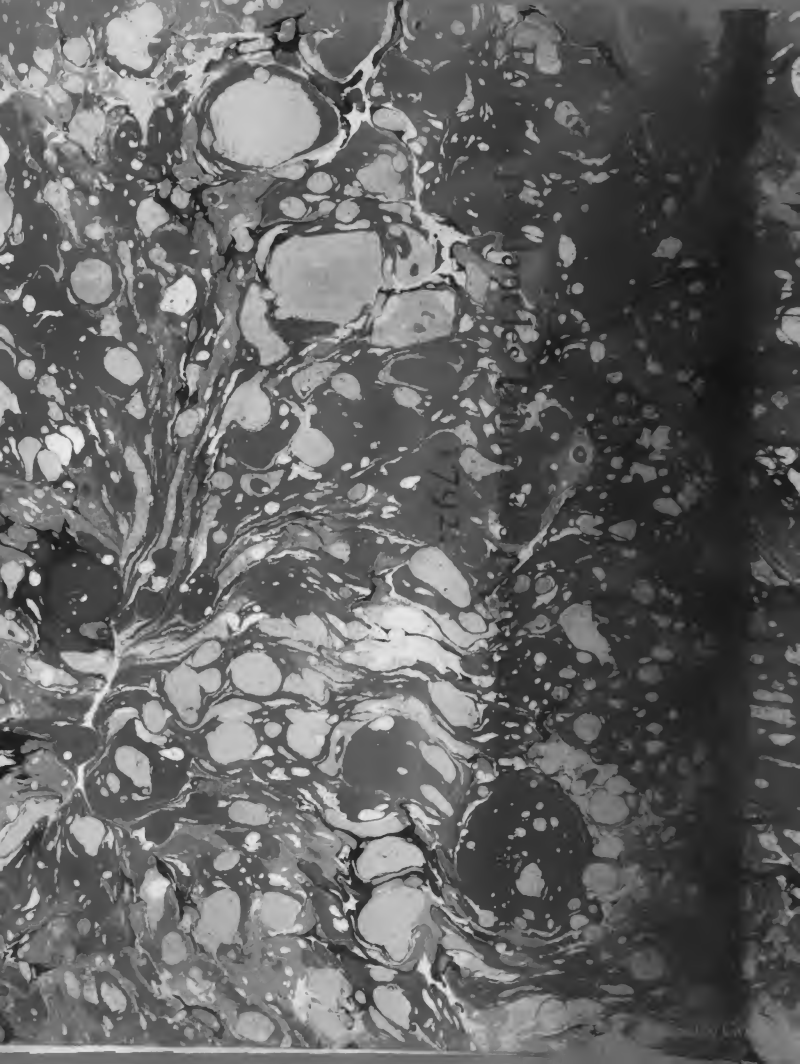
Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

5603

Digitized by Google



This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine of five cents a day is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.

Eng 8057.83
Examen maritimie.
Cabot Science
005510936
3 2044 091 879 064

Digitized by Google